ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

10-րդ դասարան

Առաջին օր (17 փետրվարի, 2024թ)

1. Դիցուք $d(n)$-ը n բնական թվի բաժանարարների քանակն է՝ ներառյալ 1-ն ու n-ը: Գտե՛ք բոլոր n բնական թվերը, որոնց համար $d(n) = 3$ և $d(n + 65) \leq 7$:

   Լուծում: $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$ պարզ արտադրիչների վերլուծմամբ թվի համար $d(N) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$:

   Փաստորեն $n = p^2$, որտեղ p-ն պարզ թիվ է: Անմիջական ստուգմամբ պետնում ենք, որ $p = 2$ և $p = 3$ դեպքում ստանում ենք լուծումներ՝ $n = 4$ և $n = 9$: Ապացուցենք, որ այլ լուծում չկա:

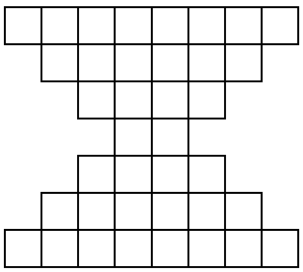
   Քանի որ $p > 3$ պարզ թիվ է, ուրեմն $n = p^2 \equiv 1(mod\ 4)$ և $n = p^2 \equiv 1(mod\ 3)$: Դա նշանակում է, որ $n^2 + 65$ թիվը զույգ է, չի բաժանվում 4-ի և բաժանվում է 3-ի: Եթե n^2+65-ը 2-ից և 3-ից բացի ունենա ևս մեկ պարզ բաժանարար, ապա բաժանարարների քանակը կլինի առվազն $2^3 > 7$: Հետևաբար, միակ հնարավոր տարբերակներն են $n^2 + 65 = 2 \cdot 3^k$, որտեղ $k = 1$ կամ $k = 2$: Ստուգելով այս դեպքերն առանձին-առանձին պետնում ենք որ չեն բավարարում խնդրի պայմանին:

   Պատասխան $n = 4$ և $n = 9$:

2. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր նկարում պատկերված վանդակներում գրել 1 կամ 2 այնպես, որ

ա) յուրաքանչյուր տողում գրված թվերի գումարը լինի կենտ, իսկ յուրաքանչյուր սյունա-կում գրված թվերի գումարը՝ զույգ:

բ) յուրաքանչյուր տողում գրված թվերի գումարը լինի զույգ, իսկ յուրաքանչյուր սյունա-կում գրված թվերի գումարը՝ կենտ:



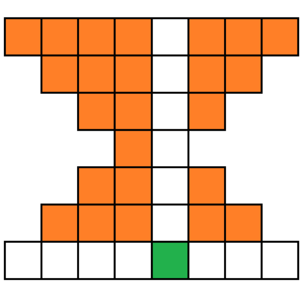
Լուծում: ա) Եթե յուրաքանչյուր տողում գրված թվերի գումարը կենտ է, ապա բոլոր թվերի գումարը նույնպես կենտ է (հավասար է 7 կենտ թվերի գումարի): Մյուս կողմից, քանի որ յուրաքանչյուր սյունակում գրված թվերի գումարը զույգ է, ուրեմն բոլոր թվերի գումարը նույնպես զույգ է: Ստացանք հակասություն, քանի որ բոլոր թվերի գումարը չի կարող լինել միաժամանակ և՛ զույգ, և՛ կենտ:

բ) Նարնջագույն վանդակներում կամայական ձևով գրենք 1 և 2 թվերը: Յուրաքանչյուր տողում (բացի վերջինից) գրված թվերի գումարի զույգ լինելու պահանջից միարժեքորեն կորոշվի այդ տողի սպիտակ վանդակում գրվող արժեքը: Նույն կերպ, յուրաքանչյուր սյունակում գումարի կենտ լինելու պահանջով միարժեքորեն կորոշվեն վերջին տողի սպիտակ վանդակների թվերը:

Այժմ ապացուցենք, որ կանաչ վանդակում հնարավոր է թիվ գրել, այն էլ միարժեքորեն: Վերջին տողի թվերի գումարը զույգ է, ուրեմն կանաչ վանդակի թիվը որոշվում է միարժե-քորեն: Պետք է ապացուցել, որ սպիտակ սյունակի վանդակների թվերի և կանաչ վանդակի թվի գումարը կենտ է:

Քանի որ ամեն տողում գրված թվերի գումարը զույգ է, ուրեմն բոլոր թվերի գումարը զույգ է: Մենք արդեն գիտենք, որ 8 սյունակներից 7-ում գրված թվերի գումարը կենտ է, հետևաբար այդ 7 սյունակներում գրված բոլոր թվերի գումարը կենտ է: Քանի որ բոլոր թվերի գումարը կենտ է, ուրեմն սպիտակ վանդակներով սյունակում գրված բոլոր թվերի գումարը նույնպես կենտ է:

Ստացանք, որ աղյուսակը հնարավոր է լրացնել միարժեքորեն՝ նարնջագույն վանդակ-ներում գրելով կամայական թվեր: Ուրեմն, հնարավոր աղյուսակների քանակը 2^{24} է:



3. Դիցուք ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի I կենտրոնով անցնող ուղիղը AB և AC հատվածները հատում է համապատասխանաբար P և Q կետերում , ընդ որում $AP = AQ$: Դիցուք BPI և CQI եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերը հատվում են I-ից տարբեր M կետում: Դիցուք BI և PM ուղիղները հատվում են D, CI և MQ ուղիղները՝ E կետում: Հայտնի է, որ IM և DE ուղիղները հատվում են R կետում: Ապացուցե՛ք, որ $DR = RE$:

   Լուծում: Դիցուք BC և IM ուղիղները հատվում են K կետում: $\angle BMI = \angle API = \angle AQP = \angle IMC$ Քանի, որ $\angle PMI = \angle PBI = \angle IBM$, ուրեմն B, D, K, M կետերով անցնում է շրջանագիծ: Փաստորեն $\angle IDK = \angle BMK$: Նմանապես $\angle IEK = \angle CMK$, որտեղից՝ $\angle IDK = \angle IEK$:

   Քանի, որ $\angle DKB = \angle DMB = \angle PIB$ և $\angle EKC = \angle QIC$, հետևաբար $\angle EKC = \angle QIC$: Այսպիսով $\angle DIE = \angle DKE$ և $\angle IDK = \angle IEK$: Ստացվեց, որ $DIEK$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, հետևաբար $DR = RE$: