ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

7-ՐԴ ԴԱՍԱՐԱՆ

17 փետրվարի, 2024 թ

1. Բնական թիվը կոչվում է n-հրաշալի, եթե գրառման թվանշանների ցանկացած դասավորությամբ ստացվում է 4-ի բազմապատիկ n-անիշ թիվ: Գտե՛ք 7-հրաշալի թվերի քանակը:

   Լուծում: Թվի գրառման մեջ չի կարող լինել 0 թվանշանը: Եթե թվի գրառման մեջ կա կենտ թվանշան, ապա այն տեղափոխելով թվի վերջ, կստանանք 4-ի չբաժանվող թիվ:

   Ուրեմն, հրաշալի թվի բոլոր թվանշանները զույգ են: Դիցուք, 7-հրաշալի թվի գրառման մեջ առկա են a և b թվանշանները: Ըստ 4-ի բաժանելիության հայտանիշի $10a+b$-ն բաժանվում է 4-ի: Քանի որ a-ն զույգ է, ուրեմն $10a$-ն բաժանվում է 4-ի: Այսպիսով եզրակացնում ենք, որ b-ն բաժանվում է 4-ի: Ուրեմն $b=4$ կամ $b=8$:

   Փաստորեն, թվի թվանշանները կարող են լինել միայն 4 և 8 թվանշանները: Քանի որ 44, 48, 84 և 88 թվերը բաժանվում են 4-ի, ուրեմն միայն 4 և 8 թվանշաններով գրվող ցանակցած յոթանիշ թիվ կլինի 7-հրաշալի: Այդպիսի թվերի քանակը $2^7=128$ է:

2. Տրված a, b և c բնական թվերի համար Անին, Բաբկենն ու Գայանեն ձևակերպեցին երկուական պնդում՝ մեկը ճիշտ և մեկը սխալ: Նրանց պնդումներն են.

	Պնդում 1	Պնդում 2
Անի	$a + b + c = 34$	$a \cdot b \cdot c = 56$
Բաբկեն	$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = 311$	a, b, c թվերից ամենափոքրը հավասար է 5-ի:
Գայանե	$a = b = c$	a, b, c թվերը պարզ են:

Գտե՛ք a, b, c թվերը:

Լուծում: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $a \leq b \leq c$: Եթե Անիի երկրորդ պնդումը ճիշտ է, ապա Գայանեի երկու պնդումները կլինեն սխալ: Քանի որ 56-ը ո՛չ երեք պարզ թվերի արտադրյալ է, ո՛չ էլ թվի խորանարդ: Ուրեմն ճիշտ է Անիի առաջին պնդումը:

Քանի որ $a + b + c = 34$, ուրեմն Գայանեի առաջին պնդումը սխալ է: Ուրեմն a, b, c թվերը պարզ են:

Քանի որ երեք պարզ թվերի գումարը 34 է, ապա նրանցից մեկը 2 է: Ուրեմն Բաբկենի երկրորդ պնդումը սխալ է, այսինքն $ab + bc + ac = 311$:

Փաստորեն $a = 2$, $b + c = 32$ և $2b + 2c + bc = 311$, ընդ որում b և c թվերը պարզ են:

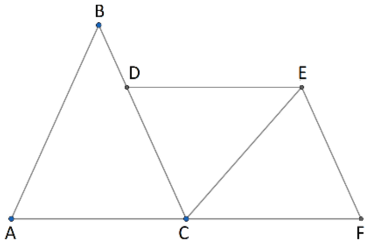
b և c թվերը գտնելու երկու եղանակ:

Առաջին եղանակ: 32-ը երկու պարզ թվերի գումարով ներկայացվում է $3 + 29$, $13 + 19$: Ստուգելով համոզվում ենք, որ $2b + 2c + ac = 311$ պայմանին բավարարում է $(13, 19)$ թվազույգը:

Երկրորդ եղանակ. $2(b + c) + bc = 311$, ուրեմն $bc = 311 - 2(b + c) = 311 - 2 \cdot 32 = 247$:
$247 = 13 \cdot 19$:

Պատասխան՝ $(a, b, c) = (2, 13, 19)$ և իր տեղափոխությունները**:**

3. Գծագրում $AB = DE = FC$, $\angle ABC = \angle DEC = \angle FCE$, $\angle BAC = \angle EDC$, $AF = 21$, $CE = 13$, և A, C, F կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա: Գտե՛ք BD հատվածի երկարությունը:



Լուծում: Քանի, որ $\angle DEC = \angle FCE$, հետևաբար DE-ն զուգահեռ է CF-ին: Այստեղից $\angle BAC = \angle EDC = \angle BCA$, այսինքն եռանկյուն ABC-ն հավասարասրուն է՝ $AB = BC$: Եռանկյուններ $ABC = DEC$ (ըստ կողմի և առընթեր երկու անկյունների), իսկ եռանկյուններ $DEC = ECF$ (ըստ երկու կողմի և կազմած անկյան) հետևաբար $AB = BC = DE = EC = 13$: Այստեղից $AC = 21 - 13 = 8 = DC$: Հետևաբար $BD = 13 - 8 = 5$:

4. Դիցուք a, b, c և d թվերը համապատասխանաբար N, $N+1$, $N+2$ և $N+3$ թվերի թվանշանների գումարներն են: Հայտնի է, որ $a+b=200$ և $c+d=105$;

ա) Գտե՛ք $b+c$ արտահայտության արժեքը:

բ) Գտե՛ք N-ի միավորների դասում (հարյուրավորների, տասնավորների, միավորների կարգերում) գրված թվանշանները:

Լուծում:

ա) Եթե N թիվը չի ավարտվում 9 թվանշանով, ապա $N+1$ և N թվերը տարբերվում են միայն վերջին թվանշանով, ուստի $N+1$-ի թվանշանների գումարը N-ի թվանշանների գումարից մեծ է 1-ով՝ $b=a+1$: Այդ դեպքում $a+b=200$ հավասարությունը չի կարող տեղի ունենալ:

Փաստորեն N-ի վերջին թվանշանը 9 է: Ուրեմն $c=b+1$ և $d=c+1$: Ուրեմն

$$c+d=2c+1=105,$$

$$c=52, d=53:$$

$b=c-1=51$, ուրեմն

$$b+c=51+52=103:$$

բ) $a=200-b=200-51=149$:

Արդեն ստացել ենք, որ N-ը վերջանում է 9-ով, այժմ պարզենք, թե քանի՞ հատ 9-ով է այն վերջանում: Ենթադրենք վերջին k թվանշանները 9 են, այդ դեպքում $N+1$ թվի վերջին k հատ թվանշանները 0 են, իսկ դրանց նախորդ թվանշանը մեծացել է 1-ով: Ուստի $a-b=9k-1$, այսինքն $9k-1=149-51=98 \Rightarrow k=11$: Փաստորեն N թվի վերջին 11 հատ թվանշանները 9 են:

Պատասխան՝ ա) 103 բ) 999: