ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

11-12-րդ դասարաններ

Առաջին օր (17 փետրվարի, 2024թ)

1. Դիցուք $d(n)$-ը n բնական թվի բաժանարարների քանակն է՝ ներառյալ 1-ն ու n-ը: Գտե՛ք բոլոր n բնական թվերը, որոնց համար $d(n) = 3$ և $d(n+11) \leq 11$:

Լուծում: $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$ պարզ արտադրիչների վերլուծմամբ թվի համար $d(N) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$:

Փաստորեն $n = p^2$, որտեղ p-ն պարզ թիվ է: Անմիջական ստուգմամբ տեսնում ենք, որ $p = 2$ և $p = 3$ դեպքում ստանում ենք լուծումներ՝ $n = 4$ և $n = 9$: Դիցուք $p > 3$:

Քանի որ $p > 3$ պարզ թիվ է, ուրեմն $n = p^2 \equiv 1(mod\ 4)$ և $n = p^2 \equiv 1(mod\ 3)$: Դա նշանակում է, որ $n^2 + 11$ թիվը բաժանվում 4-ի և 3-ի: Եթե $n^2 + 11$-ը 2-ից և 3-ից բացի ունենա ևս մեկ պարզ բաժանարար, ապա բաժանարարների քանակը կլինի առնվազն $3 \cdot 2 \cdot 2 > 11$: Հետևաբար, միակ հնարավոր տարբերակներն են $n^2 + 11 = 2^m \cdot 3^k$, որտեղ $m \geq 2$, $k \geq 1$ և $(m+1)(k+1) \leq 11$: Ստուգելով այս տեսնում ենք, որ ստացվում է լուծում միայն $m = k = 2$ դեպքում, երբ $n = 25$:

Պատասխան $n = 4$, $n = 9$ և $n = 25$:

2. Տրված $m > 1$ և $n > 1$ բնական թվերի համար $m \times n$ աղյուսակի վանդակներից յուրաքանչյուրում դրված է մեկական մանրադրամ: Բոլոր մանրադրամները գտնվում են «գիր» վիճակում: Յուրաքանչյուր քայլ կազմված է հետևյալ երեք գործողությունից.

   ա) ընտրել աղյուսակի 2×2 չափանի քառակուսի:

   բ) ընտրած քառակուսու վերևի ձախ անկյունի և ներևքի աջ անկյունի մանրադրամ–ները շրջել:

   գ) ընտրած քառակուսու վերևի աջ և ներքևի ձախ մանրադրամներից մեկը շրջել:

   Գտե՛ք (m, n) թվազույգի բոլոր հնարավոր արժեքները, որոնց դեպքում հնարավոր է այնպիսի քայլեր կատարել, որ բոլոր մանրադրամները հայտնվեն «դուշ» դիրքում:

Լուծում: Նախ ցույց տանք, որ եթե $m \cdot n$ արտահայտության արժեքը չի բաժանվում 3-ի, ապա բոլոր մանրադրամների դիրքը փոխել հնարավոր չէ: Աղյուսակի վանդակները համարակալենք համաձայն նկարի՝

0	1	2	0	1	···
1	2	0	1	2	···
2	0	1	2	0	···
0	1	2	0	1	···
1	2	0	1	2	···
···	···	···	···	···	···

Սկզբում յուրաքանչյուր թվին համապատասխանող վանդակների վրա կա 0 «դուշ» դիրքով մանրադրամ: Յուրաքանչյուր քայլի փոխվում ամեն թվին համապատասխանող մեկական մանրադրամի դիրք: Ուստի կարող ենք պնդել, որ ամեն թվին համապատաս–խանող «դուշ» դիրքով մանրադրամներն ունեն նույն զույգությունը: Եթե m և n թվերից ոչ մեկը չի բաժանվում 3-ի, ապա 0-ների, 1-երի և 2-ների քանակներն ունեն փարբեր զույգություն: Իսկապես, երբ

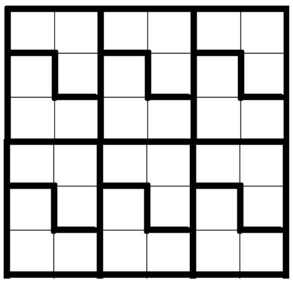
m և n թվերը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ, ապա 0-ների քանակը մեկով ավելի է 1-երի քանակից:

m և n թվերը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ, ապա 0-ների քանակը մեկով պակաս է 1-երի քանակից:

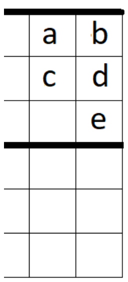
m և n թվերից մեկը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ, իսկ մյուսը՝ 2 մնացորդ, ապա 0-ների քանակը մեկով ավելի է 2-երի քանակից:

Այժմ ապացուցենք, որ եթե $m{\cdot}n$ բաժանվում է 3-ի ապա հնարավոր է բոլոր մանրադրամ–ները փոխել «զուշ» դիրքի: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ տողերի քանակը բաժանվում է 3-ի՝ $m = 3k$: Դիտարկենք երկու դեպք:

ԴԵՊՔ 1. n-ը զույգ է: Այդ դեպքում ուղղանկյունը բաժանենք համաձայն նկարի: Յուրաքանչյուր քայլի հնարավոր է փոխել մի մասի բոլոր մանրադրամների դիրքը:



ԴԵՊՔ 2. n-ը կենտ է: Այդ դեպքում նախորդ դեպքի քայլերը կրկնելով կհասնենք նրան, որ բացի վերջին սյունակից, մնացած բոլոր մանրադրամները կլինեն «դուշ» դիրքով: Վերջին սյունակի մանրադրամների դիրքերը կփոխենք եռյակներով: Կիրառելով քայլը (a, b, d), (a, c, d) և (c, d, e) եռյակների համար արդյունքում a և c մանրադրամների դիրքը չի փոխվի, իսկ b, d, e մանրադրամներինը՝ կփոխվի:



3. Դիցուք O կենտրոնով շրջանագիծը BAC անկյան կողմերը շոշափում է B և C կետերում: Դիցուք BAC անկյան ներսում նշել են Q կետը, իսկ AQ հատվածի վրա P կետն այնպես, որ AQ և OP ուղիղները փոխուղղահայաց են: Դիցուք OP ուղիղը BPQ և CPQ եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերը հատում է համապատասխանաբար M և N կետերում: Ապացուցե՛ք, որ $OM = ON$:

Լուծում: Դիցուք BPQ և CPQ եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերը AB և AC ճառագայթները հատում են համապատասխանաբար D և E կետերում: Քանի, որ $AB \cdot AD = AP \cdot AQ = AC \cdot AE$, հետևաբար $AD = AE$: Դիցուք AO-ն DE-ն հատում է K կետում: Քանի, որ $\angle ABO = \angle ACO = \angle APO = 90^o$, հետևաբար A, B, C, P, O կետերով անցնում է AO տրամագծով շրջանագիծ: Քանի, որ $\angle PQD = \angle ABP = \angle PCE = 180^o - \angle PQE$, հետևաբար D, Q, E կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Քանի, $OK \perp DE$, $MD \perp DE$, $NE \perp DE$ և $DK = KE$,հետևաբար $OM = ON$:

Աշխատաժամանակը 4 ժամ

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր