ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

8-րդ դասարան

Առաջին օր (17 փետրվարի, 2024թ)

1. Դիցուք $d(n)$-ը n բնական թվի բաժանարարների քանակն է՝ ներառյալ 1-ն ու n-ը: Գտե՛ք բոլոր n բնական թվերը, որոնց համար $d(n) = d(n+48) = 3$:

Լուծում: Փաստորեն n բնական թիվը 1-ից և n-ից բացի ունի ևս մեկ բաժանարար: Նշանակենք այն x: Քանի որ $\frac{n}{x}$ թիվը նույնպես n-ի բաժանարար է, ուրեմն $x = \frac{n}{x}$: Այստեղից ստանում ենք, որ $n = x^2$: Նկատենք նաև, որ x-ը պարզ թիվ է, այլապես x-ը կունենա իրենից փոքր պարզ բաժանարար, որն իր հերթին կլինի n-ի բաժանարար:

Այսպիսով $n = p^2$ և $n + 48 = q^2$, որտեղ p և q պարզ թվեր են: Ուրեմն

$$q^2 = p^2 + 48,$$

$$(q-p)(q+p) = 48 :$$

$q-p$ և $q+p$ թվերը կամ միաժամանակ զույգ են, կամ էլ միաժամանակ կենտ: Քանի որ արտադրյալը զույգ է, ուրեմն երկու արտադրիչներն էլ զույգ են: 48-ը զույգ արտադրիչների վերլուծվում է երեք եղանակով՝ 2·24, 4·12, 6·8: Այս դեպքերը դիտարկենք առանձին-առան–ձին:

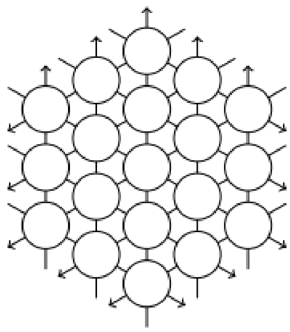
1) $q-p=2, q+p=24$ համակարգից ստացվում է $q = 13$, $p = 11$: Այն բավարարում է խնդրի պայմաններին: $n = p^2 = 121$:

2) $q-p=4, q+p=12$ համակարգից ստացվում է $q = 8$, $p = 4$: Այս թվազույգը չի բավարարում խնդրի պայմաններին, քանի որ պարզ թվեր չեն:

3) $q-p=6, q+p=8$ համակարգից ստացվում է $q = 7$, $p = 1$: Այս թվազույգը չի բավարարում խնդրի պայմաններին, քանի որ 1-ը պարզ թիվ չէ:

Պատասխան՝ $n = 121$:

2. Հնարավո՞ր է արդյոք 11-ից մինչև 29 բնական թվերը դասավորել շրջանագծերում (յուրաքանչյուր թիվ միայն մեկ վանդակում) այնպես, որ 15 սլաքներից յուրաքանչյուրի վրա գրված թվերի գումարը լինի նույնը:

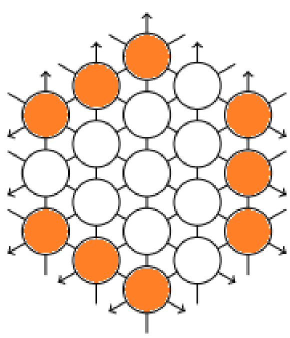


Լուծում: Ենթադրենք, որ այդպիսի դասավորություն գոյություն ունի: Յուրաքանչյուր սլաքի վրա գրված թվերի գումարը նշանակենք N: Միևնույն ուղղությամբ 5 սլաքների վրա գրված են 11-ից մինչև 29 բոլոր բնական թվերը: Ուրեմն

$$5N = 11 + 12 + \ldots + 29,$$

$$N = \frac{380}{5} = 76 :$$

Ըստ խնդրի պայմանի նկարում պատկերված նարնջագույն վանդակներում գրված թվերի գումարը $3N = 228$ է: Մյուս կողմից այդ շրջանագծերում գրված թվերի գումարը չի կարող գերազանցել $29 + 28 + 27 + 26 + 25 + 24 + 23 + 22 + 21 = 225$-ը: Ստացանք հակասություն: Այդպիսի դասավորություն գոյություն չունի:



3. Դիցուք H-ը ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է, իսկ N-ը՝ AM միջնագծի և BHC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի հատման կետն է: Ապացուցեք, որ $\angle MNH = 90^o$:

Լուծում: AM հատվածը շարունակենք իր երկարության չափով և A կետի համաչափը M կետի նկատմամբ նշանակենք P-ով: Կստանանք $ABPC$ զուգահեռագիծը: Քանի որ BH-ն ուղղահայաց է զուգահեռագծի AC կողմին, ապա ուղղահայաց կլինի նաև BP կողմին: Ուրեմն, $\angle HBP = 90^o$: Նույն կերպ $\angle HCP = 90^o$: Քանի որ $\angle HBP + \angle HCP = 180^o$, ուրեմն B, H, C, P կետերը գտնվում են PH տրամագծով շրջանագծի վրա: Ուրեմն $\angle MNH = \angle PNH = \angle PCH = 90^o$: