ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

9-րդ դասարան

Առաջին օր (17 փետրվարի, 2024թ)

1. Դիցուք $d(n)$-ը n բնական թվի բաժանարարների քանակն է՝ ներառյալ 1-ն ու n-ը: Գտե՛ք բոլոր n բնական թվերը, որոնց համար $d(n) = 3$ և $d(n + 65) = 4$:

Լուծում: $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$ պարզ արտադրիչների վերլուծմամբ թվի համար $d(N) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$:

Փաստորեն $n = p^2$, որտեղ p-ն պարզ թիվ է, իսկ $n + 65$-ը կամ պարզ թվի խորանարդ է, կամ էլ երկու պարզ թվերի արտադրյալ: Անմիջական ստուգմամբ տեսնում ենք, որ $p = 2$ և $p = 3$ դեպքում ստանում ենք լուծումներ՝ $n = 4$ և $n = 9$: Ապացուցենք, որ այլ լուծում չկա:

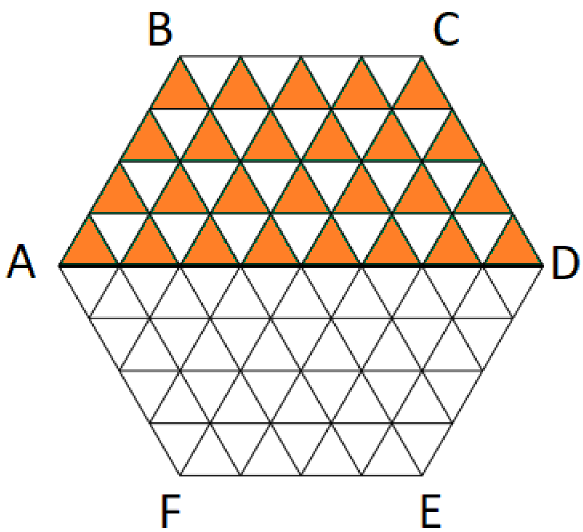
ԴԵՊՔ 1. $n = p^2, n + 65 = q^3$, որտեղ $p > 3, q$ պարզ թվեր են: Այս դեպքում p-ն կենտ է, ինչը նշանակում է, որ կենտ է n-ը: Ուրեմն $n + 65$ թիվը զույգ է և հանդիսանում է պարզ թվի խորանարդ: Միակ հնարավոր տարբերակն է $q = 2$, որը չի բավարարում:

ԴԵՊՔ 2. $n = p^2, n + 65 = q \cdot r$, որտեղ $p > 3, q, r$ պարզ թվեր են: Ինչպես և նախորդ դեպքում $n + 65$-ը զույգ է, այսինքն $q = 2$: Քանի որ p-ն չի բաժանվում 3-ի, ուրեմն $n = p^2$ թիվը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ: Դա նշանակում է, որ $n+65$ թիվը բաժանվում է 3-ի: Փաստորեն $r = 3$ և $n + 65 = 2 \cdot 3$, ինչն անհնար է:

Պատասխան $n = 4$ և $n = 9$:

2. Դիցուք n կողմի երկարությամբ $ABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյունը տրոհված է 1 կողմի երկարությամբ և 60^o սուր անկյամբ շեղանկյունների: Ապացուցե՛ք, որ շեղանկյուն–ներից n հատը AD անկյունագծով բաժանվում է երկու մասի:

   Լուծում: Վեցանկյունը տրոհենք 1 կողմով հավասարակողմ եռանկյունների: Վեցանկյան վերևի կեսի եռանկյունները ներկենք համաձայն նկարի: Կանաչ գույնի եռանկյունները n-ով ավելի են սպիտակ եռանկյուններից: Յուրաքանչյուր շեղանկյուն կազմելիս օգտա–գործվում են մեկական կանաչ և սպիտակ եռանկյուններ: Ուրեմն, կանաչ եռանկյուններից n-ը օգտագործվելու են AD անկյունագծից ներքև գտնվող եռանկյունների հետ: Այդ իսկ պատճառով AD անկյունագիծը n շեղանկյուն կիսելու է երկու մասի:



3. Դիցուք H-ը ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է: Դիցուք A, B, H կետերով անցնող և R կենտրոնով ω շրջանագիծը BC հատվածը հատում է D ($D \neq B$) կետում: Դիցուք P-ն DH ուղղի և AC հատվածի հատման կետն է, իսկ Q-ն ADP եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցե՛ք, որ B, D, Q, R կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:

Լուծում: Q և R կետերը գտնվում են AD հատվածի միջնուղղահայացի վրա: Նշանակենք $\angle DRB = 2\alpha$: Այդ դեպքում $\angle RBD = 90^o - \alpha$ և $\angle DAB = \angle DHB = \angle EHP = \alpha$: Հետևաբար $\angle EPH = 90^o - \alpha$: Ուրեմն $\angle APH = 90^o + \alpha$, ուստի $\cup APD = 360^o – (180^o + 2\alpha) = 180^o - 2\alpha$: Ուրեմն $\angle KQD = 90^o - \alpha$: Ստացվեց, որ $\angle KQD = \angle DRB = 90^o - \alpha$, հետևաբար Q, D, R, B կետերով անցնում է շրջանագիծ:

	a	b
	c	d
		e