Տևողությունը – 180 րոպե

1. Գտե՛ք բոլոր a իրական թվերը, որոնց համար ցանկացած n բնական թվի համար $a(n^5+4n)$ արտահայտության արժեքը ամբողջ թիվ է:

Լուծում: Նշանակենք $P(n)=a(n^5+4n)$: Քանի, որ $P(1)=5a$ ամբողջ թիվ է, ուրեմն $a=\frac{k}{5}$, որևէ k ամբողջ թվի համար: Ապացուցենք, որ այդ տեսքի բոլոր թվերը բավարարում են խնդրի պահանջին: Դրա համար պետք է ցույց տալ,

$$a(n^5+4n)=\frac{k(n^5+4n)}{5}=\frac{kn(n^4+4)}{3}$$

արտահայտության արժեքը կամայական n բնական թվի դեպքում կլինի ամբողջ թիվ: Դրա համար բավական է ապացուցել, որ $n(n^4+4)$ արտահայտության արժեքը բաժանվում է 5-ի: Եթե n-ը չի բաժանվում 5-ի, ապա n^4-ն 5-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 1, ուստի n^4+4-ը կբաժանվի 5-ի:

2. N բնական թիվը կոչվում է ներկայացվող, եթե այն հնարավոր է ներկայացնել

$$N=\left[\frac{1}{a}\right]+\left[\frac{1}{b}\right]+\left[\frac{1}{c}\right]$$

տեսքով, որտեղ a, b և c թվերը դրական են և $a+b+c=1$: Գտե՛ք բոլոր ներկայացվող թվերը:

Լուծում: Դիցուք $a\le b\le c$: Այդ դեպքում $1=a+b+c\ge 3a$, որտեղից $\frac{1}{a}\ge 3$: Քանի որ $\frac{1}{b}>1$ և $\frac{1}{c}>1$ ուստի $N\ge 5$:

Երբ $N=5$, ապա $\left[\frac{1}{a}\right]=3, \left[\frac{1}{c}\right]=\left[\frac{1}{b}\right]=1$, որտեղից $\frac{1}{b}<2$ և $\frac{1}{c}<2$, այսինքն $b>1/2$, $c>\frac{1}{2}$:
Ստացանք, որ $a+b+c>1$, ինչն անհնար է: Ուրեմն 5-ը ներկայացվող թիվ չէ:

Երբ $N=6$, ապա կամ

$\left[\frac{1}{a}\right]=3, \left[\frac{1}{b}\right]=2, \left[\frac{1}{c}\right]=1$, որտեղից $\frac{1}{4}<\frac{1}{a}<\frac{1}{3}, \frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<\frac{1}{c}<1$ հետևաբար $a+b+c>1$,

կամ

$\left[\frac{1}{a}\right]=4, \left[\frac{1}{b}\right]=1, \left[\frac{1}{c}\right]=1$, որտեղից $b>\frac{1}{2}, c>\frac{1}{2}$ այսինքն $a+b+c>1$:

Ուրեմն 6-ը նույնպես ներկայացվող թիվ չէ:

Երբ $N=7$, $a=\frac{8}{30}, c=b=\frac{11}{30}$ թվերը բավարարում են խնդրի պայմաններին:

Երբ $N \geq 8$, վերցնենք $a=\dfrac{1}{k}, c=b=\dfrac{k-1}{2k}$, որտեղ $k = N-4 \geq 4$: Այդ դեպքում

$$\left[\frac{1}{a}\right]+\left[\frac{1}{b}\right]+\left[\frac{1}{c}\right]=k+2\left[2+\frac{2}{k-1}\right]=k+4,$$

հետևաբար N-ը յուրահատուկ է:

Պատասխան՝ $N \geq 7$ բնական թվերը:

3. Բնական թվի կտոր կանվանենք նրա գրառման մեկ կամ մի քանի հաջորդական թվանշաններով կազմված թիվը: Օրինակ, 8745 թվի կտորներն են 8, 7, 4, 5, 87, 74, 45, 874, 745, 8745 թվերը: Բնական թիվը **յուրահատուկ** է, եթե նրա կտորներից ոչ մեկը չի բաժանվում 9-ի (8745-ը յուրահատուկ չէ, քանի որ 45-ը բաժանվում է 9-ի): Գտե՛ք բոլոր (m,n) իրարից տարբեր բնական թվերի թվազույգերը, որոնց համար m-անիշ և n-անիշ յուրահատուկ թվերի քանակները հավասար են:

Լուծում: Դիցուք $a_1a_2 \dots a_k$ թիվը յուրահատուկ է: Դիտարկենք

$A_1=a_1$,

$A_2=a_1+a_2$,

$A_3=a_1+a_2+a_3$,

....

$A_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$

թվերը: Եթե A_1, A_2, ..., A_k թվերից մեկնումեկը բաժանվի 9-ի, ապա թիվը յուրահատուկ չի լինի: Եթե A_1, A_2, ..., A_k թվերից որևէ երկուսը 9-ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը, ապա թիվը հետաքրքիր չէ: Իսկապես, եթե A_i և A_j թվերը $(i<j)$ 9-ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը, ուրեմն

$$A_j-A_i=a_{i+1}+\cdots+a_j$$

թիվը կբաժանվի 9-ի, ուստի $a_{i+1}a_{i+2}\dots a_j$ թիվը կբաժանվի 9-ի, ինչը հակասում է թվի յուրահատուկ լինելու պայմանին:

Ստացանք, որ A_1, A_2, ..., A_k թվերը 9-ի բաժանելիս տալիս են տարբեր մնացորդներ, ընդ որում 0 մնացորդ չի ստացվում: Քանի որ այդպիսի մնացորդների ընդհանուր քանակը 8 է, ուրեմն $k \leq 8$, այսինքն թիվը չի կարող ունենալ 8-ից ավելի թվանշան:

Այժմ հաշվենք $k \leq 8$ թվանշան ունեցող յուրահատուկ թվերի քանակը: Դրա համար պետք է այնպես անել, որ $A_1, A_2, \dots, A_k$ թվերը 9-ի բաժանելիս տան տարբեր մնացորդներ: A_1-ը կարող ենք ընտրել 8 եղանակով, A_2-ը՝ 7, և այդպես շարունակ: Նկատենք, որ A_i և A_{i+1}-ի 9-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդով հնարավոր է միարժեքորեն վերականգնել a_{i+1}-ը:

k-անիշ յուրահատուկ թվերի քանանկը

$8 \cdot 7 \cdot .. (8-k+1)$ է, երբ $k \leq 8$

և 0 է, երբ $k \geq 9$:

Նկատենք, որ 7-անիշ և 8-անիշ յուրահատուկ թվերի քանակը հավասար է: Նաև, 8-ից ավելի թվանշան ունեցող յուրահատուկ թվեր չկան:

Պատասխան՝ $(7,8)$ և (m,n), որտեղ $m,n \geq 9$, $m \neq n$:

4. Դիցուք B և C կետերով անցնող շրջանագիծը ABC եռանկյան AB և AC կողմերը հատում է համապատասխանաբար D և E կետերում: Դիցուք ADC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը BE հատվածը հատում է F կետում, իսկ ABE եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը CD հատվածը հատում է G կետում: BG և CF հատվածները հատվում են S կետում: Ապացուցե՛ք, որ FG և AS ուղիղները փոխուղղահայաց են:

Լուծում: Քանի, որ $\angle AFC = \angle ADC = \angle AEF$, հետևաբար $\Delta AEF \sim \Delta AFC$: Ուրեմն

$$AF^2 = AE \cdot AC:$$

Նույն կերպ $AG^2 = AD \cdot AB$:

B, D, E, C կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $AF^2 = AE \cdot AC = AD \cdot AB = AG^2$:

Քանի, որ $AF = AG, \angle AFS = \angle AGS$ և AS ընդհանուր է հետևաբար $\Delta AFS = \Delta ASG$: Ուրեմն $\angle FAS = \angle SAG$, հետևաբար $AS \perp FG$: