Մաթեմատիկա - մարզային փուլ, **8-րդ դասարան**

Լուծումներ

1. Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ իրարից տարբեր x և y բնական թվեր, որոնց համար $x^3+y^3-x^2y-y^2x$ արտահայտության արժեքը բնական թվի քառակուսի է:

   Լուծում:

   $x^3+y^3-x^2y-y^2x = (x-y)(x^2-y^2)$ **2 միավոր**

   $x^3+y^3-x^2y-y^2x = (x-y)^2\cdot(x+y)$: **+1 միավոր**

   x-ի և y-ի ընտրություն **+4 միավոր**

2. Բնական թվի կտոր կանվանենք նրա գրառման մեկ կամ մի քանի հաջորդական թվանշաններով կազմված թիվը: Օրինակ, 8748 թվի կտորներն են 8, 7, 4, 87, 74, 48, 874, 748, 8748 թվերը: Բնական թիվը **յուրահատուկ** է, եթե նրա կտորներից ոչ մեկը չի բաժանվում 3-ի (8748-ը յուրահատուկ չէ, քանի որ 87-ը բաժանվում է 3-ի): Գտե՛ք յուրահատուկ թվերի քանակը:

   Լուծում:

   Թվանշանը չի կարող բաժանվել 3-ի: **1 միավոր**

   Բոլոր թվանշանները 3-ի բաժանելիս նույն մնացորդն ունեն **+2 միավոր**

   Երեք և ավելի թվանշան ունեցող չկա **+1 միավոր**

   Միանիշների քանակը **+1 միավոր**

   Երկնիշների քանանկը **+2 միավոր**

3. Դիցուք ABC եռանկյանը ներգծած I կենտրոնով շրջանագիծը AC կողմը շոշափում է K կետում: Դիցուք E և F կետերը I կետի համաչափ կետերն են համապատասխանաբար AB և BC կողմերի նկատմամբ: IK ուղղի վրա գտնվող X կետից ($X\neq I$) տարված են AIE եռանկյանն արտագծած շրջանագծի XM շոշափողը և CIF եռանկյանն արտագծած շրջանագծի XN-ը շոշափողը: Ապացուցե՛ք, որ $XM=XN$:

   Լուծում: $\angle IAC=\angle IAB=\angle BAE=\alpha$, **1 միավոր**

   $\angle AEI=\angle AIK=90-\alpha$: **+1 միավոր**

   Հետևաբար IK ուղիղը շոշափում է AIE եռանկյանն արտագծած շրջանագծը I կետում:

   +2 միավոր

   Նմանապես IK ուղիղը շոշափում է CIF եռանկյանն արտագծած շրջանագծը I կետում, որտեղից՝ $XM=XI=XN$: **+1 միավոր**

   Ավարտել **+2 միավոր**

Լուծումներ

4. 10×10 չափի վանդակավոր աղյուսակի յուրաքանչյուր վանդակում գրված է 1-ից 9 թվանշաններից որևէ մեկը: Հայտնի է, որ տողերից յուրաքանչյուրում գրված 10-անիշ թիվը բաժանվում է 11-ի և գոյություն ունի սյունակ, որում գրված 10-անիշ թիվը չի բաժանվում 11-ի: Գտե՛ք սյունակների առավելագույն քանակը, որոնցում գրված 10-անիշ թվերը բաժանվում են 11-ի:

Լուծում: 10×10 չափի վանդակավոր աղյուսակը ներկենք շախմատաձև՝ սև և սպիտակ:

1 միավոր

Քանի, որ յուրաքանչյուր տողում սև և սպիտակ վանդակներում գրված թվերի տարբերությունը բաժանվում է 11-ի (11-ի բաժանելիության հայտանիշ), հետևաբար բոլոր սև վանդակներում գրված թվերի գումարի և բոլոր սպիտակ վանդակներում գրված թվերի գումարի տարբերությունը նույնպես կբաժանվի 11-ի:

+1 միավոր

Եթե 9 սյունակներից յուրաքանչյուրում գրված 10-անիշ թիվը բաժանվի 11-ի, ապա մնացած մեկ սյունակում գրված 10-անիշ թիվը նույնպես կբաժանվի 11-ի, ինչը հակասում է խնդրի պայմանին: Ուստի, սյունակներում գրված 11-ի բաժանվող 10-անիշ թվերի քանակի առավելագույն հնարավոր քանակը 8-ն է: **+2 միավոր**

Օրինակ՝ 8 սյունակի համար

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	3	3

+3 միավոր