Լուծումներ

1. Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ իրարից տարբեր x և y բնական թվեր որոնց համար $x^3+y^3-x^2y-y^2x$ արտահայտության արժեքը բնական թվի 2024-րդ աստիճան է:

Լուծում:

$$x^3+y^3-x^2y-y^2x=x^2(x-y)-y^2(x-y)=$$
$$(x-y)(x^2-y^2)=(x-y)^2\cdot(x+y):$$

$a>b$ բնական թվերի համար ընտրենք x ու y թվերն այնպես, որ տեղի ունենան $x-y=a^{2024}$, $x+y=b^{2024}$ պայմանները, այսինքն

$$x=\frac{a^{2024}+b^{2024}}{2} \text{ և } y=\frac{a^{2024}-b^{2024}}{2}:$$

Այդ դեպքում $(x-y)^2\cdot(x+y)=b^{4048}\cdot a^{2024}=(ab^2)^{2024}$:

2. N բնական թիվը կոչվում է ներկայացվող, եթե այն հնարավոր է ներկայացնել $N=\left[\frac{1}{a}\right]+\left[\frac{1}{b}\right]$ տեսքով, որտեղ a և b թվերը դրական են և $a+b=1$: Գտե՛ք բոլոր ներկայացվող թվերը:

Լուծում: Քանի $0<a<1$, հետևաբար $\frac{1}{a}>1$: Ուրեմն $\left[\frac{1}{a}\right]\geq 1$: Նույն կերպ $\left[\frac{1}{b}\right]\geq 1$, որտեղից՝

$$\left[\frac{1}{a}\right]+\left[\frac{1}{b}\right]\geq 2:$$

Փաստորեն 1-ը ներկայացվող թիվ չէ:

Քանի որ $a+b=1$ ուստի այդ թվերից գոնե մեկը չի գերազանցում $\frac{1}{2}$-ը: Դիցուք $a\leq\frac{1}{2}$: Այդ դեպքում $\frac{1}{a}\geq 2$, ուստի $\left[\frac{1}{a}\right]\geq 2$:

Ստացանք, որ $\left[\frac{1}{a}\right]+\left[\frac{1}{b}\right]\geq 2+1=3$:

Փաստորեն 2-ը նույնպես ներկայացվող չէ:

3-ը ներկայացվող է, քանի որ $\left[\frac{1}{0.4}\right]+\left[\frac{1}{0.6}\right]=2+1=3$:

$n\geq 4$ թվի համար ընտրենք $a=\frac{1}{n-1}$ և $b=\frac{n-2}{n-1}$: Այդ դեպքում $\left[\frac{1}{a}\right]=n-1$ և $\left[\frac{1}{b}\right]=\left[\frac{n-1}{n-2}\right]=1$, ուստի

$$\left[\frac{1}{a}\right]+\left[\frac{1}{b}\right]=(n-1)+1=n:$$

Ստացանք, որ ներկայացվող են $n\geq 3$ բոլոր բնական թվերը:

Պատասխան՝ $n\geq 3$ բնական թվերը:

3. Բնական թվի կտոր կանվանենք նրա գրառման մեկ կամ մի քանի հաջորդական թվանշաններով կազմված թիվը: Օրինակ, 8748 թվի կտորներն են 8, 7, 4, 87, 74, 48, 874, 748, 8748 թվերը:

Լուծումներ

Բնական թիվը **յուրահատուկ** է, եթե նրա կտորներից ոչ մեկը չի բաժանվում 9-ի (8745-ը յուրահատուկ չէ, քանի որ 45-ը բաժանվում է 9-ի): Գտե՛ք ամենամեծ յուրահատուկ թիվը:

Լուծում: Դիցուք $a_1a_2 \dots a_k$ թիվը յուրահատուկ է: Դիտարկենք

$A_1 = a_1,$

$A_2 = a_1 + a_2,$

$A_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

....

$A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$

թվերը: Եթե $A_1, A_2, \dots, A_k$ թվերից մեկնումեկը բաժանվի 9-ի, ապա թիվը յուրահատուկ չի լինի: Եթե $A_1, A_2, \dots, A_k$ թվերից որևէ երկուսը 9-ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը, ապա թիվը հետաքրքիր չէ: Իսկապես, եթե A_i և A_j թվերը ($i < j$) 9-ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը, ուրեմն

$$A_j - A_i = a_{i+1} + \cdots + a_j$$

թիվը կբաժանվի 9-ի, ուստի $a_{i+1}a_{i+2} \dots a_j$ թիվը կբաժանվի 9-ի, ինչը հակասում է թվի յուրահատուկ լինելու պայմանին:

Ստացանք, որ $A_1, A_2, \dots, A_k$ թվերը 9-ի բաժանելիս տալիս են տարբեր մնացորդներ, ընդ որում 0 մնացորդ չի ստացվում: Քանի որ այդպիսի մնացորդների ընդհանուր քանակը 8 է, ուրեմն $k \le 8$, այսինքն թիվը չի կարող ունենալ 8-ից ավելի թվանշան: 8-անիշ թվերից ամենամեծը, որը չի պարունակում 9 թվանշանը 88 888 888 թիվն է, որն էլ բավարարում է խնդրի պայմանին:

Պատասխան՝ 88 888 888:

4. Դիցուք BE-ն և CD-ն ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են: Դիցուք ADC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը BE հատվածը հատում է F կետում, իսկ ABE եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը CD հատվածը հատում է G կետում: Դիցուք BG և CF հատվածները հատվում են S կետում: Ապացուցե՛ք, որ FG և AS ուղիղները փոխուղղահայաց են:

Լուծում: Քանի, որ $\angle AFC = \angle ADC = 90^o$ հետևաբար $AF^2 = AE \cdot AC$: Նմանապես $AG^2 = AD \cdot AB$:

B, D, E, C կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $AF^2 = AE \cdot AC = AD \cdot AB = AG^2$:

Քանի, որ $AF = AG$, $\angle AFS = \angle AGS$ և AS-ն ընդհանուր է, հետևաբար AFS և ASG եռանկյունները հավասար են: Այդտեղից հետևում է, որ $\angle FAS = \angle SAG$: Ուրեմն $AS \perp FG$: