Տևողությունը – 180 րոպե

1. Գտե՛ք բոլոր a իրական թվերը, որոնց համար ցանկացած n բնական թվի համար

$$a(n^3+2n)$$

արտահայտության արժեքը ամբողջ թիվ է:

Լուծում: Նշանակենք $P(n)=a(n^3+2n)$: Քանի, որ $P(1)=3a$ ամբողջ թիվ է, ուրեմն $a=\frac{k}{3}$, որևէ k ամբողջ թվի համար: Ապացուցենք, որ այդ տեսքի բոլոր թվերը բավարարում են խնդրի պահանջին: Դրա համար պետք է ցույց տալ,

$$a(n^3+2n)=\frac{k(n^3+2n)}{3}=\frac{kn(n^2+2)}{3}$$

արտահայտության արժեքը կամայական n բնական թվի դեպքում կլինի ամբողջ թիվ: Դրա համար բավական է ապացուցել, որ $n(n^2+2)$ արտահայտության արժեքը բաժանվում է 3-ի: Եթե n-ը չի բաժանվում 3-ի, ապա n^2-ն 3-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 1, ուստի n^2+2-ը կբաժանվի 3-ի:

Պատասխան՝ $\frac{k}{3}$ տեսքի թվերը, որտեղ k-ն ամբողջ թիվ է:

2. N բնական թիվը կոչվում է ներկայացվող, եթե այն հնարավոր է ներկայացնել

$$N=\left[\frac{1}{a}\right]+\left[\frac{1}{b}\right]+\left[\frac{1}{c}\right]$$

տեսքով, որտեղ a, b և c թվերը դրական են և $a+b+c=1$: Գտե՛ք ամենափոքր ներկայացվող թիվը:

Լուծում: Դիցուք $a\le b\le c$: Այդ դեպքում $1=a+b+c\ge 3a$, որտեղից $\frac{1}{a}\ge 3$: Քանի որ $\frac{1}{b}>1$ և $\frac{1}{c}>1$ ուստի $N\ge 5$:

Երբ $N=5$, ապա $\left[\frac{1}{a}\right]=3, \left[\frac{1}{c}\right]=\left[\frac{1}{b}\right]=1$, որտեղից $\frac{1}{b}<2$ և $\frac{1}{c}<2$, այսինքն $b>1/2, c>\frac{1}{2}$: Ստացանք, որ $a+b+c>1$, ինչն անհնար է: Ուրեմն 5-ը ներկայացվող թիվ չէ:

Երբ $N=6$, ապա կամ

$\left[\frac{1}{a}\right]=3, \left[\frac{1}{b}\right]=2, \left[\frac{1}{c}\right]=1$, որտեղից $\frac{1}{4}<\frac{1}{a}<\frac{1}{3}, \frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<\frac{1}{c}<1$ հետևաբար $a+b+c>1$,

կամ

$\left[\frac{1}{a}\right]=4, \left[\frac{1}{b}\right]=1, \left[\frac{1}{c}\right]=1$, որտեղից $b>\frac{1}{2}$, $c>\frac{1}{2}$ այսինքն $a+b+c>1$:

Ուրեմն 6-ը նույնպես ներկայացվող թիվ չէ:

Տևողությունը – 180 րոպե

Երբ $N=7$, $a=\frac{8}{30}, c=b=\frac{11}{30}$ թվերը բավարարում են խնդրի պայմաններին, հետևաբար փոքրագույն յուրա հատուկ թիվը 7-ն է:

3. Բնական թվի կտոր կանվանենք նրա գրառման մեկ կամ մի քանի հաջորդական թվանշաններով կազմված թիվը: Օրինակ, 8745 թվի կտորներն են 8, 7, 4, 5, 87, 74, 45, 874, 745, 8745 թվերը: Բնական թիվը **յուրահատուկ** է, եթե նրա կտորներից ոչ մեկը չի բաժանվում 9-ի (8745-ը յուրահատուկ չէ, քանի որ 45-ը բաժանվում է 9-ի): Ցանկացած n բնական թվի համար գտե՛ք n-անիշ յուրահատուկ թվերի քանակը:

Լուծում: Դիցուք $a_1a_2 \dots a_k$ թիվը յուրահատուկ է: Դիտարկենք

$A_1 = a_1$,

$A_2 = a_1 + a_2$,

$A_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

....

$A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$

թվերը: Եթե A_1, A_2, ..., A_k թվերից մեկնումեկը բաժանվի 9-ի, ապա թիվը յուրահատուկ չի լինի: Եթե A_1, A_2, ..., A_k թվերից որևէ երկուսը 9-ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը, ապա թիվը հետաքրքիր չէ: Իսկապես, եթե A_i և A_j թվերը ($i<j$) 9-ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը, ուրեմն

$$A_j - A_i = a_{i+1} + \cdots + a_j$$

թիվը կբաժանվի 9-ի, ուստի $a_{i+1}a_{i+2} \dots a_j$ թիվը կբաժանվի 9-ի, ինչը հակասում է թվի յուրահատուկ լինելու պայմանին:

Ստացանք, որ A_1, A_2, ..., A_k թվերը 9-ի բաժանելիս տալիս են տարբեր մնացորդներ, ընդ որում 0 մնացորդ չի ստացվում: Քանի որ այդպիսի մնացորդների ընդհանուր քանակը 8 է, ուրեմն $k \leq 8$, այսինքն թիվը չի կարող ունենալ 8-ից ավելի թվանշան:

Այժմ հաշվենք $k \leq 8$ թվանշան ունեցող յուրահատուկ թվերի քանակը: Դրա համար պետք է այնպես անել, որ $A_1, A_2, \dots, A_k$ թվերը 9-ի բաժանելիս տան տարբեր մնացորդներ: A_1-ը կարող ենք որոշել 8 եղանակով, A_2-ը՝ 7, և այդպես շարունակ: Նկատենք, որ A_i և A_{i+1}-ի 9-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդով հնարավոր է միարժեքորեն վերականգնել a_{i+1}-ը:

k-անիշ յուրահատուկ թվերի քանանկը

$9 \cdot 8 \cdot .. (9-k+1)$ է, երբ $k \leq 8$

և 0 է, երբ $k \geq 9$:

Տևողությունը – 180 րոպե

4. Դիցուք B և C կետերով անցնող շրջանագիծը ABC եռանկյան AB և AC կողմերը հատում է համապատասխանաբար D և E կետերում: Դիցուք ADC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը BE հատվածը հատում է F կետում, իսկ ABE եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը CD հատվածը հատում է G կետում: Դիցուք BG և CF հատվածները հատվում են S կետում: Ապացուցե՛ք, որ $\angle FAS = \angle GAS$:

Լուծում: Քանի, որ $\angle AFC = \angle ADC = \angle AEF$, հետևաբար $\Delta AEF \sim \Delta AFC$, որտեղից ստացվում է, որ $AF^2 = AE \cdot AC$: Նմանապես՝ $AG^2 = AD \cdot AB$:

B, D, E, C կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $AF^2 = AE \cdot AC = AD \cdot AB = AG^2$:

Քանի, որ $AF = AG, \angle AFS = \angle AGS$ և AS ընդհանուր է հետևաբար $\Delta AFS = \Delta ASG$ որտեղից $\angle FAS = \angle SAG$: