Մաթեմատիկա - մարզային փուլ, **8-րդ դասարան**

Լուծումներ

1. Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ իրարից տարբեր x և y բնական թվեր, որոնց համար $x^3+y^3-x^2y-y^2x$ արտահայտության արժեքը բնական թվի քառակուսի է:

   Լուծում:

$$x^3+y^3-x^2y-y^2x=x^2(x-y)-y^2(x-y)=$$
$$(x-y)(x^2-y^2)=(x-y)^2\cdot(x+y):$$

   Ընտրենք x և y թվերն այնպես, որ $x+y$-ը լինի բնական թվի քառակուսի, օրինակ $x=1$, $y=a^2-1$: Այդ դեպքում $x^3+y^3-x^2y-y^2x$ արտահայտության արժեքը կլինի բնական թվի քառակուսի:

2. Բնական թվի կտոր կանվանենք նրա գրառման մեկ կամ մի քանի հաջորդական թվանշաններով կազմված թիվը: Օրինակ, 8748 թվի կտորներն են 8, 7, 4, 87, 74, 48, 874, 748, 8748 թվերը: Բնական թիվը **յուրահատուկ** է, եթե նրա կտորներից ոչ մեկը չի բաժանվում 3-ի (8748-ը յուրահատուկ չէ, քանի որ 87-ը բաժանվում է 3-ի): Գտե՛ք յուրահատուկ թվերի քանակը:

   Լուծում: Նկատենք, որ յուրահատուկ թվի թվանշանը չի կարող բաժանվել 3-ի: Ուստի, յուրահատուկ թվի թվանշանը 3-ի բաժանելիս ստացվելու է 1 կամ 2 մնացորդ: Եթե 1 և 2 մնացորդով թվանշաններ լինեն իրար կողք, ապա նրանցով կազմված թիվը կբաժանվի 3-ի (թվանշանների գումարը կբաժանվի 3-ի):

   Վերևի շարադրածից եզրակացնում ենք, որ յուրահատուկ թվի բոլոր թվանշանները 3-ի բաժանելիս ստացվելու է նույն մնացորդը: Միևնույն մնացորդ տվող երեք թվանշանների գումարը կբաժանվի երեքի, ուստի յուրահատուկ թվի թվանշանների քանակն առավելագույնը երկու է:

   Միանիշ յուրահատուկ թվերը վեցն են՝ $1, 2, 4, 5, 7, 8$:

   Երկնիշ յուրահատուկ թվերը երկու տեսակի են.

- որոնց թվանշանները 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ: Այդ թվերն են $11, 14, 17, 41, 44, 47, 71, 74, 77$:
- որոնց թվանշանները 3-ի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ: Այդ թվերն են $22, 25, 28, 52, 55, 58, 82, 85, 88$:

   Ստացվեց ընդհանուր 24 թիվ:

Լուծումներ

3. Դիցուք ABC եռանկյանը ներգծած I կենտրոնով շրջանագիծը AC կողմը շոշափում է K կետում: Դիցուք E և F կետերը I կետի համաչափ կետերն են համապատասխանաբար AB և BC կողմերի նկատմամբ: IK ուղղի վրա գտնվող X կետից ($X \neq I$) տարված են AIE եռանկյանն արտագծած շրջանագծի XM շոշափողը և CIF եռանկյանն արտագծած շրջանագծի XN-ը շոշափողը: Ապացուցե՛ք, որ $XM = XN$:

   Լուծում: $\angle IAM = \angle IAB = \angle BAE = \alpha$, որտեղից $\angle AEI = \angle AIK = 90 - \alpha$: Հետևաբար IK ուղիղը շոշափում է AIE եռանկյանն արտագծած շրջանագծը I կետում: Նմանապես IK ուղիղը շոշափում է CIF եռանկյանն արտագծած շրջանագծը I կետում, որտեղից՝ $XM = XI = XN$:

4. 10×10 չափի վանդակավոր աղյուսակի յուրաքանչյուր վանդակում գրված է 1-ից 9 թվանշաններից որևէ մեկը: Հայտնի է, որ տողերից յուրաքանչյուրում գրված 10-անիշ թիվը բաժանվում է 11-ի և գոյություն ունի սյունակ, որում գրված 10-անիշ թիվը չի բաժանվում 11-ի: Գտե՛ք սյունակների առավելագույն քանակը, որոնցում գրված 10-անիշ թվերը բաժանվում են 11-ի:

   Լուծում: 10×10 չափի վանդակավոր աղյուսակը ներկենք շախմատաձև՝ սև և սպիտակ: Քանի, որ յուրաքանչյուր տողում սև և սպիտակ վանդակներում գրված թվերի տարբերությունը բաժանվում է 11-ի (11-ի բաժանելիության հայտանիշ), հետևաբար բոլոր սև վանդակներում գրված թվերի գումարի և բոլոր սպիտակ վանդակներում գրված թվերի գումարի տարբերությունը նույնպես կբաժանվի 11-ի: Եթե 9 սյունակներից յուրաքանչյուրում գրված 10-անիշ թիվը բաժանվի 11-ի, ապա մնացած մեկ սյունակում գրված 10-անիշ թիվը նույնպես կբաժանվի 11-ի, ինչը հակասում է խնդրի պայմանին: Ուստի, սյունակներում գրված 11-ի բաժանվող 10-անիշ թվերի քանակի առավելագույն հնարավոր քանակը 8-ն է:

   Օրինակ՝ 8 սյունակի համար

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Լուծումներ

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	3	3