ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 10-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ
ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ՓՈՒԼ 2023-2024 թ

Տևողությունը – 2 ժամ 30 րոպե

ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ և ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

1. Հայտնի է, որ $x+3y=10$, $xy=7$: Գտնել x^2+9y^2 արտահայտության արժեքը:
   1) 100 2) 58 3) 142 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Ունենք՝ $x^2+6xy+9y^2=100$, որտեղից՝ $x^2+9y^2=58$:

Պատ. 2) 58

2. Հայտնի է, որ $x^2+2xy=3y^2$, որտեղ x, y-ը իրարից տարբեր իրական թվեր են: Հաշվել $\frac{x+2y}{x-y}$ արտահայտության արժեքը:
   1) 5 2) 3 3) 2,5 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Ունենք՝ $x^2+2xy+y^2=4y^2$, $(x+y)^2=(2y)^2$, որտեղից կստանանք՝ $x+y=2y$ կամ $x+y=-2y$: Այսինքն՝ $x=y$ կամ $x=-3y$: Քանի որ x-ը և y-ը իրարից տարբեր են, ապա $x=-3y$: Այսպիսով՝ $\frac{x+2y}{x-y}=\frac{-3y+2y}{-3y-y}=\frac{1}{4}$:

Պատ. 4) այլ պատասխան

3. Գտնել $(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-10)\leq 0$ անհավասարման այն բոլոր լուծումների քանակը, որոնք ունեն $n+\frac{1}{2}$ տեսքը, որտեղ n-ը ամբողջ թիվ է:
   1) 5 2) 6 3) 10 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Միջակայքերի մեթոդով ստանում ենք՝ $x\in[1;2]\cup[3;4]\cup[5;6]\cup[7;8]\cup[9;10]$: Հետևաբար $n+\frac{1}{2}$ լուծումներն են՝ $\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}, \frac{19}{2}$:

Պատ. 1) 5

4. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 4 տղայի և 3 աղջկա շարք կանգնեցնել այնպես, որ ցանկացած երկու աղջիկ կողք-կողքի չլինեն:
   1) 1440 2) 60 3) 144 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Տղաներին կարող ենք դասավորել 4! եղանակով: Առաջին աղջիկը կարող է կանգնել 5 տեղերից մեկում, երկրորդը՝ 4, երրորդը՝ 3: Պատասխանը կլինի $4!\cdot 5\cdot 4\cdot 3=1440$:

Պատ. 1) 1440

5. Գտնել 50-ը չգերազանցող այն բնական թվերի քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի ճիշտ 4 հատ բնական բաժանարար:
   1) 2 2) 13 3) 17 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Նշենք, որ ճիշտ 4 հատ բնական բաժանարար ունեցող թվերն ունեն p^3 կամ pq տեսքը, որտեղ p-ն ու q-ն իրարից տարբեր պարզ թվեր են: 50-ը չգերազանցող p^3 տեսքի թվերն են 8-ը և 27-ը: 50-ը չգերազանցող pq տեսքի թվերն են $2\cdot 3$, $2\cdot 5$, $2\cdot 7$, $2\cdot 11$, $2\cdot 13$, $2\cdot 17$, $2\cdot 19$, $2\cdot 23$, $3\cdot 5$, $3\cdot 7$, $3\cdot 11$, $3\cdot 13$, $5\cdot 7$: Ստացվեց, որ այդ թվերի քանակը 15 է:

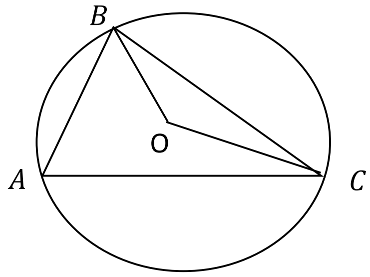
Պատ. 4) այլ պատասխան

6. Դիցուք a-ն այնպիսի թիվ է, որի համար $P(x)=x^3+(a^2-a)x+2$ բազմանդամը $x-1$-ի բաժանելիս տալիս է 5 մնացորդ: Գտնել a-ի բոլոր հնարավոր արժեքների արտադրյալը:
   1) 2 2) -2 3) -1 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Ըստ Բեզուի թեորեմի՝ $P(1)=5$:
   Հետևաբար՝ $1+(a^2-a)+2=5$, որտեղից՝ $a^2-a=2$:
   Այսպիսով, $a=2$ կամ $a=-1$: Հետևաբար պատասխանը -2 է:

Պատ. 2) -2

7. ABC եռանկյանն արտագծած է O կենտրոնով շրջանագիծ: Գտնել OBC անկյան աստիճանային չափը, եթե հայտնի է, որ $\angle BAC = 58°$:



1) 64° 2) 32° 3) 58° 4) այլ պատասխան

Լուծում: Ունենք՝ $\overset{\frown}{BC} = 116°$, հետևաբար՝ $\angle BOC = 116°$: Քանի որ $BO = OC$, ապա $\angle OBC = \angle OCB = \frac{180° - 116°}{2} = 32°$:

Պատ. 2) 32°

8. 3 մ և 4 մ շառավիղներով երկու շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը 5 մ է: Քանի՞ մետր է այդ շրջանագծերի ընդհանուր լարի երկարությունը:

1) 2,4 2) 2,5 3) 4,8 4) այլ պատասխան

Լուծում: Դիցուք O_1 և O_2 շրջանագծերի կենտրոններն են, իսկ AB-ն այդ շրջանագծերի ընդհանուր լարն է: H-ով նշանակենք O_1O_2 և AB ուղիղների հատման կետը: Ունենք, որ $AB \perp O_1O_2$ և $AB = 2AH$: Նկատենք, որ ABC-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, իսկ AH-ը նրա ներքնաձիգին տարված բարձրությունն է: Հետևաբար՝ $AB = 2AH = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{5}$ =4,8:

Պատ. 3) 4, 8

9. ABC եռանկյան AC կողմի վրա վերցված է D կետը: Հայտնի է, որ $AD = 9, DC = 16, BC = 20$: Գտնել $\frac{AB}{BD}$ կոտորակի արժեքը:

1) 1,25 2) 1,2 3) 0,8 4) այլ պատասխան

Լուծում: Ըստ եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշի՝ $\Delta ACB \sim \Delta BCD$, ընդ որում նմանության գործակիցը հավասար է՝ $\frac{AC}{BC} = \frac{25}{20} = 1{,}25$: Հետևաբար՝ $\frac{AB}{BD} = 1{,}25$:

Պատ. 1) 1, 25

10. Գտնել $y = 2x - 1$, $y = 0{,}5x + 5$ և $y = 5 - x$ ուղիղներով սահմանափակված եռանկյան մակերեսը:

1) 18 2) 12 3) 6 4) այլ պատասխան

Լուծում: Նշված երեք ուղիղների զույգ առ զույգ հատման կետերն են՝ $A(4;\ 7)$, $B(2; 3)$, $C(0; 5)$: Այսպիսով, անհրաժեշտ է գտնել ABC եռանկյան մակերեսը: Վերցնենք $D(0; -1)$ կետը: ACD եռանկյան մակերեսը կլինի $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$: Նկատենք, որ B կետը AD հատվածի միջնակետն է: Հետևաբար ABC եռանկյան մակերեսը կլինի 6:

Պատ. 3) 6

11. Հայտնի է, որ $x, y, y + 2x$ թվերը նշված կարգով կազմում են աճող երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել այդ պրոգրեսիայի հայտարարը:

1) 1,5 2) 2 3) $\sqrt{2}$ 4) այլ պատասխան

Լուծում: Օգտվելով երկրաչափական պրոգրեսիայի բնութագրիչ հատկությունից, ստանում ենք՝ $y^2 = x(y + 2x)$, $y^2 - xy - 2x^2 = 0$, $(y + x)(y - 2x) = 0$, որտեղից ստանում ենք, որ $y = -x$ կամ $y = 2x$: Քանի որ պրոգրեսիան աճող է, ապա առաջին դեպքը հնարավոր չէ: Հետևաբար՝ $y = 2x$: Այսպիսով, պրոգրեսիայի հայտարարը կլինի 2:

Պատ. 2) 2

12.

Տրված են 4 հատ A, 4 հատ B, 4 հատ C և 4 հատ D տառերը, որոնք պետք է լրացնել 4×4 չափի վանդակավոր տախտակի վանդակներում (յուրաքանչյուր վանդակում գրելով մեկ տառ և կիրառելով բոլոր նշված տառերը): Լրացված աղյուսակն անվանենք հայկական, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին

A	B	C	D
C	D	A	B
B	A	D	C
D	C	B	A

(i) աղյուսակի յուրաքանչյուր հորիզոնական, ինչպես նաև յուրաքանչյուր ուղղաձիգ տողի վրա չկան նույնանուն տառեր,

(ii) վերին ամենաձախ և ստորին ամենաաջ վանդակներում գրված տառերը նույնանուն են:

(iii) վերին ամենաաջ և ստորին ամենաձախ վանդակներում գրված տառերը նույնանուն են:

Գտնել բոլոր հնարավոր հայկական աղյուսակների քանակը:

[Նկարում պատկերված է հայկական աղյուսակի մեկ օրինակ]

1) 24 2) 48 3) 96 4) այլ պատասխան

Լուծում: Ունենք հայկական աղյուսակների հետևյալ 4 տեսակները

A	C	D	B
D	B	A	C
C	A	B	D
B	D	C	A

A	C	D	B
D	A	B	C
C	B	A	D
B	D	C	A

A	C	D	B
C	B	A	D
D	A	B	C
B	D	C	A

A	C	D	B
C	A	B	D
D	B	A	C
B	D	C	A

Նշենք, որ նշված տեսակներից յուրաքանչյուրում A, B, C, D տառերը կարելի է փոփոխել 4! եղանակով: Հետևաբար կստանանք $4 \cdot 4! = 96$ հատ հայկական աղյուսակ:

Պատ. 3) 96

13. Շրջանագծի AB և CD լարերը հատվում են K կետում, իսկ AC և DB ճառագայթները՝ E կետում: Գտնել ACD անկյան աստիճանային չափը, եթե $\angle AKD = 100°$, $\angle AED = 30°$:

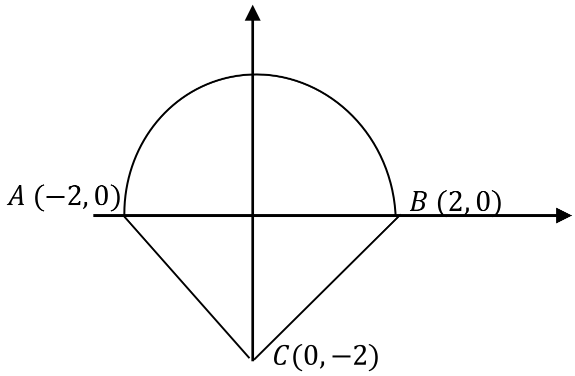
1) 70° 2) 35° 3) 65° 4) այլ պատասխան

Լուծում: Դիցուք x-ը C կետը չպարունակող AD աղեղի աստիճանային չափն է, իսկ y-ը՝ A կետը չպարունակող BC աղեղի աստիճանային չափը: Այդ դեպքում՝ $\frac{x+y}{2} = 100°$, $\frac{x-y}{2} = 30°$: Հետևաբար $x = 130°$, որտեղից՝ $\angle AED = 65°$:

Պատ. 3) 65°

14. Դիցուք S-ը $y=\sqrt{4-x^2}$ և $y=|x|-2$ ֆունկցիաների գրաֆիկներով սահմանափակված պատկերի մակերեսն է: Գտնել այն ամենամեծ n բնական թիվը, որի համար՝ $n \le S$:

1) 14 2) 12 3) 10 4) այլ պատասխան



Լուծում: $y=\sqrt{4-x^2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 շառավղով կիսաշրջանագիծ է (տես նկարը), իսկ $y=|x|-2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (0, -2) կետից սկիզբ առնող երկու ճառագայթների զույգ է: Այդ երկու գրաֆիկներով սահմանափակված պատկերը կազմված է ABC եռանկյունուց և կիսաշրջանից: Այդ պատկերի մակերեսը կլինի $\frac{4\cdot 2}{2}+\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=4+2\pi$: Ամենամեծ բնական թիվը, որը չի գերազանցում այդ թիվը 10-ն է:

Պատ. 3) 10

15. Գտնել այն բոլոր n բնական երկնիշ թվերի քանակը, որոնց համար 9^n+3^n+1 թիվը բաժանվում է 7-ի:

1) 30 2) 45 3) 60 4) այլ պատասխան

Լուծում: Դիտարկելով n թվի մնացորդները 6-ի բաժանելիս, նկատում ենք, որ բաժանելիության պայմանին բավարարող n բնական թվերն այն թվերն են, որոնք 6-ի բաժանելիս տալիս են 2 կամ 4 մնացորդ (ընդ որում միայն այդ թվերն են): Երկնիշ թվերի բազմության մեջ այդպիսի թվերի քանակը 30 է:

Պատ. 1) 30

16. Գտնել այն ամենափոքր բնական թիվը, որը 4-ի, 5-ի և 7-ի բաժանելիս տալիս է համապատասխանաբար 3, 4 և 3 մնացորդներ:

Լուծում: Դիցուք n-ը այդ բնական թիվն է: Այդ դեպքում $n-3$ թիվը բաժանվում է 28-ի: Հետևաբար $n=28k+3$ (ինչ-որ k ոչբացասական ամբողջ թվի համար): Այդպիսի թվերն են 3, 31, 59, …: Նշենք, որ 59-ը 5-ի վրա բաժանելիս տալիս է 4 մնացորդ:

Պատ. 59

17. Գտնել ամենամեծ n բնական թիվը, որի համար $101!+102!+\cdots+150!$ թիվը բաժանվում է 15^n-ի վրա:

Լուծում: Ունենք՝

$$101!+102!+\cdots+150!=101!\,(1+102+102\cdot 103+102\cdot 103\cdot 104+5A)$$

որտեղ A-ն բնական թիվ է: Նշենք, որ $1+102+102\cdot 103+102\cdot 103\cdot 104+5A$ չի բաժանվում 3-ի և 5-ի: Հետևաբար, խնդրի մեջ նշված n բնական թիվն այն ամենամեծ բնական թիվն է, որի համար 101! թիվը բաժանվում է 15^n-ի վրա: Հաշվենք 101! թվի պարզ արտադրիչների վերլուծության մեջ 5-երի քանակը՝

$$\left[\frac{101}{5}\right]+\left[\frac{101}{5^2}\right]+\left[\frac{101}{5^3}\right]=20+4+0=24:$$

Նույն ձևով կարելի է հաշվել 3-ների քանակը: Նշենք, որ 3-ների քանակը 5-երի քանակից շատ է:

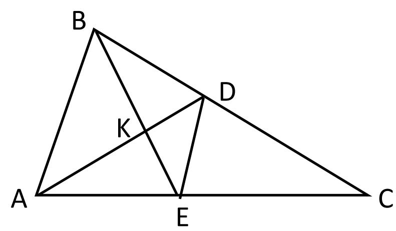
Պատ. 24

18. Տրված է $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ բազմությունը: Դիցուք k-ն A բազմության ենթաբազմություններից կազմված այն (X, Y) զույգերի քանակն է, որ $X \subset Y$ և $X \neq Y$: Գտնել k-ի մնացորդը 59-ի բաժանելիս:

Լուծում: Սկզբում հաշվենք այն (X, Y) զույգերի քանակը, որոնց համար $X \subset Y \subset A$: Նշենք, որ X, Y ենթաբազմությունները կարող ենք կառուցել, եթե կառուցենք իրար հետ զույգ առ զույգ չհատվող X, $Y \backslash X$, $A \backslash Y$ բազմությունները (այս երեք բազմությունները տրոհում են A բազմությունը 3 հատ զույգ առ զույգ չհատվող մասերի): A բազմության յուրաքանչյուր տարրի համար ունենք 3 ընտրություն (քանի որ այն կարող է գտնվել այդ երեք մասերից ցանկացածի մեջ): Հետևաբար $X \subset Y \subset A$ պայմանին բավարարող (X, Y) զույգերի քանակը 3^8 է:
Այս քանակից պետք է հանել այն դեպքերը, երբ $X = Y$: Այս դեպքերի քանակը հավասար է A բազմության ենթաբազմությունների քանակին՝ 2^8: Այսպիսով, խնդրի մեջ նշված k թվի համար ունենք՝ $k = 3^8 - 2^8$: Մնում է հաշվել այս թվի մնացորդը 59-ի բաժանելիս: Այն 51 է:

Պատ. 51

19. D և E կետերը գտնվում են ABC եռանկյան համապատասխանաբար BC և AC կողմերի վրա: BE և AD հատվածները հատվում են K կետում: Հայտնի է, որ ABK և DKE եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար 4 մ^2 և 3 մ^2 են: Դիտարկվում են նշված պայմաններին բավարարող բոլոր հնարավոր ABC եռանկյունները և D, E կետերը: Հայտնի է, որ CDE եռանկյան մակերեսի փոքրագույն արժեքը (արտահայտված քառակուսի մետրերով) ներկայանում է $a + b\sqrt{p}$ տեսքով, որտեղ a-ն ու b-ն բնական թվեր են, p-ն պարզ թիվ է: Գտնել $a + 2b + 3p$ արտահայտության արժեքը:



Լուծում: Դիցուք AKE, BKD, CDE եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար X, Y, S են: Ունենք՝ $\frac{4}{X} = \frac{AK}{KD} = \frac{Y}{3}$, որտեղից՝ $XY = 12$: Ունենք նաև, որ

$$\frac{4 + X}{S + 3 + Y} = \frac{AE}{EC} = \frac{3 + X}{S}:$$

Այստեղից ստանում ենք, որ

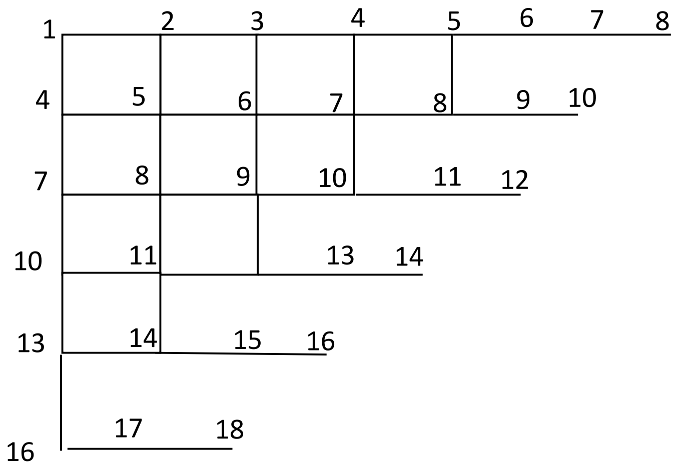
$$4S + XS = 3S + XS + 9 + 3X + 3Y + XY,$$
$$S = 3(X + Y) + 21:$$

Ունենք՝ $X + Y \geq 2\sqrt{XY} = 4\sqrt{3}$: Հետևաբար՝ $S \geq 21 + 12\sqrt{3}$: Նշենք, որ S-ի այս արժեքը հասանելի է, երբ $X = Y = 2\sqrt{3}$: Այդ արժեքը ստանալու համար անհրաժեշտ է D և E կետերն ընտրել այնպես, որ $ABDE$-ն լինի սեղան ($AB||DE$): Նշենք, որ այդպիսի ABC եռանկյունը և D, E կետերը կարելի է ստանալ տարբեր եղանակներով: Օրինակ, վերցնենք $AD \perp BE$, $AK = BK = 2\sqrt{2}$, $DK = KE = \sqrt{6}$: Այսպիսով, S-ի փոքրագույն արժեքն է $S = 21 + 12\sqrt{3}$: Հետևաբար՝ $a = 21, b = 12, p = 3$, որտեղից՝ $a + 2b + 3p = 54$:

Պատ. 54

20. Լճակում մի ուղղի վրա տեղադրված է 8 հատ քար: Սկզբնական պահին գորտը գտնվում է առաջին քարի վրա: Յուրաքանչյուր քայլում նա կարող է ցատկել հայտնվելով տվյալ քարից աջ գտնվող հաջորդ քարի վրա կամ այդ քարից հաշված նրանից աջ գտնվող երրորդ քարի վրա (օրինակ, եթե նա 2-րդ քարի վրա է, ապա նա ցատկ կատարելով կարող է հայտնվել 3-րդ կամ 5-րդ քարի վրա): Այն դեպքում, երբ գորտը մեծ ցատկ է կատարում (հայտնվելով տվյալ քարից հաշված երրորդ քարի վրա), ապա անտառապահը բոլոր քարերի վերջում ավելացնում է ևս երկու քար: Փոքր ցատկ կատարելու դեպքում անտառապահը նոր քար չի ավելացնում: Գորտը այսպես մի քանի ցատկ կատարելով ցանկանում է հասնել վերջին քարին: Քանի՞ եղանակով նա կարող է դա անել:
[Ենթադրվում է, որ եթե իր կանգնած քարից հետո 3-րդ քարը չկա, ապա նա այդ պահին մեծ ցատկ անել չի կարող]

Լուծում: Հետևյալ գծապատկերի շնորհիվ կարելի է գտնել բոլոր հնարավոր եղանակների քանակը



Ճանապարհների քանակը 1 գագաթով կետից դեպի եզրային կետերը կլինի 2^5 =32:

Պատ. 32