ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 9-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ
ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ՓՈՒԼ 2023-2024 թ

Տևողությունը – 2 ժամ 30 րոպե

ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ և ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

1. Գտնել $(x^2-1)(x^2-5x+1)=0$ հավասարման բոլոր արմատների գումարը:

   1) 7 2) 6 3) 5 4) 4

   Լուծում: Ունենք՝ $x=\pm1$ կամ $x^2-5x+1=0$: Հետևաբար, ըստ Վիետի թեորեմի, արմատների գումարը կլինի 5:

Պատ. 3) 5

2. Հայտնի է, որ $\frac{x+y}{x-y}=2$: Գտնել $\frac{x}{y}$ արտահայտության արժեքը:

   1) -3 2) 3 3) -1 4) 1

   Լուծում: Ունենք՝ $x+y=2(x-y), x+y=2x-2y, x=3y$, ուստի $\frac{x}{y}=$ **3**:

Պատ. 2) 3

3. Գտնել ամենամեծ a բնական թիվը, որի համար $x^2+2x=3-a$ հավասարումն ունի իրական արմատ:

   1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

   Լուծում: Ունենք՝ $(x+1)^2=4-a$: Այս հավասարումն ունի լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ $4-a\geq0$, այսինքն՝ $a\leq4$: Հետևաբար a-ի մեծագույն արժեքը կլինի **4**:

Պատ. 3) 4

4. Գտնել $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատների գումարը:

   1) -1 2) 2 3) -2 4) 1

   Լուծում: Տրված շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատներն են $(1,-2)$, հետևաբար, նրանց գումարը կլինի՝ -1:

Պատ. 1) -1

5. Գտնել այն ամենափոքր բնական թիվը, որն ունի ճիշտ 7 հատ բնական բաժանարար:

   1) 12 2) 24 3) 32 4) 64

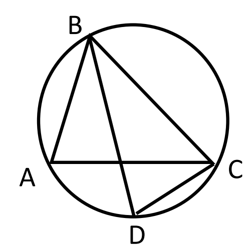
   Լուծում: Որպեսզի բնական թիվն ունենա ճիշտ 7 հատ բնական բաժանարար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ունենա p^6 տեսքը, որտեղ p-ն պարզ թիվ է: Ամենափոքր այդպիսի թիվը կլինի $2^6=64$:

Պատ. 4) 64

6. H-ը ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է: Ընդ որում $\angle HAB=30°$, $\angle HBA=20°$: Գտնել $\angle ACB$-ն:

   1) $10°$ 2) $25°$ 3) $50°$ 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Քանի որ $\angle HAB=30°$, ապա $\angle ABC=60°$: Քանի որ $\angle HBA=20°$, ապա $\angle BAC=70°$: Հետևաբար՝ $\angle ACB=50°$:



Պատ. 3) 50°

7. ABC եռանկյան B գագաթից տարված կիսորդի շարունակությունը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է D կետում: Գտնել ABC անկյունը, եթե $\angle ACD = 31°$:

1) $31°$ 2) $62°$ 3) $28°$ 4) այլ պատասխան

Լուծում: $\angle ABC = 2\angle ABD = 2\angle ACD = 2 \cdot 31° = 62°$:

Պատ. 2) 62°

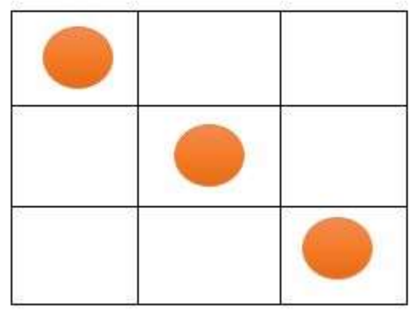
8. A-ն և B-ն կամայական բազմություններ են, որոնք կազմված են 100-ը չգերազանցող բնական թվերից, ընդ որում, A բազմությունն ունի 54 տարր, իսկ B-ն՝ 81: Նշված պայմաններին բավարարող A և B բազմությունների հատումը ամենաքիչը քանի՞ տարր կարող է ունենալ:

1) 46   2) 27   3) 19   4) 35

Լուծում: Ունենք $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 54 + 81 - |A \cup B| = 135 - |A \cup B| \geq 35$: Փոքրագույն արժեքը կլինի 35 (օրինակ $\{1,2, \dots ,54\}, B = \{20, 21, \dots ,100\}$ դեպքում):

Պատ. 4) 35

9. Մարզադահլիճի հատակի վրա պատկերված է 3×3 չափի վանդակավոր տախտակ: Մարզիկը ունի 9 հատ գնդակ, որոնցից 3-ը կարմիր են, 3-ը՝ կապույտ, 3-ը՝ նարնջագույն: Մարզիկը ցանկանում է այդ գնդակները տեղավորել 3×3 չափի վանդակավոր տախտակի դաշտերում այնպես, որ ցանկացած հորիզոնական, ինչպես նաև ցանկացած ուղղաձիգ ուղղի վրա չլինեն նույն գույնի գնդակներ: Ամենաշատը քանի՞ եղանակով նա կարող է տեղադրել գնդակները: [Նկարում ոչ բոլոր գնդակներն են պատկերված]



1) 12   2) 6   3) 24   4) այլ պատասխան

Լուծում: Մարզիկը կարող է տեղադրել կարմիր գնդակները $3!$ եղանակով, որից հետո կապույտ գնդակները՝ $2!$ Եղանակով, որից հետո նարնջագույն գնդակները 1 եղանակով: Արդյունքում ստանում ենք բոլոր գնդակների տեղադրման $3! \cdot 2! = 12$ հնարավորություն:

Պատ. 1) 12

10. Գտնել կոորդինատային հարթության այն բոլոր կետերի քանակը, որոնց կոորդինատներն ամբողջ թվեր են և որոնք գտնվում են $y = 0{,}5x + 2, y = 5 - x$ ուղիղներով և կոորդինատային առանցքներով սահմանափակված քառանկյան ներսում: [Եթե կետը գտնվում է քառանկյան կողմերի կամ գագաթների վրա, ապա համարում ենք, որ այն քառանկյան ներսում չէ]:

1) 4   2) 5   3) 6   4) 7

Լուծում: Քառանկյան գագաթներն են՝ $(0,0)$, $(0,2), (2,3)$, $(5,0)$: Այդ քառանկյան ներսում գտնվող ամբողջաթիվ կոորդինատներով կետերն են՝ $(1,1)$, $(1,2), (2,1)$, $(2,2), (3,1)$: Պատասխան՝ **5**:

Պատ. 2) 5

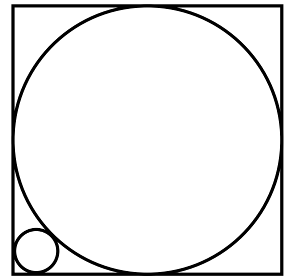
11. O կենտրոնով շրջանագծի B կետից տարված է շրջանագծի BA շոշափողը: C կետը գտնվում է շրջանագծի վրա, ընդ որում O կետը գտնվում է AC հատվածի վրա: Հայտնի է, որ $\angle OBC = 15°$: Գտնել $\angle OAB$-ն:

1) $15°$ 2) $30°$ 3) $45°$ 4) $60°$

Լուծում: Ունենք՝ $\angle OCB = \angle OBC = 15°$, հետևաբար՝ $\angle AOB = 30°$, ուստի $\angle OAB = 60°$:

Պատ. 4) 60°

12. 2 սմ երկարությամբ կողմ ունեցող քառակուսուն ներգծած է շրջանագիծ: Մեկ այլ շրջանագիծ շոշափում է այդ շրջանագիծը և տրված քառակուսու երկու հարևան կողմերը: Քանի՞ սմ է երկրորդ շրջանագծի շառավիղը:



1) $\sqrt{2}-1$ 2) $2\sqrt{3}-3$ 3) $3-2\sqrt{2}$ 4) այլ պատասխան

Լուծում: Դիցուք O-ն և O_1-ը համապատասխանաբար մեծ և փոքր շրջանագծերի կենտրոններն են, իսկ A-ն քառակուսու այն գագաթն է, որը փոքր շրջանագծին ամենամոտն է: Ունենք, որ մեծ շրջանագծի շառավիղը 1 սմ է: Փոքր շրջանագծի շառավիղը նշանակենք r –ով: Ունենք՝ $OO_1 = r+1$, $AO_1 = r\sqrt{2}$, հետևաբար՝ $AO = r\sqrt{2}+r+1$: Մյուս կողմից, ունենք, որ AO-ն քառակուսու անկյունագծի կեսն է, հետևաբար՝ $AO=\sqrt{2}$: Հետևաբար՝ $r\sqrt{2}+r+1=\sqrt{2}$, որտեղից՝ $r=3-2\sqrt{2}$:

Պատ. 3) $3-2\sqrt{2}$

13. a-ն և b-ն կամայական այնպիսի ամբողջ թվեր են, որ $2a+3b$ թիվը բաժանվում է 5-ի: Գտնել $a+b^2$ թիվը 5-ի բաժանելիս ստացված բոլոր հնարավոր իրարից տարբեր մնացորդների գումարը:

1) 3 2) 6 3) 7 4) այլ պատասխան

Լուծում: Ունենք, որ $2(a-b)=2a+3b-5b$, հետևաբար $2(a-b)$-ն բաժանվում է 5-ի: Այստեղից կստանանք, որ $(a-b)$-ն բաժանվում է 5-ի, այսինքն, a-ն ու b-ն տալիս են նույն մնացորդը 5-ի բաժանելիս (նշենք, որ այս պայմանը համարժեք է խնդրում նշված պայմանին): Այժմ դիտարկելով բոլոր հնարավոր մնացորդները, և հաշվի առնելով, որ a-ն ու b-ն ունեն նույն մնացորդը, ստանում ենք, որ $a+b^2$ թիվը 5-ի բաժանելիս ստացվող բոլոր հնարավոր մնացորդներն են՝ 0, 1, 2: Պատասխան՝ 0+1+2=3:

Պատ. 1) 3

14. Հողամասի մի կողմը սահմանափակված է գետով, իսկ մյուս երեք կողմերը՝ 80 մ երկարությամբ ցանկապատով: Դիտարկվում են նշված հատկությամբ օժտված բոլոր հնարավոր ուղղանկյունաձև հողամասերը: Ամենաշատը քանի՞ քառակուսի մետր մակերես կարող է ունենալ այդպիսի հողամասը:

1) 400 2) 500 3) 600 4) այլ պատասխան

Լուծում: Հողամասի լայնությունը նշանակենք x մ-ով, երկարությունը կլինի՝ $80-2x$ մ: Հետևաբար, մակերեսը կլինի՝ $2x(40-x)$: Քանի որ այս ֆունկցիան քառակուսային է, ապա նրա մեծագույն արժեքը կլինի, այն դեպքում, երբ x-ի արժեքը նրա զրոների միջին թվաբանականն է: Այսինքն՝ x=20: Հետևաբար, մակերեսի մեծագույն արժեքը կլինի՝

$$2\cdot 20\cdot(40-20)=800 \text{ մ}^2:$$

Պատ. 4) այլ պատասխան

15. Գտնել այն բոլոր n բնական երկնիշ թվերի քանակը, որոնց համար 4^n+2^n+1 թիվը բաժանվում է 7-ի:

1) 60 2) 45 3) 30 4) այլ պատասխան

Լուծում: Եթե $n=3k$, ապա $4^n+2^n+1=4^{3k}+2^{3k}+1$: Ունենք, որ $2^{3k}=8^k$, որը 7-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ: Հետևաբար, $4^{3k}=(2^{3k})^2$ թիվը ևս 7-ի բաժանելիս կտա 1 մնացորդ: Հետևաբար, $4^n+2^n+1=4^{3k}+2^{3k}+1$ թիվը 7-ի բաժանելիս կտա 3 մնացորդ:

Եթե $n=3k+1$, ապա $4^n+2^n+1=4\cdot 4^{3k}+2\cdot 2^{3k}+1$: Քանի որ 4^{3k} և 2^{3k} թվերը 7-ի բաժանելիս տալիս են 1 մնացորդ, ապա $4\cdot 4^{3k}+2\cdot 2^{3k}+1$ թիվը կբաժանվի 7-ի:

Եթե $n=3k+2$, ապա $4^n+2^n+1=16\cdot 4^{3k}+4\cdot 2^{3k}+1$: Քանի որ 4^{3k} և 2^{3k} թվերը 7-ի բաժանելիս տալիս են 1 մնացորդ, ապա $16\cdot 4^{3k}+4\cdot 2^{3k}+1$ թիվը կբաժանվի 7-ի:

Այսպիսով, խնդրի պայմանին բավարարում են բոլոր այն երկնիշ թվերը, որոնք չեն բաժանվում 3-ի: Այդպիսի թվերի քանակը 60 է:

Պատ. 1) 60

16. Գտնել $\{1,2,3,4,5,6\}$ բազմության առնվազն երկու տարր պարունակող այն բոլոր ենթաբազմությունների քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրի բոլոր տարրերի գումարը բաժանվում է 3-ի:
Լուծում: Դիցուք A-ն $\{1,2,3,4,5,6\}$ բազմության կամայական ենթաբազմություն է, որի տարրերի գումարը բաժանվում է 3-ի: Այդ դեպքում, A բազմությունը կարելի է տրոհել երկու մասի՝ $A = X \cup Y$, որտեղ X-ը $\{1,2,4,5\}$ բազմության այնպիսի ենթաբազմություն է, որոնց տարրերի գումարը բաժանվում է 3-ի, իսկ Y-ը՝ $\{3,6\}$ բազմության կամայական ենթաբազմություն է: Նշենք, որ X բազմության համար կա 6 ընտրություն՝ $\emptyset$, $\{1,2\},\{1,5\},\{4,2\},\{4,5\},\{1,2,4,5\}$: Իսկ Y բազմության համար կա $2^2 = 4$ հատ ընտրություն: Այսպիսով, A բազմության համար կա $6 \cdot 4 = 24$ ընտրություն: Այստեղից պետք է հանել այն դեպքերը, երբ A-ն ունի ամենաշատը 1 տարր: Այդպիսի դեպքերն են՝ $\emptyset$, $\{3\},\{6\}$: Այսպիսով, պատասխանը կլինի 24-3=21:
[Նշենք, որ $\emptyset$ բազմության համար, մենք համարեցինք, որ նրա տարրերի գումարը 0 է: Խնդրի պատասխանը չէր փոխվի, եթե համարեինք, որ այն տարրերի գումար չունի]

Պատ. 21

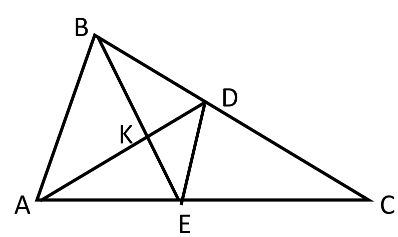
17. Գտնել բնական թվերից կազմված այն բոլոր (x, y) թվազույգերի քանակը, որոնց համար տեղի ունեն հետևյալ պայմանները. $3x + 5y$ թիվը բաժանվում է 7-ի և $x \leq 28$, $y \leq 28$:

Լուծում: Նշենք, որ x-ի կամայական արժեքի դեպքում y-ի մնացորդը 7-ի բաժանելիս որոշվում է միարժեքորեն: Հետևաբար, x-ի ֆիքսված արժեքի դեպքում y-ն ունի ընտրության 4 հնարավորություն: Պատասխանը կլինի $28 \cdot 4 = 112$:

Պատ. 112

18. α իրական թիվը $x^2 - 5x - 3 = 0$ հավասարման արմատ է, իսկ α^2 թիվը $x^2 + bx + c = 0$ հավասարման արմատ է, որտեղ b, c-ն ամբողջ թվեր են: Գտնել $b + 7c$ արտահայտության արժեքը:

Լուծում: Ունենք՝ $\alpha^2 - 3 = 5\alpha$, որտեղից՝ $(\alpha^2 - 3)^2 = 25\alpha^2$: Այսպիսով՝ $\alpha^4 - 31\alpha^2 + 9 = 0$: Հետևաբար, α^2-ն կլինի $x^2 - 31x + 9 = 0$ հավասարման արմատ: Այսպիսով, $b = -31, c = 9$ (քանի որ α^2-ն իռացիոնալ է, ապա b-ն ու c-ն որոշվում են միարժեքորեն): Հետևաբար՝ $b + 7c = 32$:



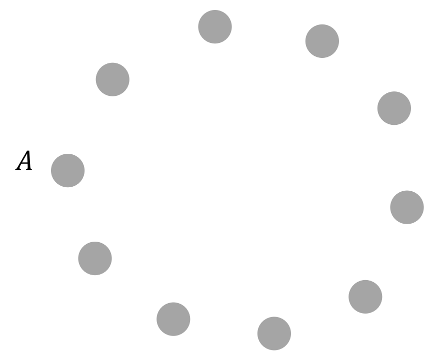
Պատ. 32

19. D և E կետերը գտնվում են ABC եռանկյան համապատասխանաբար BC և AC կողմերի վրա: BE և AD հատվածները հատվում են K կետում: Հայտնի է, որ ABK և DKE եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար 5 մ^2 և 4 մ^2 են: Դիտարկվում են նշված պայմաններին բավարարող բոլոր հնարավոր ABC եռանկյունները և D, E կետերը: Ամենաքիչը քանի՞ քառակուսի մետր կարող է լինել ADC եռանկյան մակերեսը:

Լուծում: ADC, AKE, BKD եռանկյունների մակերեսները նշանակենք համապատասխանաբար՝ S մ^2, X մ^2, Y մ^2: Ունենք՝ $\frac{5}{X} = \frac{BK}{KE} = \frac{Y}{4}$, հետևաբար $XY = 20$ (1): Մյուս կողմից՝ $\frac{AE}{EC} = \frac{5+X}{S-X+Y}, \frac{AE}{EC} = \frac{X+4}{S-X-4}$, որտեղից՝ $\frac{5+X}{S-X+Y} = \frac{X+4}{S-X-4}$ (2): Այս երկու հավասարումներից, ստանում ենք, որ $S = 5X + 4Y + 40 \geq 2\sqrt{5X \cdot 4Y} + 40 = 80$ մ^2: Նշենք, որ կարելի է կառուցել այնպիսի օրինակ, որ S-ի արժեքը լինի 80 մ^2:

Պատ. 80

20. Լուսատախտակի վրա շրջանաձև և մեկընդմեջ դասավորված են 5 հատ կարմիր և 5 հատ կապույտ գնդիկներ։ Սկզբնական պահին A կարմիր գնդիկը միացված է (լուսավորված է)։ Եթե ինչ-որ պահի միացված է որևէ կարմիր գնդիկ, ապա թույլատրվում է անջատել այդ գնդիկը և միացնել ժամսլաքի ուղղությամբ նրան հաջորդող երկու գնդիկներից մեկը։ Իսկ եթե միացված է որևէ կապույտ գնդիկ, ապա թույլատրվում է անջատել այդ գնդիկը և միացնել այդ գնդիկից հետո եկող երկրորդ և երրորդ գնդիկներից որևէ մեկը (ժամսլաքի ուղղությամբ)։ Օլիմպիադայի մասնակիցը մոտենում է լուսատախտակին և սկսում կատարել որոշակի թույլատրելի քայլեր։ Նա վերջացնում է իր աշխատանքը, երբ ինչ-որ մի դիրք կրկնվում է։ Ամենաշատը քանի՞ եղանակով նա կարող է կատարել իր քայլերն այնպես, որ քայլերի ավարտին պարզվի, որ լուսավորված է վերը նշված A գնդիկը։



Լուծում: Գնդիկները համարակալենք ժամսլաքի ուղղությամբ սկսած A գնդիկից՝ 1, 2, …, 10։ Պարզ է, որ եթե լուսավորված է A գնդիկը, ապա հաջորդ քայլում լուսավորված կլինի 2 կամ 3 գնդիկներից մեկը։ Եթե լուսավորված է 2 կամ 3 գնդիկներից մեկը, ապա նրա հաջորդ քայլում լուսավորվում է 4 կամ 5 գնդիկներից մեկը, և այսպես շարունակ։ Այսպիսով, յուրաքանչյուր քայլում ունենալով 2 ընտրություն կհասնենք 10 կամ 1 գնդիկին։ Այդ ճանապարհների քանակը կլինի $2^5 = 32$։ Նշենք, որ եթե այդ 32 ճանապարհներից 16-ով ստացել ենք այն դիրքը որի դեպքում լուսավորված է 1 համարի գնդիկը, իսկ մյուս 16 ճանապարհով՝ այն դիրքը որի դեպքում լուսավորված է 10 համարի գնդիկը։ Առաջին դեպքում քայլերն ավարտվում են։ Իսկ երկրորդ դեպքում քայլերը շարունակվում են և յուրաքանչյուր ճանապարհի դեպքում միարժեքորեն շարունակվում մինչև ստացվի այնպիսի դիրք, որտեղ լուսավորված է 1 համարի գնդիկը (իրոք, եթե ճանապարհի առաջին հինգ քայլում հասել ենք 10-րդ գնդիկին, ապա նրանից հետո կատարվում է անցում կամ 2-րդ կամ 3-րդ գնդիկին, ընդ որում կարող ենք ընտրել նրանցից միայն մեկը, քանի որ նախորդ հինգ քայլերում նրանցից մեկն արդեն կիրառվել էր։ Նույն ձևով հաջորդ քայլերից յուրաքանչյուրում ունենք չիշտ մեկ ընտրություն)։ Այսպիսով, պատասխանը կլինի՝ 16+16=32։

Պատ. 32