ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿ

Հանգուցային բառեր. *կոորդինատային հարթություն, գրաֆիկի կառուցում, հավասարում, պարամետր, գրաֆիկների ձևափոխություններ:*

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ուսուցանվող նյութերից համեմատաբար բարդ է համարվում պարամետր պարունակող հավասարումների լուծումը:

Երբեմն հավասարումը, բացի անհայտից պարունակում է նաև այլ տառեր, որոնք կոչվում են պարամետրեր: Տվյալ դեպքում գործ ունենք անթիվ թվով հավասարումների հետ, քանի որ պարամետրի յուրաքանչյուր թույլատրելի արժեքի դեպքում ստանում ենք մեկ հավասարում:

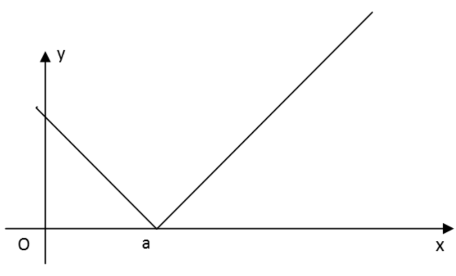
Լուծել պարամետր պարունակող հավասարումը նշանակում է լուծել այն պարամետրի բոլոր թույլատրելի արժեքների դեպքում [2, 63]:

Այսպիսով՝ նախ անհրաժեշտ է գտնել պարամետրի թույլատրելի արժեքների բազմությունը, այնուհետև պարզել, թե այդ արժեքներից որոնց դեպքում հավասարումն ունի արմատ և գտնել այդ արմատները:

Մի շարք պարամետրական հավասարումներ շատ հետաքրքիր են լուծվում, եթե դրանց լուծման ժամանակ օգտագործում ենք համապատասխան գրաֆիկներ:

Մինչև դրանց լուծման մեթոդին անդրադառնալը ծանոթանանք մի քանի գրաֆիկների կառուցման կարճ եղանակներին:

Գրաֆիկ 1. $y = |x - a|$, այս գրաֆիկն ունի անգլերեն V տառի տեսքը (նկ. 1):



Նկ. 1. «V»

Ըստ մոդուլի սահմանման, եթե դիտարկենք $x \geq a$ մոդուլի արժեքը կլինի $x - a$, իսկ եթե $x < a$՝ $a - x$, այդ պատճառով էլ գրաֆիկը բաղկացած է երկու ուղիղներից [1, 67]:

Գրաֆիկ 2. $y = |x-a| + |x-b|$; $b > a$, ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի «նավակ»-ի տեսք, որը դրված է $b-a$ կողմով քառակուսու վրա:

Իսկապես, դիտարկենք հետևյալ դեպքերը, եթե $x < a$; կունենանք

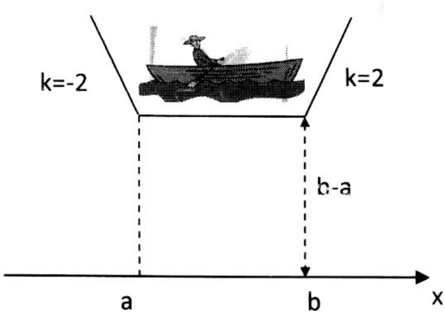
$$y = |x-a| + |x-b| = a - x + b - x = a + b - 2x$$

եթե $a \le x \le b$; կունենանք$y = |x-a| + |x-b| = b - a$

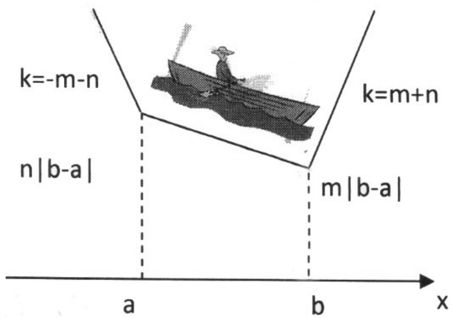
եթե$x > b$; կունենանք

$$y = |x-a| + |x-b| = a - x + x - b = 2x - a - b$$

Կառուցելով յուրաքանչյուր միջակայքում գրաֆիկները կստանանք (նկ. 2) [1, 67]:



Նկ. 2. «նավակ»



Նկ. 3. «թեք նավակ»

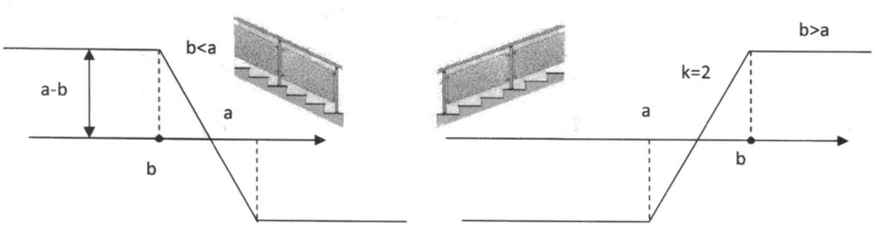
Գրաֆիկ 3. $y = m[x-a] + n[x-b]$; $m, n > 0$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի «թեք նավակի» տեսք (նկ. 3): Գրաֆիկի կառուցման համար բավական է գտնել մոդուլատակ արտահայտության զերոները՝ $x - a = 0$, $x - b = 0$, այնուհետև հաշվել $y(a) = n|a-b|$ և $y(b) = m|a-b|$ արժեքները, միացնել ստացված կետերը և օգտվել այն փաստից, որ նավակի կողմերի անկյունային գործակիցները հավասար են $\pm(m+n)$:

Գրաֆիկ 4. $y = |x-a| + |x-b|$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի «աստիճանի տեսք» (նկ. 4): Գրաֆիկի կառուցման մեթոդը նման է նավակի կառուցման մեթոդին:

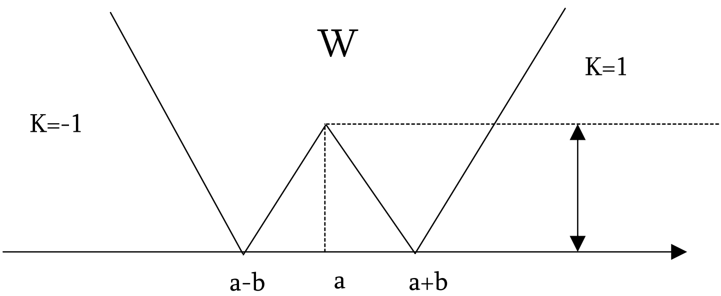
Գրաֆիկ 5. $y = \big||x-a| - b\big|$; $b > 0$: Գրաֆիկն ունի անգլերեն «W» տառի տեսք (նկ. 5):

Եթե $x < a$, կունենանքy=$\big||x-a| - b\big| = |-x + a - b| = |x - (a-b)|$. Եթե $x \ge a$, կունենանք y=$\big||x-a| - b\big| = |x - (a+b)|$:

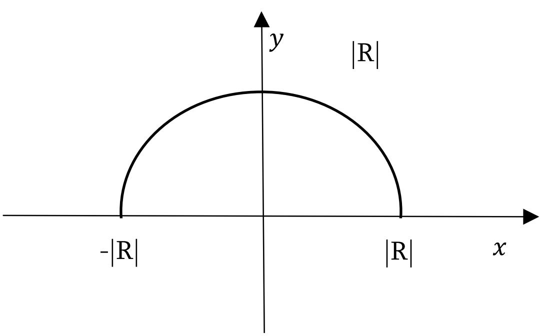
Այդ պատճառով գրաֆիկը բաղկացած է երկու «V» գրաֆիկից, որոնց միացումը կատարվում է $M(a, b)$ կոորդինատներով կետում [5, 104]:



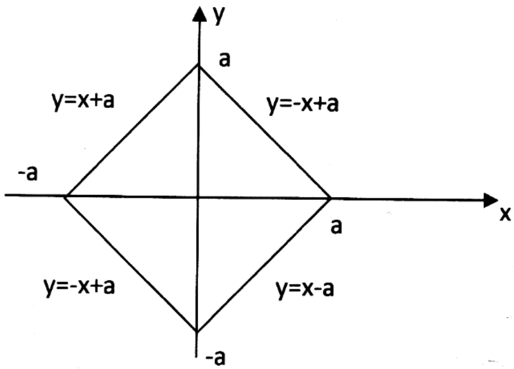
Նկ. 4. «աստիճան»



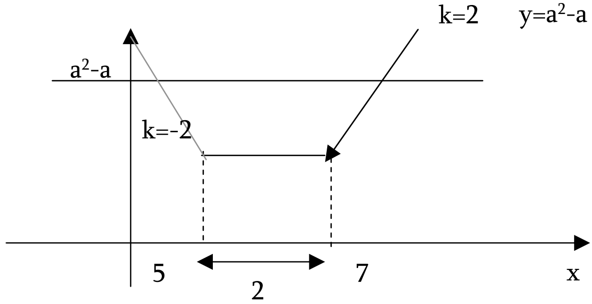
Նկ. 5. «W»



Նկ. 6. «կիսաշրջանագիծ»



Նկ. 7. «քառակուսի»



Նկ. 8

Գրաֆիկ 6: Կիսաշրջանագծի գրաֆիկը (նկ. 6) y=$\sqrt{R^2-x^2}$,

y=$\sqrt{R^2-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2+x^2>R^2 \end{cases}$

Դժվար չէ նկատել, որ համակարգի երկրորդ հավասարումը շրջանագծի հավասարումն է, որի կենտրոնի կոորդինատները՝ (0,0), իսկ շառավիղը՝ $|R|$ և քանի որ $y \geq 0$ կվերցնենք գրաֆիկի միայն վերին կիսահարթությունում գտնվող մասը:

Գրաֆիկ 7. $|x|+|y|=a, a>0$ հավասարման գրաֆիկը: Նկատենք, որ եթե $x \cdot y \neq 0$ մեր հավասարումը համարժեք է հետևյալ համակարգերի միավորմանը.

$$\left\{\begin{matrix} y=x+a, \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} y=x-a, \\ y<0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} y=-x+a, \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} y=-x-a, \\ x<0 \\ y<0 \end{matrix}\right\}$$

Իսկ եթե $x=0, y=\pm a$

եթե $x=0, x=\pm a$

Արդյունքում ստանում ենք$|x|+|y|=a$ հավասարման գրաֆիկը (նկ. 7), բաղկացած է վերընշված ուղիների հատվածներով, որոնք միացված են միմյանց $(0;a)$,$(0,-a)$, $(a;0)$, $(-a;0)$ կետերով:

Օգտվելով վերը դիտարկված ֆունկցիաների գրաֆիկներից, լուծենք մի քանի հավասարումներ.

<u>Օրինակ 1</u>: a-ի ինչ արժեքի դեպքում $|x-5|+|x-7|=\ a^2-a$ հավասարումն ունի երկու լուծում:

Նկատենք, որ լուծումների քանակը $y=|x-5|+|x-7|$; $y=a^2-a$ ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետերի քանակն է:

Կառուցենք $y=|x-5|+|x-7|$ գրաֆիկը ըստ գրաֆիկ 2-ի այն 2 կողմով քառակուսու վրա դրված նավակ է, իսկ $y=a^2-a$-ն աբսցիսների առանցքին զուգահեռ և օրդինատների առանցքը a^2-a կետում հատող ուղիղն է (նկ. 8):

Խնդրի պահանջը տեղի կունենա, եթե

$$a^2-a>2 \Longrightarrow a\in(\infty,-1)\cup(2,\infty)$$

Սա հնարավորություն է տալիս հեշտությամբ պատասխանել պետական ավարտական և միասնական քննությունների համար նախատեսված շտեմարաններում զետեղված բազմաթիվ հարցերի:

Օրինակ.

ա) Տրված է $|x+4|+|x-6|=$ b հավասարումը (b-ն պարամետր է):

1. Եթե a թիվը տրված հավասարման արմատ է, ապա (2-a) թիվըևս այդ հավասարման արմատ է:

2. Գոյություն ունի b-ի այնպիսի դրական արժեք, որի դեպքում հավասարումն արմատ չունի:

3. $b=10$ դեպքում հավասարման արմատների բազմությունը [-2, 3] միջակայքն է:

4. $b>10$ դեպքում [6, ∞] միջակայքում հավասարման արմատը $\frac{b}{2}$-ն է:

5. $b<10$ դեպքում հավասարումն արմատ չունի:

6. $b>10$պայմանին բավարարող ցանկացած b-ի դեպքում հավասարումն ունի նույն նշանի երկու արմատ [4, 236]:

բ) Տրված է a պարամետրով $|x|+|x+a|=6$ հավասարումը:

1. $a=-8$ դեպքում հավասարումն արմատ ունի:

2. $a>6$ հավասարումն արմատ չունի:

3. $a = b$ հավասարման ամենափոքր ամբողջ արմատը (-3)-ն է:

4. $-6 < a \leq 0$ դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ երկու արմատ:

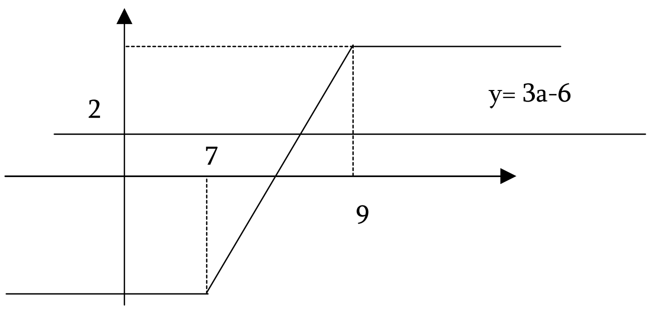
5. $0 < a < b$ դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ մեկ արմատ:

6. Եթե հավասարումն ունի ճիշտ երկու արմատ, ապա դրանց գումարը (-a) է [4, 232]:

Օրինակ 2: a-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $|x-7|-|x-9| = 3a-6$ հավասարումն ունի մեկ լուծում:

Կառուցենք հավասարման ձախ մասի գրաֆիկն ըստ գրաֆիկ 4-ի, իսկ աջ մասի գրաֆիկը ox առանցքին զուգահեռ ուղիղ է (կարող է նաև համընկնել, եթե $3a-6=0$) (նկ. 9): Խնդրի պայմանը տեղի կունենա, եթե

$$-2 < 3a-6 < 2; 4 < 3a < 8 \Rightarrow \frac{4}{3} < a < \frac{8}{3}; a \in (\frac{4}{3}; \frac{8}{3})$$



Նկ. 9

Օրինակ 3: Տրված է $\sqrt{8-x^2} = a - x$ հավասարումը.

ա) a-ի ի՞նչ ամբողջ արժեքի դեպքում հավասարումն ունի 2 արմատ:

բ) a-ի քանի՞ բնական արժեքի դեպքում հավասարումն ունի միակ արմատ:

գ) a-ի քանի՞ ամբողջ արժեքի դեպքում հավասարումն արմատ ունի:

Ըստ «գրաֆիկ 7»-ի՝ հավասարման ձախ մասի գրաֆիկը կիսաշրջան է: Իսկ աջ մասի գրաֆիկը $y = -x$ գրաֆիկից է ստացվում (նկ. 10):

բ) ենթակետի պահանջը տեղի ունի, երբ

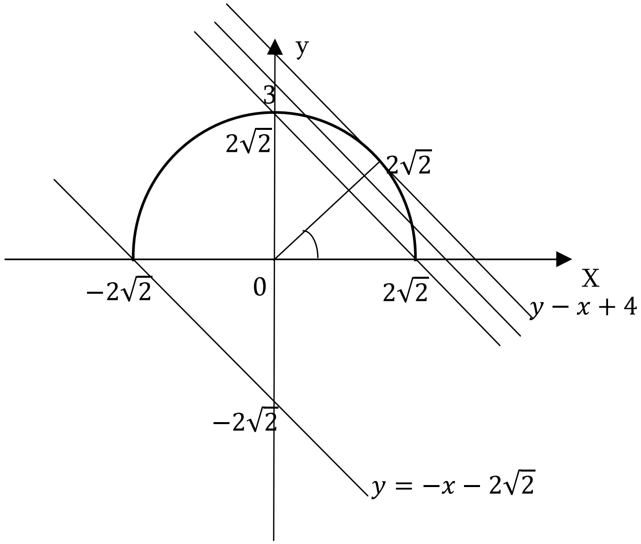
$a \in \lfloor -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{4\}$, վերցնենք $a \in N$; $a = 1; 2; 4$ *Պատ՝ 3 հատ:*

ա) պահանջը տեղի ունի՝

$a \in \lfloor -2\sqrt{2}; 4)$ $a = 3$; *Պատ՝ 3:*

գ) պահանջը տեղի ունի, երբ

$a \in \lfloor -2\sqrt{2}\,; 4 \rfloor; a \in Z; \Rightarrow a = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$ *Պատ՝ 7:*



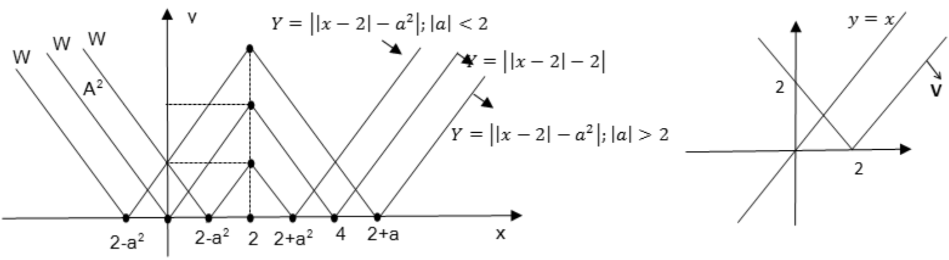
Նկ. 10

<u>Օրինակ 4</u>: Տրված է a պարամետրով $\big||x-2| - a^2\big| = $ x հավասարումը

ա) Գոյություն չունի a-ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում հավասարումն ունենա անթիվ բազմությամբ արմատներ:

բ) a-ի ցանկացած արժեքի դեպքում հավասարումն ունի արմատ:

գ) Եթե $a \neq \pm\sqrt{2}$ ապա հավասարումն ունի միակ արմատ:



Նկ. 11

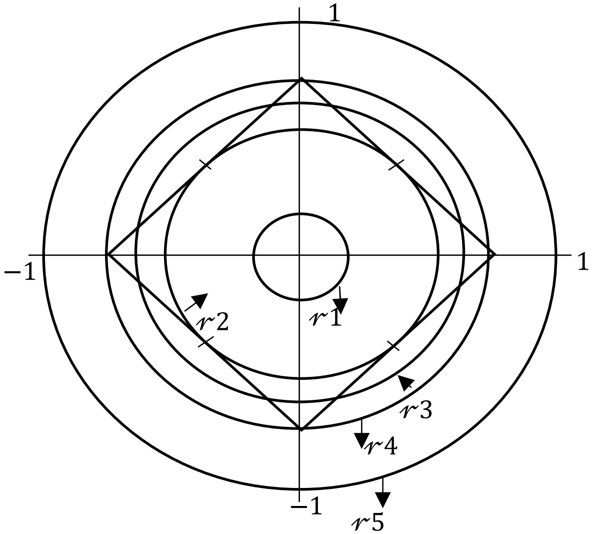
Ըստ «գրաֆիկ 5»-ի ձախ մասի գրաֆիկը «W»-ի գրաֆիկն է (եթե

$a = 0$, կստացվի գրաֆիկ «V») (նկ. 11):

ա) Եթե $a = \sqrt{2}$; «W1» գրաֆիկը և հավասարման աջ մասի $y = x$ հատվում են անթիվ բազմությամբ կետերում, հետևաբար պնդումը սխալ է:

բ) $y = x$ ուղիղ հատում է և «W1; W2; W3» գրաֆիկները և «V» գրաֆիկը մի կետում, հետևաբար պնդումը ճիշտ է:

գ) Եթե $a = \pm\sqrt{2}$դեպքում ստացվում է «W1» գրաֆիկը, եթե $a \neq \pm\sqrt{2}$, ստացվում է «W2; W3; V» գրաֆիկներ, որոնք $y = x$ ուղղի հետ հատվում է մի կետում [3, 88]:



Նկ.12

<u>Օրինակ 5</u>: Տրված է a պարամետրով $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ համակարգը.

ա) Համակարգը չի կարող ունենալ 3 լուծում:

բ) Համակարգը չի կարող ունենալ 4-ից ավելի լուծում:

գ) Համակարգն ունի լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |a| \leq 1$:

Ըստ «գրաֆիկ 8»-ի համակարգի առաջին հավասարման գրաֆիկը քառակուսի է, իսկ երկրորդի գրաֆիկը՝ շրջանագիծ, որի շառավիղը $|a|$-ն է: Կառուցենք գրաֆիկները (նկ. 12):

Եթե նկատում ենք, «r1» շրջանագիծն ունի $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ շառավիղ, այն քառակուսու հետ չի հատվում, եթե «r2» շրջանագիծն ունի $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ շառավիղ, այն քառակուսու հետ ունի 4 հատում; «r3» շրջանագիծը քառակուսու հետ ունի 8 հատման կետ, եթե շառավիղը $\frac{\sqrt{2}}{2} < r < 1$; «u4» շրջանագծի շառավիղը՝ $r = 1$ և քառակուսին հատում է 4 կետ.

ա) պնդումը կստացվի սխալ

բ) քանի որ «r3» և քառակուսին հատվում են 8 հատ կետում, պնդումը սխալ է:

գ) գրաֆիկից պարզ երևում է, որ եթե $\begin{cases} a > 1 \\ a < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ շրջանագիծը և քառակուսին չեն հատվում, հետևաբար պնդումը ճիշտ է:

Նմանատիպ օրինակները շատ են:

Հաճախ աշակերտների համար դժվար է լինում կողմնորոշվել՝ ինչպես լուծել պարամետր պարունակող հավասարումները և ոչ միայն պարամետր պարունակող, այլև այն վարժությունները, որոնց լուծման ընթացքում օգտագործվում են ֆունկցիաների գրաֆիկներ: Այդ իսկ պատճառով գրաֆիկները նմանեցրել ենք ինչ որ պատկերի, որի արդյունքում սովորողներն ավելի արագ կկողմնորոշվեն ճիշտ գծագրեր կատարելու մեջ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Այվազյան Է. Ի., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, Երևան, 2011 թ.,
2. Առաքելյան Կ. Գ., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, Երևան, 2009թ.,
3. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, Երևան, 2011 թ.,
4. Մաթեմատիկայի թեստային առաջադրանքների շտեմարան, մաս 3, Երևան, Հալ ընդ Հաշ Փրինթ, 2013 թ.
5. Шагин В. Л., Соколов А. В., Функции и графики, Москва, Вита, 2007 г.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

Резюме

Ключевые слова: *координатная плоскость, построение графика, уравнение, параметр, видоизменение графиков.*

Изучая решения уравнений, содержащих параметр, мы пришли к выводу, что графический метод решения уравнений является интересным и удобным методом для решения такого рода уравнений. Исходя из этого, считаю необходимым для начала изучить построение нескольких видов графиков на координатной плоскости, а затем, используя полученные результаты, решить параметрические уравнения, классифицируя их по типу.

Работа предназначена не только для учителей, но и для учеников старших классов.

GRAPHICAL METHOD FOR SOLVING EQUATIONS CONTAINING A PARAMETER

Summary

Key words: *coordinate plane, graph building, equation, parameter, graphic's transformation.*

Studying solutions of equations containing parameter, I came to the conclusion that the graphical method for solving equations is a very interesting and convenient method for such type of equations. Taking into consideration the above mentioned issue, I think, it is necessary first to study the construction of several types of graphs on the coordinate plane, and then using the results solve equations containing parameter classifying them by types.

This article can be helpful not only for teachers but also for students studying in high schools.