ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

«ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ.ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ» ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ **«Եռանկյան բարձրության, միջնագծի և կիսորդի որոշումը հայտնի տվյալներով»**

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ **Անուշ Գալստյան**

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ **Մ. Սաքանյան**

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

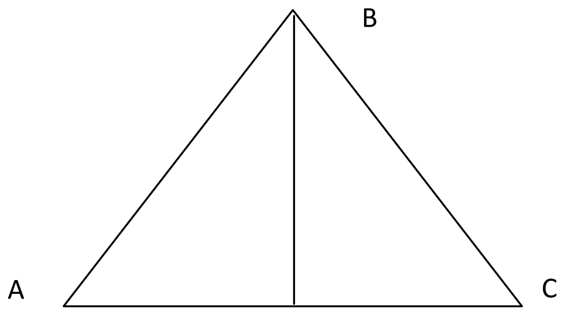
Երկրաչափության դասընթացում ամենից շատ օգտագործվող հասկացություններից մեկը եռանկյունն է: Եռանկյուն հասկացությանը 7-րդ դասարանի երկրաչափության դասընթացում նվիրված է դասագրքի երկրորդ գլուխը (<<Եռանկյուններ>>): Որտեղ տալիս է եռանկյան նկարագիրը, սահմանում եռանկյան միջնագծերը, կիսորդները և բարձրությունները: Իսկ 8-րդ դասարանի երկրաչափության դասագրքում, <<Եռանկյան չորս նշանավոր կետերը>> թեմայում տրված են եռանկյան միջնագծերի, կիսորդների և բարձրությունների հատկությունները: 9-րդ դասարանի երկրաչափության <<Նման եռանկյուններ>> գլխում եռանկյունների նմանության կիրառությամբ ապացուցում են եռանկյան միջնագծերի, կիսորդների և բարձրությունների հատկությունները:

Աշխատանքում սահմանված է եռանկյան մեջ մի նոր հասկացություն՝ սիմեդիան, որը դպրոցական դասընթացում չեն ուսումնասիրում: Սիմեդիանի, ինչպես նաև եռանկյան միջնագծերի, կիսորդների և բարձրությունների մի շարք հատկություննեի իմացությունը (մի մասը ներառված չեն երկրաչաթության դպրոցական ծրագրում) բավականին պարզեցնում են խնդիրների լուծման ընթացքը:

Աշխատանքի վերջին պարագրաֆում լուծված են եռանկյան վերաբերյալ բարդ խնդիրներ, օգտվելով նախորդ պարագրաֆներում նշված սահմանումներից և թեորեմներից:

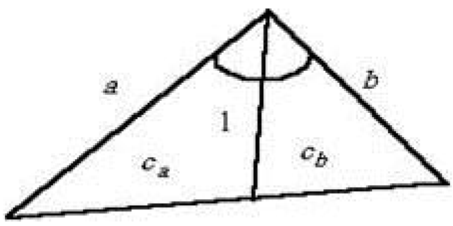
§1. ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿԻՍՈՐԴԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ, ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ և ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Սահմանում 1: Եռանկյան անկյան կիսորդի այն հատվածը, որն ընկած է եռանկյան ներսում, կոչվում է եռանկյան կիսորդ:



Տանք եռանկյան կիսորդի հիմնական հատկությունը:

Թեորեմա 1.1: Եռանկյան անկյան կիսորդը հանդիպակաց կողմը տրոհում է 2 հատվածների, որոնք համեմատական են կից կողմերին: [1]

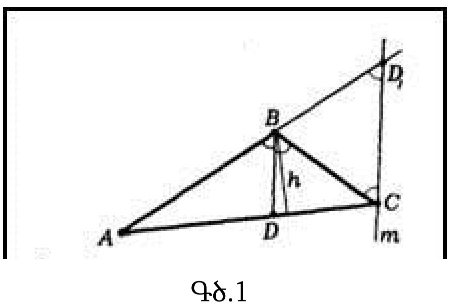


Հարմար է թեորեմը ձևակերպել այսպես,

ա) գոյություն ունի այնպիսի t, որ $c_a = at,\ c_b = bt$

բ) գոյություն ունի այնպիսի k, որ $a = k \cdot c_a,\ b = k \cdot c_b$

Թեորեմ 1′: ABC եռանկյան ներքին անկյան BD կիսորդը հանդիպաակաց կողմը տրոհում է 2 հատվածների, որոնք համեմատական են եռանկյան BC և BA կողմերին:



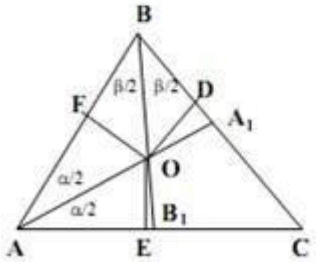
Գծ.1

Ապացույց: C կետով տանենք BD -ին զուգահեռ m ուղիղը: Ապա m∩AB=D_1 և $\Delta ABD \sim \Delta AD_1C$, քանի որ $\angle ABD = \angle CBD = \angle BCD_1 = \angle CD_1B$ կստանանք $BC = BD_1$, և $AD_1 : AB = AC : AD$: Այստեղից հաջորդաբար կստանանք. $(AB + BC) : AB = (AD +$

$DC)$: $AD \to 1 + BC$: $AB = 1 + DC$: AD, որտեղից հետևում է, որ BC: $AB = DC$: AD , ինչը և պահանջում էր ապացուցել:

Թեորեմա 2: Եռանկյան կիսորդները հատվում են մեկ կետում:

Ապացույց:



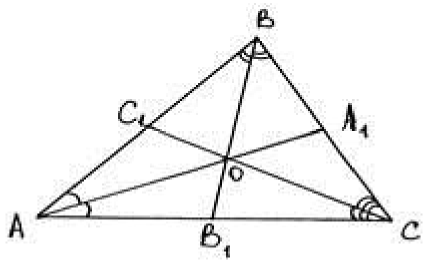
Գծ.2

Թող O-ն AA_1 և BB_1 կիսորդների հատման կետն է: D, E ,F կետերը O կետից համապատասխան AB< BC և AC կողմերին իջեցրած ուղղահայացների հիմքերը (տես գծ.14): ΔAOE=ΔAOF⟹ OE=OF: Համանման ձևով ΔBOF=ΔBOD, որտեղից կստանանք OF=OD: Հետևաբար OE=OD, նշանակում է ΔOCD=ΔOCE: Որտեղից հետևում է $\angle OCD = \angle OCE$, այսինքն CO-ն $\angle DCE$ -ի կիսորդն է, ինչը նշանակում է, որ երրորդ կիսորդը անցնում է մյուս երկու կիսորդների հատման կետով:

Դիտողություն: Կատարված ապացույցից հետևում է, որ կիսորդների հատման կետը հավասարապես է հեռացված եռանկյան բոլոր կողմերից, այսինքն այն հանդիսանում է եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը:

Շրջանագիծը, որը շոշոփում է եռանկյան մի կողմը և մյուս երկու կողմերի շարունակությունները, չի կոչվում ներգծված: Ճիշտ նույն դատողություններով կարելի է ապացուցել, որ եռանկյան մեկ ներքին անկյան կիսորդը և 2 արտաքին անկյունների կիսորդների հատան կետը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է:

Թեորեմա 1.2: Յուրաքանչյուր կիսորդ՝ կիսորդների հատման կետով բաժանվում է կողմերի գումարի և հանդիպակաց կողմի հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:



Գծ.3

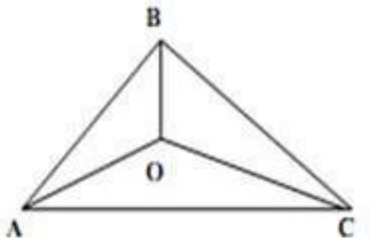
Թող O-ն լինի կիսորդների հատման կետը, AB=c, BC=a< AC=b: Ապա

$$\begin{cases} BA_1 + A_1C = a \\ \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{c}{a} \end{cases}, \text{որտեղից} \quad BA_1 = \frac{ac}{a+b}, \quad AC = \frac{ab}{b+c}$$

Քանի որ AO-ն BAC եռանկյան ներքին անկյան կիսորդն է, ապա $AO{:}\,OA_1 = AB_1{:}\,B_1C + AC_1{:}\,C_1B$: Ըստ Վան-Օբելի թեորեմի: Որտեղից կստանանք $AO{:}\,OA_1 = (c+b){:}\,a$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.3: Եթե O-ն ABC եռանկյան կիսորդների հատման կետն է և $\angle ABC = \beta$, ապա $\angle AOC = 90^0 + \frac{\beta}{2}$:



Գծ.4

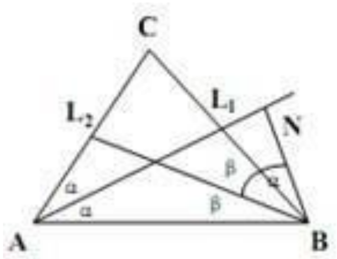
Ապացույց: Թող $\angle A = \alpha,\ \angle B = \beta,\ \angle C = \gamma$ (Գծ.16): $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$,

$0{,}5\alpha - 0{,}5\gamma = 180^0 - 0{,}5(180^0 - \beta) = 90^0 + 0{,}5\beta = 90^0 + \frac{\beta}{2}$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Տանք հավասարասրուն եռանկյան ևս մեկ հատկություն կամ Շտեյներ-Լեմուսի թեորեմը:

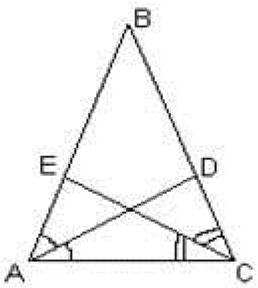
Թեորեմ 1.4: Եթե եռանկյան երկու կիսորդները հավասար են, ապա եռանկյունը հավասարասրուն է:



Գծ.5

Ապացույց 1: Թող $> \beta$, $AL_1 = BL_2$: Ապա $2\alpha > \alpha + \beta$: BL_2 ճառագայթով առանձնացնենք α անկյուն, N կետը AL_1 կիսորդի և այդ ճառագայթի հատման կետն է: Ապա AN> AL_1; AL_2L_1B քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Այնտեղ $\alpha + \beta < 2\alpha$, որտեղից հետևում է, որ AN<$BL_2 = AL_1$: Ստացվեց հակասություն:

Համանման ձևով կստանանք հակասություն, եթե ենթադրենք, որ $\alpha < \beta$: Մնում է ենթադրել,որ $\alpha = \beta \Longrightarrow 2\alpha = 2\beta \Longrightarrow \angle BAC = \angle ABC$:Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:



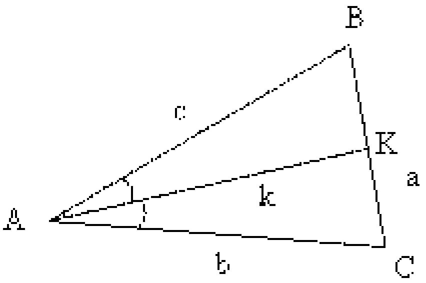
Գծ.6

Ապացույց 2: Թող ABC եռանկյան մեջ $l_a = l_c$, բայց a ≠ c: Դիտարկենք

$l_a = \dfrac{2bc \cdot \cos 0{,}5\alpha}{b+c}$ և $l_c = \dfrac{2ab \cdot \cos 0{,}5\gamma}{a+b}$: Առանց ընդհանրությունը փոխելու‚ ենթադրենք a > c, այդ դեպքում $\alpha > \gamma$ $\Leftrightarrow$

$0{,}5\alpha > 0{,}5\gamma \Rightarrow \cos 0{,}5\alpha < \cos 0{,}5\gamma$, քանի որ այդ անկյունները սուր են: Համեմատենք. $\dfrac{bc}{b+c} - \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{b^2(c-a)}{(b+c)(a+b)} < 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{bc}{b+c} < \dfrac{ab}{a+b}$. Այսպիսով , ստացանք որ $l_a < l_c$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը: Հետևաբար a=c: Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Թեորեմա 1.5: Եռանկյան կիսորդի երկարությունը հավասար է անկյունը կազմող կողմերի կրկնապատիկ արտադրյալի հարաբերությանը այդ եռանկյանը կազմող կողմերի գումարին և այդ գագաթի անկյան կեսի կասինուսի արտադրյալին:



Գծ.7

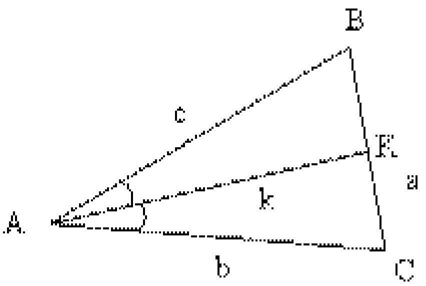
Ապացույց:

Տրված է ABC եռանկյուն, AK կիսորդը: Ապացուցել, որ k= $\frac{2bc}{b+c}*\cos\frac{A}{2}$:

Թող AB = c, BC = a, AC = b, AK = k. (գծ.7): $S_{\Delta\,ABC} = S_{\Delta\,ABK} + S_{\Delta\,AKC}$, $\frac{cb}{2}$. sin A = $\frac{ck}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}+\frac{bk}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$, քանի որ $\sin A = 2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$: Այստեղից կստանանք $cb\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2} = \frac{ck}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}+\frac{bk}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$:

$2bc\cdot\cos\frac{A}{2} = k(c+b) \quad\Longrightarrow k = \frac{2bc}{b+c}*\cos\frac{A}{2}$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմա 1.6: Եռանկյան կիսորդի երկարության քառակուսին հավասար է այդ անկյունը կազմող կողմերի արտադրյալի և հանդիպակաց կողմի վրա առաջացած հատվածների արտադրյալի տարբերությանը:



Գծ.8

Ապացույց: Թող AB = c, BK = x, KC = y, AC = b, AK = k. Ըստ կոսինուսների թեորեմի

$cos\ \angle AKB = \frac{k^2+x^2-c^2}{2xk}$, cos ∠AKC = $\frac{k^2+y^2-b^2}{2yk}$.

cos ∠AMB = -cos ∠AMC => $\frac{k^2+x^2-c^2}{2xk} = \frac{-k^2-y^2+b^2}{2yk}$

$k^2y + x^2y - c^2y = -k^2x - y^2x + b^2x \Rightarrow k^2y + k^2x = b^2x + c^2y - x^2y - y^2x$

$k^2 = \frac{b^2x+c^2y}{x+y} - \frac{xy(x+y)}{x+y}$, $k^2 = \frac{b^2x+c^2y}{x+y} - xy$ (*)

$\frac{x}{c} = \frac{y}{b} \Rightarrow c = \frac{xb}{y}$

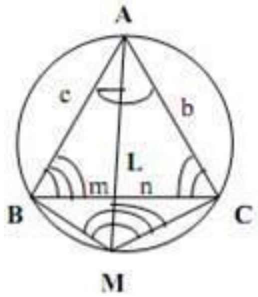
$$\frac{b^2x+c^2y}{x+y} = \frac{b^2x+\frac{b^2x^2y}{y^2}}{x+y} = \frac{b^2xy+b^2x^2}{y(x+y)} = \frac{b^2x(x+y)}{y(x+y)} = b\frac{bx}{y} = bc$$

Ստացված արժեքը տեղադրենք (*)-ում կստանանք՝ $k^2 = bc - xy$:

Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Թեորեմա 1.7: Թող a,b,c-ն եռանկյան կողմերն են , l_a -ն a կողմին տարված կիսորդը:

Ապա $l_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$.



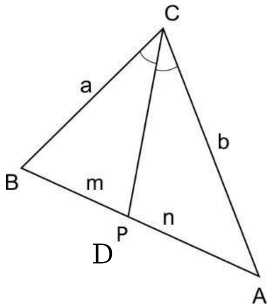
Գծ.9

Ապացույց: Թող m = BL, n = LC, k = LM. Ապա m · n = l · k $m = \frac{ac}{b+c}$, $n = \frac{ab}{b+c}$.

ABL և AMC եռանկյունների նմանությունից ունենք $\frac{l_a}{c} = \frac{b}{l_a+k}$. $l_a^2 = b \cdot c - l_a \cdot k$. Այստեղից

$l_a^2 = b \cdot c - m \cdot n$, $l_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$. Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմա 1.8։ Կիսորդի երկարությունը նրա 2 կողմերով և նրանց կազմած անկյունով՝ $l = \frac{2abcos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$։



Գծ.10 տանք եռանկյան մակերեսի միջոցով։

$$S_{ABC} = \frac{2absin\gamma}{2}, \quad S_{ABC} = S_{BCD} + S_{DCA} = \frac{asin\frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{blsin\frac{\gamma}{2}}{2}$$

$$\frac{absin\gamma}{2} = \frac{asin\frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{blsin\frac{\gamma}{2}}{2}$$

Հավասարությունը բազմապատկենք 2-ով,իսկ $sin\gamma$ -ն փոխարինենք $2sin\frac{\gamma}{2}cos\frac{\gamma}{2}$ -ով։ Եվ քանի որ $sin\frac{\gamma}{2} \neq 0$,բաժանենք $sin\frac{\gamma}{2}$ -ի։ Կստանանք՝

$$2abcos\frac{\gamma}{2} = l(a+b) \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

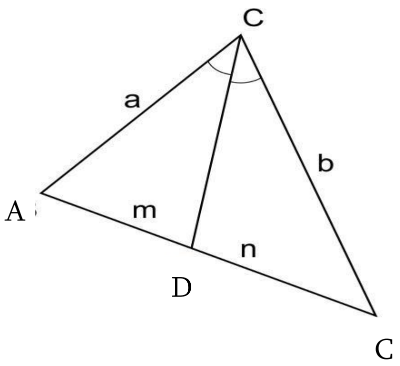
Թեորեմն ապացուցված է։

Հետևանք։ Ուղղանկյուն եռանկյան մեջ $\frac{\gamma}{2} = 45^0$, ինչի պատճառով ներքնաձիգին իջեցված կիսորդը $l = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$,որտեղ a և b-ն էջերն են։

Թեորեմա 1.9։ Կիսորդի երկարությունը եռանկյան կողմերի միջոցով.

$$l = \frac{\sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)}}{a+b}$$

B



Գծ.11

Ապացույց: m-ը և n-ը արտահայտենք եռանկյան կողմերի միջոցով: Կստանանք

$$\begin{cases} m+n=c \\ \frac{a}{b}=\frac{m}{n} \end{cases}, \quad n=\frac{bm}{a}, \quad m+\frac{bm}{a}=c$$

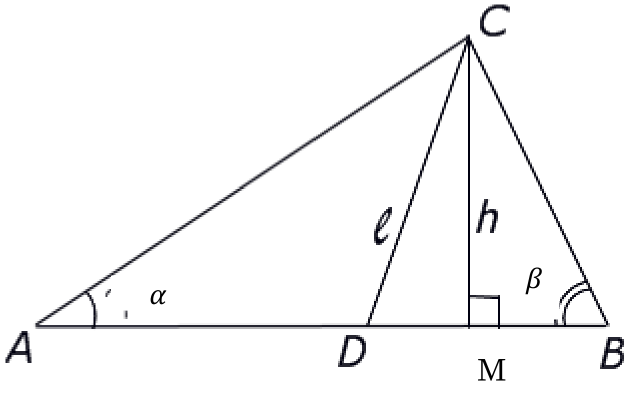
$$m\left(1+\frac{b}{a}\right)=c, \quad \frac{m(a+b)}{a}=c, \quad m=\frac{ca}{a+b}, \quad n=\frac{cb}{a+b}:$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով Թեորեմա 7-ի կիսորդի հաշվման բանաձևի մեջ կստանանք՝

$$l^2=ab-mn=ab-\frac{c^2ab}{(a+b)^2}=\frac{ab((a+b)^2-c^2)}{(a+b)^2},$$

$$l=\frac{\sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)}}{a+b}:$$ Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմա 1.10: Եռանկյան նույն գագաթից տարված բարձրության և կիսորդի կազմած անկյունը հավասար է $\frac{\beta-\alpha}{2}$:



Գծ.12

Ապացույց: Թող CM=h բարձրություն է, իսկ CD=l կիսորդը, որոնք տարված են նույն գագաթից: Գտնենք բարձրության և կիսորդի կազմած անկյունը:

$\Delta ABC -$ ում՝ $\angle BCD = \dfrac{180^0 - (\alpha + \beta)}{2} = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = 90^0 - \beta$:

$\Delta BCM -$ ում՝ $\angle M = 90^0$, $\angle BCM = \angle MCD = \angle BCD - \angle BCM =$

$$= 90^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - (90^0 - \beta) = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմա 1.11: Կիսորդի երկարությունը բարձրության միջոցով հավասար է՝

$$l = \frac{h}{\cos\frac{\beta - \alpha}{2}}$$

Ապացույց: ΔCMD- ում՝ $\angle M = 90^0$, (Գծ. 12)

$$l = \frac{h}{\cos\frac{\beta - \alpha}{2}}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

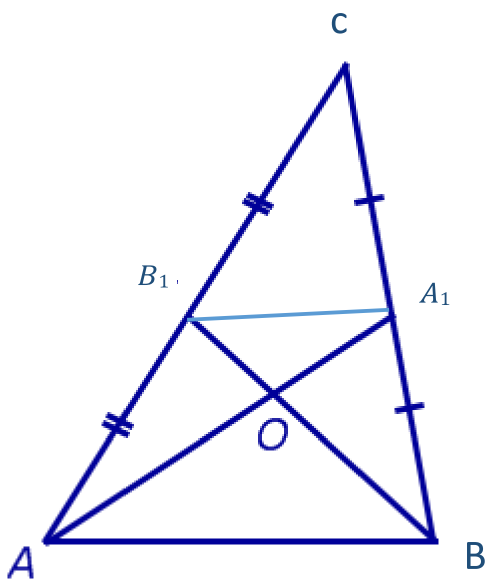
§2. ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԻՋՆԱԳԾԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ, ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ և ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Սահմանում: Եռանկյան գագաթը հանդիպակաց կողմի միջնակետին միացնող հատվածը կոչվում է եռանկյան միջնագիծ:

Տանք միջնագծի հիմնական հատկությունը:

Թեորեմ 2.1: Եռանյան միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով տրոհվում են 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

Ապացույց:



Գծ.13

ΔABC-ում O տառով նշանակենք AA_1 և BB_1 միջնագծերի հատման կետը և տանենք A_1B_1 միջին գիծը: Քանի որA_1B_1-ը զուգահեռ է AB կողմին, ուրեմն ∠1=∠2 և ∠3=∠4: Հետևաբար Δ AOB~ Δ A_1OB_1, ըստ երկու անկյունների: Դա նշանակում է, որ այդ եռանկյունների կողմերը համեմատական են՝

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{B0}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

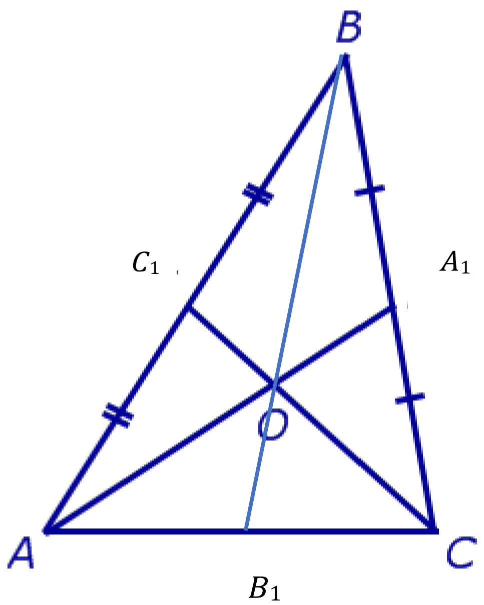
Բայց, քանի որ $AB = 2A_1B_1$ ապա $AO = 2A_1O$ և $BO = 2B_1O$: Այսպիսով AA_1 և BB_1 միջնագծերից յուրաքանչյուրը հատման կետով տրոհվում է 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

Նույն կերպ ապացուցվում է, որ BB_1 և CC_1 միջնագծերը ևս հատման կետով տրոհվում են 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից: Այսինքն այդ հատման կետը համընկնում է O կետի հետ:

Ապացույցն ավարտված է:

Թեորեմա 2.2: Եռանկյան միջնագծերը եռանկյունը տրոհում են վեց հավասարամեծ եռանկյունների:

Ապացույց:



Գծ.14

Ապացույցի համար օգտվենք այն փաստից, որ միջնագիծը եռանկյունը տրոհում է երկու հավասարամեծ եռանկյունների . AA_1B և AA_1C եռանկյունների մակերեսները հավասար են: Ըստ թեորեմա 2.1-ի միջնագծերը հատվում են մեկ O կետում : Քանի որ A_1, B_1 և C_1 կետերը եռանկյան կողմերի միջնակետերն են , ապա BOA_1, AA_1B, և AA_1C-ն հավասարամեծ են: Այսինքն AZB և AZC եռանկյունները ևս հավասարամեծ են: Բայց AZB և AZC կազմված են երկու՝ մակերեսով իրար հավասար եռանկյուններից: Հետևաբար բոլոր վեց եռանկյունների մակերեսներն իրար հավասար են:

Ապացույցն ավարտված է:

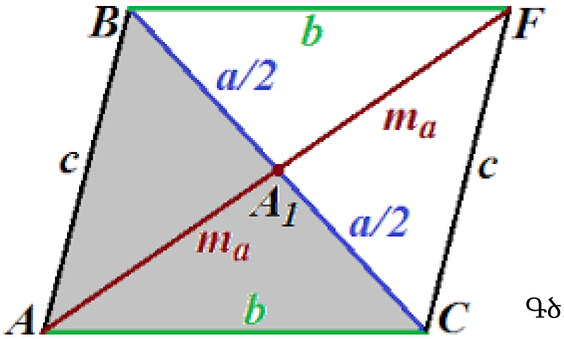
Թեորեմա 2.3: Միջնագիծը եռանկյան կողմերի միջոցով որոշվում է հետևյալ բանաձևերով.

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + a^2) - c^2}\,։$$

Ապացույց։



Գծ.15

Դիցուք տրված են ABC եռանկյան կողմերը. AB=c, BC=a, AC=b։ Գտնենք $AA_1 = m_a$ միջնագծի երկարությունը։ Դրա համար ABC եռանկյունը լրացնենք մինչև ABFC զուգահեռագիծ. Տանենք BF∥AC և CF∥AB։ A_1-ը կհանդիսանա զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետը։ Հետևաբար AF=2m_a, իսկ BC=a։ Օգտվելով այն թեորեմից, որ զուգահեռագծի անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա բոլոր կյողմերի քառակուսիների գումարին (կոսինուսների թեորեմի հետևանքը).

$$4{m_a}^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$$

$${m_a}^2 = \frac{1}{4}(2(b^2 + a^2) - c^2)$$

Անալոգ ձևով ստացվում են մյուս բանաձևերը։

Ապացույցն ավարտված է։

Թեորեմ 2.4: Եռանկյան բոլոր միջնագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա երեք կողմերի քառակուսիների գումարի $^3/_4$ մասին։

Թեորեմ 2.5 /Լեյբնիցի թեորեմ/: Թող M–ը հարթության կամայական կետ է, G-ն ABC եռանկյան ծանրության կենտրոնը։ Ապա տեղի ունի հետևյալ նույնությունը

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2);$$

Նշենք հավասարասրուն եռանկյան միջնագծերի հատկությունները:

Թեորեմա 2.6: Հավասարասրուն եռանկյան մեջ սրունքներին տարված միջնագծերը հավասար են, իսկ երրորդ միջնագիծը միաժամանակ և կիսորդ է, և բարձրություն: Ճիշտ է նաև այս թեորեմի հակադարձը:

Թեորեմա 2.7: Հավասարակողմ եռանկյան բոլոր միջնագծերը իրար հավասար են:

Նշենք մի քանի այլ հատկություններ կապված միջնագծերի հետ:

Թեորեմա 2.8: Ոչ հավաարակողմ եռանկյան կամայական գագաթից տարված կիսորդն ընկած է այդ նույն գագաթից տարված բարձրության և միջնագծի միջև:

Թեորեմա 2.9: Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին:

Թեորեմա 2.10: Եռանկյան մեծ կողմին համապատասխանում է փոքր միջնագիծ:

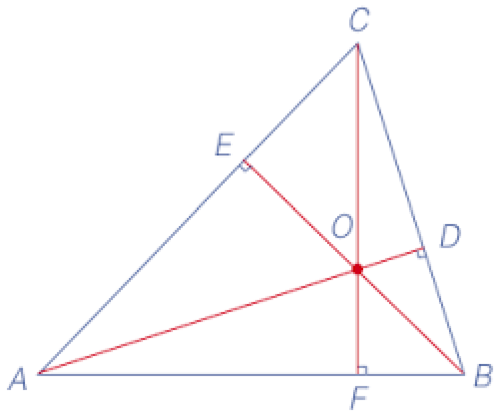
§3. Եռանկյան բարձրության սահմանումը, հատկությունները և երկարության հաշվումը

Սահմանում: Եռանկյան գագաթից հանդիպակաց կողմն ընդգրկող ուղղին տարված ուղղահայացը կոչվում է եռանկյան բարձրություն:

Տանք եռանկյան բարձրության հիմնական հատկությունները:

Թեորեմ 3.1: Բարձրությունները կամ նրանց շարունակությունները հատվում են մեկ կետում, այդ կետը կոչվում է եռանկյան օրթոկենտրոն:

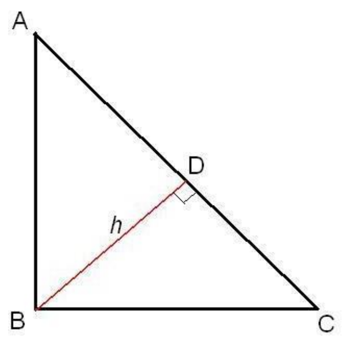
Թեորեմ 3.2: Եթե AD, BE, CF–ը ABC եռանկյան բարձրություններն են, իսկ O–ն՝ օրթոկենտրոնը, ապա $AO \cdot OD = BO \cdot OE = CO \cdot OF$;



Գծ.16

Թեորեմ 3.3: Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից ներքնաձիգին տարված բարձրությունը եռանկյունը բաժանում է երկու եռանկյունների, որոնք նման են իրար և տրված եռանկյանը.

$$\Delta ADC \sim \Delta CDB \sim \Delta ACB$$



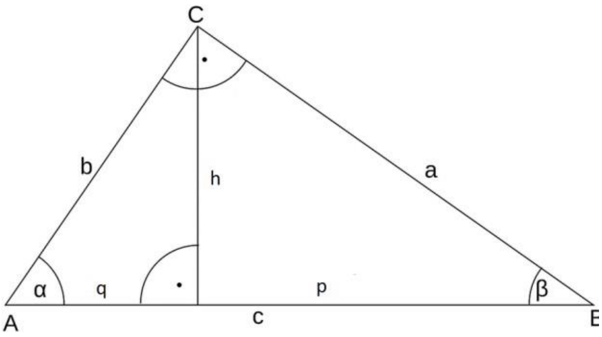
Գծ.17

Թեորեմա 3.4: C գագաթից տարված բարձրությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$h_c = bsinA$$

$$h_c = asinB$$

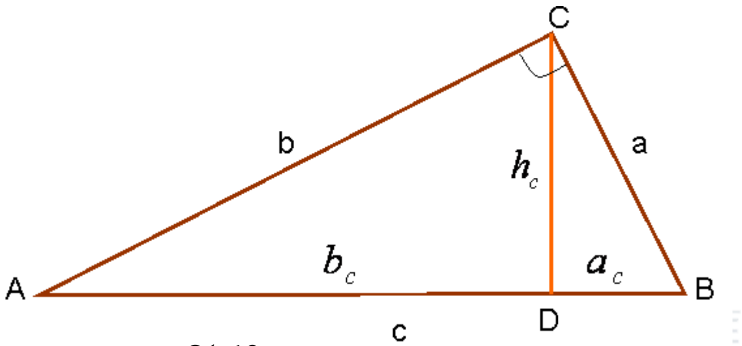
$$h_c = \frac{2S}{c}$$



որտեղ S-ը ABC եռանկյան մակերեսն է:

Գծ.18

Թեորեմա 3.5: Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից ներքնաձիգին տարված բարձրության քառակուսին հավասար է ներքնաձիգի վրա առաջացած հատվածների արտադրյալին:



Գծ.19

$$h_c{}^2 = a_c \cdot b_c$$

Թեորեմա 3.6: Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից ներքնաձիգին տարված բարձրությունը որոշվում է $h = \frac{ab}{c}$ բանաձևով:

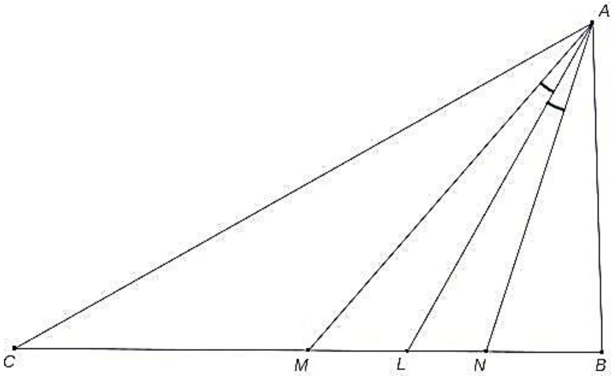
Դիտողություն: Ուղղանկյուն եռանկյան մյուս երկու բարձրությունները նրա էջերն են:

Թեորեմա 3.7: Հավասարակողմ եռանկյան բարձրությունը որոշվում է $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ բանաձևով:

§4. Եռանկյան սիմեդիանի սահմանումը, հատկությունները և երկարության հաշվումը

Սահմանում 1: Եռանկյան սիմեդիանը եռանկյան նույն գագաթից տարված միջնագծի համաչափն է կիսորդի նկատմամբ:

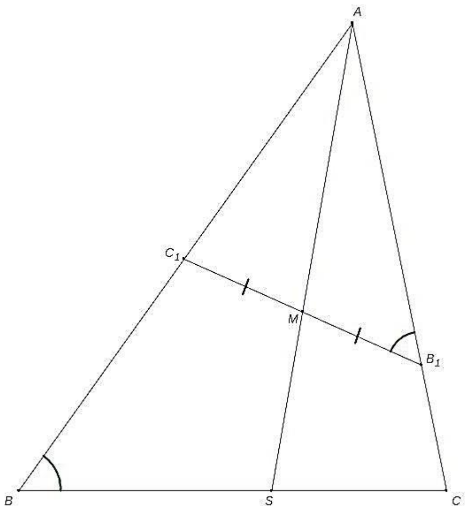
Սահմանում 2: Եռանկյան սիմեդիանը այն հատվածն է, որը հանդիպակաց կողմը տրոհում է կից կողմերի քառակուսիներին համեմատական մասերի:



$$\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Գծ.20

Լեմմա: Եռանկյան մեջ տարված է հատված, որը զուգահեռ չէ ոչ մի կողմին: Այդ դեպքում մեծ եռանկյան միջնագիծը և փոքր եռանկյան սիմեդիանը գտնվում են մեկ ուղղի վրա:

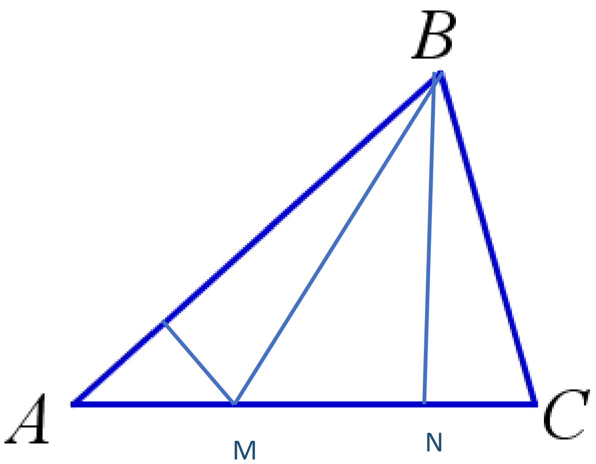


Գծ.21

Ապացույց: Դիտարկենք համաչափություն անկյան կիսորդի նկատմամբ: և կետերի համափաչները կպատկանեն համապատասխանաբար և ուղիղներին, ընդ որում ստացված հատվածը զուգահեռ է –ին: Հետևաբար նրա միջնակետն ընկած է եռանկյան միջնագծի վրա և միայն այդ դեպքում կլինի սիմեդիանը (ըստ Սահմանում 1-ի):

Խնդիրներ

Խնդիր 1: ABC եռանկյան B գագաթից տարած բարձրությունը և միջնագիծը անկյունը բաժանում են երեք հավասար մասերի: Գտնել եռանկյան անկյունները:



$BN \perp AC$

$MA = MC$

$\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$

$\angle A, \angle B, \angle C-?$

Գծ.22

Նշանակենք $\angle ABM = \alpha,\ MP \perp AB$

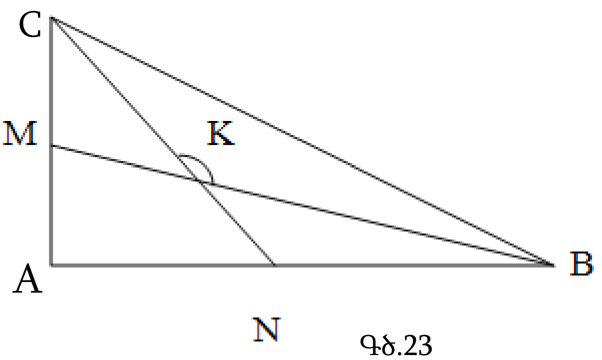
$MP \perp AB \Longrightarrow \Delta MPB = \Delta MNB \Rightarrow MP = MN;\ \ \angle MBN = \angle NBC$ և BN-ը ընդհանուր է $\Longrightarrow$ $\Delta MBN = \Delta NBC \Longrightarrow MN = NC; MP = NM = NC = \frac{AM}{2};\ MP = \frac{AM}{2} \Longrightarrow \angle A = 30^0$:

$\Delta ANB\ \angle A + 2\alpha = 90^0,\quad \alpha = 30^0, \angle B = 3\alpha = 90^0 \Longrightarrow \angle A + \angle C = 90^0,$

$\angle C = 90^0 - \angle A = 90^0 - 30^0 = 60^0$

Պատ.՝ $\angle A = 30^0, \angle B = 90^0, \angle C = 60^0$:

Խնդիր 2: Ուղղանկյուն եռանկյան էջերի երկարությունները 12սմ և 16սմ են: Գտնել սուր անկյունների գագաթներից տարված կիսորդների հիմքերը միացնող հատվածի երկարությունը:



$AC = 12$

$AB = 16$

$\angle ACN = \angle NCB$

$\angle ABM = \angle MBC$

$MN-?$

Գծ.23

Նշանակենք $\mathrm{MN = x, AM = m, AN = n}$

ΔABC-ից $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$

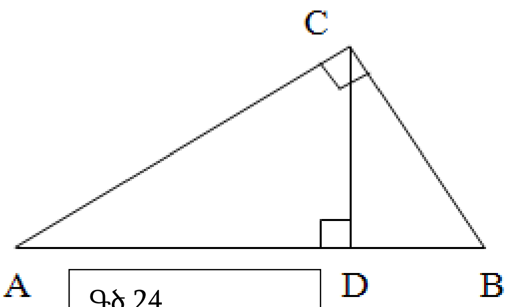
$$\angle 1 = \angle 2 \Longrightarrow \frac{CM}{MA} = \frac{BC}{BA}, \frac{12-m}{m} = \frac{20}{16}, \text{ որտեղից } m = \frac{16}{3}$$

$$\angle 3 = \angle 4 \Longrightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AC}{CB}, \frac{n}{16-n} = \frac{12}{20}, \text{ որտեղից } n = 6$$

ΔAMN − ից $MN = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 6^2} = \frac{2}{3}\sqrt{145}$:

Պատ.՝ $\frac{2}{3}\sqrt{145}$:

Խնդիր 3: ABC եռանկյան մեջ AB=3, AB կողմին տարված CD բարձրությունը հավասար է 3: CD բարձրության D հիմքն ընկած է AB կողմի վրա AD=BC: Գտնել AC–ն:



Գծ.24

AB=3

CD⊥ AB

CD=3

AD=BC

AC-?

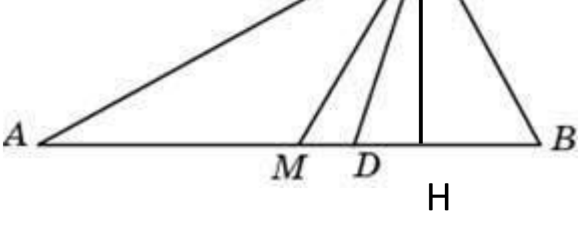
Նշանակենք AD = BC = x, BD = 3 − x;

ΔCDB-ից $9 + (3 - x)^2 = x^2$ որտեղից $x = 3 \Longrightarrow D \equiv B$:

ΔACD-ից $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$:

Պատ.՝ $3\sqrt{2}$:

Խնդիր 4: ABC եռանկյան C գագաթից տարված միջնագիծը, կիսորդը և բարձրությունը հավասար են համապատասխանաբար 6դմ, 5դմ և 2դմ: Գտնել AB կողմը:



AM=MB

CH⊥ AB

$\angle ACE = \angle ECB$

AM=6 , CE=5, CM=2

AB-?

ΔMCH-ից $MH=\sqrt{CM^2-CH^2}=4\sqrt{2}$

ΔECH-ից $EH=\sqrt{CE^2-CH^2}=\sqrt{21}$

Թող AM=MB=x: Ապա AH=x+MH, HB=x-MH, AE=x+ME, BE=x-ME: Ըստ եռանկյան կիսորդի հատկության՝

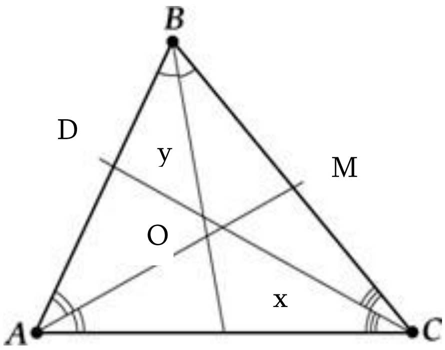
$\frac{AE}{BE}=\frac{AC}{BC}$, $\frac{AE^2}{BE^2}=\frac{AH^2+CH^2}{BH^2+CH^2}$ կամ $\left(\frac{x+4\sqrt{2}-\sqrt{21}}{x-4\sqrt{2}+\sqrt{21}}\right)^2=\frac{(x+4\sqrt{2})^2+4}{(x-4\sqrt{2})^2+4}$

$x=28-68\sqrt{\frac{2}{21}}$, $AB=2x=4\sqrt{7-\frac{17}{21}\sqrt{42}}$:

Պատ.՝ $4\sqrt{7-\frac{17}{21}\sqrt{42}}$:

Խնդիր 5: Ինչ հարաբերությամբ են բաժանվում եռանկյան կիսորդները հատման կետով:

Ինչպես հայտնի է եռանկյան միջնագծերը հատման կետով բաժանվում են 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից: Գտնենք թե ինչ հարաբերությամբ են բաժանվում եռանկյան կիսորդները հատման կետով:



Գծ.25

Լուծում: Թող CD=x,OD=y:Գտնենք x/y հարաբերությունը:

Եռանկյուն CDB-ից ըստ կիսորդի հատկության x/y=b/n: Ի նկատի ունենալով,որ n=bc/(a+b), կստանանք.

$$\frac{x}{y}=\frac{b(a+b)}{bc}=\frac{a+b}{c}$$

Պատ.՝ $\frac{x}{y}=\frac{a+b}{c}$:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Այս աշխատանքում տրված են եռանկյան կիսորդի, միջնագծի և բարձրության սահմանումները, նրանց հատկությունները և հաշվման տարբեր եղանակներ, որոնց մի մասը դասագրքերում նշված են որպես թեորեմներ, մի մասը գտնվում են խնդիրների բաժնում, որոշներն էլ դասագրքում ներառված չեն:

Աշխատանքի 4-րդ պարագրաֆում սահմանված է եռանկյան սիմեդիանը, որը դպրոցական դասընթացում չի ուսումնասիրվում: Սիմեդիանի և նրա հատկությունների իմացությունը միանգամայն հեշտացնում են բավականին բարդ երկրաչափական խնդիրների լուծումների ընթացքը:

Աշխատանքի վերջում լուծված են խնդիրներ տարբեր օլիմպիադաներից:

Այս աշխատանքը կարող է ծառայել որպես նյութ ԲՈՒՀ-ի ընդունելության նախապատրաստվելու համար. ինչպես տեսական, այնպես էլ գործնական մասով:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Աթանասյան ‘Երկրաչափության’ դասագիրք:
2. Шарыгин Н.Ф. ''Учимся решать задачи по геометрии''-1989-№2.
3. треугольник (ինտերնետ ռեսուրս)ru.wikipedia.org/
4. Ինտերնետ ռեսուրս kvant.mccme.ru

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
«ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ.ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ» ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ *ՄԻՋԻՆՆԵՐԸ ՄԵՂԱՆԻ ՄԵՋ*

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ *ԼԻԼԻԱ ԹԱՐՄԻՆՅԱՆ*

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ *ՄԵԼՍ ՍԱՔԱՆՅԱՆ*

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Սեղանի մասին իմ ուսումնասիրությունները սկսվեցին այն բանից հետո, երբ կամավոր ատեստավորման թեստում հանդիպեցի սեղանի մասին խնդիր, որտեղ հայտնի հիմքերով սեղանի մեջ տարված էր հիմքերին զուգահեռ հատված, որը սեղանը բաժանում էր հավասարամեծ սեղանների և անհրաժեշտ էր գտնել այդ հատվածի երկարությունը: Դա սեղանը ավելի խորությամբ ուսումնասիրելու խթան դարձավ: Արդյունքն ավելի քան գոհացուցիչ էր. ինձ համար բացահայտեցի հրաշալի փաստեր սեղանի մասին, որոնց իմացությունը շատ օգտակար կլինի թե՛ ուսուցիչների, թե՛ աշակերտների համար (հատկապես դիմորդների):

Այսպիսով հետազոտական աշխատանքի նպատակն է բացահայտել և ներկայացնել սեղանի հրաշալի հատկությունների մի փունջ, որի իմացությունը կհարստացնի երկրաչափական գիտելիքների անծայրածիր աշխարհը: Աշխատանքի խնդիրներն են

- Մատչելի և հիմնավոր ներկայացում և ապացույց
- Երկրաչափության և հանրահաշվի կապի բացահայտում և ներկայացում
- Գրականության արդյունավետ օգտագործում:

1. ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Նախ սահմնենք թվային միջինները a_1, a_2,... a_n դրական թվերի համար: [1]

Սահմանում: a_1, a_2,... a_n դրական թվերի համար

ա) $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ թիվը կոչվում է միջին թվաբանական,

բ) $G_n = \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n}$ թիվը կոչվում է միջին երկրաչափական,

գ) $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ թիվը կոչվում է միջին հարմոնիկ,

դ) $Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{2}}$ թիվը կոչվում է միջին քառակուսային:

Ընդ որում տեղի ունի հետևյալ կապը $\mathrm{H_n} \leq \mathrm{G_n} \leq \mathrm{A_n} \leq \mathrm{Q_n}$: Հավասարություն տեղի ունի,երբ $\mathrm{a_1}$, $\mathrm{a_2}$,... $\mathrm{a_n}$ արժեքները հավասար են:

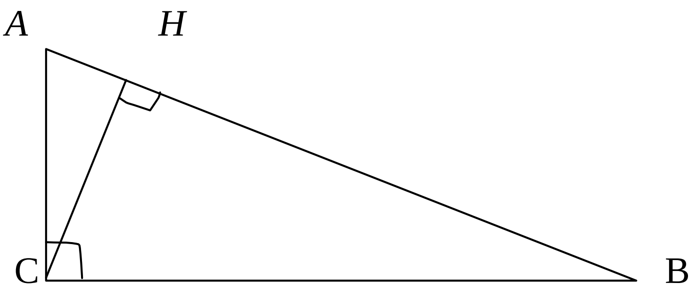
Միջին արժեքների հաշվարկը որոշ մեծությունների համար կենցաղում հաճախ հասկանում են միջին թվաբանականը. օրինակ միջին հասակ, միջին զանգված, միջին գնահատական, միջին աշխատավարձ, միջին տարիք և այլն: Մաթեմատիկայում գոյություն ունեն տարբեր միջիններ: Դիտարկենք առավել հաճախ հանդիպող միջինները երկու դրական թվերի համար:

1) միջին թվաբանական $m = \frac{a+b}{2}$
2) միջին երկրաչափական $g = \sqrt{ab}$
3) միջին հարմոնիկ $h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a + b}$
4) միջին քառակուսային $s = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

- ✓ Միջին արժեքները հաճախ հանդիպում են տեքստային տարբեր խնդիրների մեջ: Այդպիսի օրինակ է նավի միջին արագությունը այն դեպքում,երբ նույն հեռավորությունը նավն անցնում է v_1 արագությամբ, վերադառնում՝ v_2 արագությամբ: Այս տվյալներով նավի միջին արագությունը ստացվում է հավասար է արագությունների միջին հարմոնիկին.

$$V_{\text{միջին}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

- ✓ Միջին երկրաչափականը հանդիպում է ուղղանկյուն եռանկյան մեջ, որին անվանում են նաև միջին համեմատական: Երկրաչափության դպրոցական դասագրքում դիտարկվում են հետևյալ հատկությունները. [3]
- ➢ Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը միջին համեմատական է ներքնաձիգի այն հատվածներին, որոնց տրոհվում է ներքնաձիգը այդ բարձրությամբ:
- ➢ Ուղղանկյուն եռանկյան էջը միջին համեմատական է ներքնաձիգին և ներքնաձիգի վրա այդ էջի պրոյեկցիային:

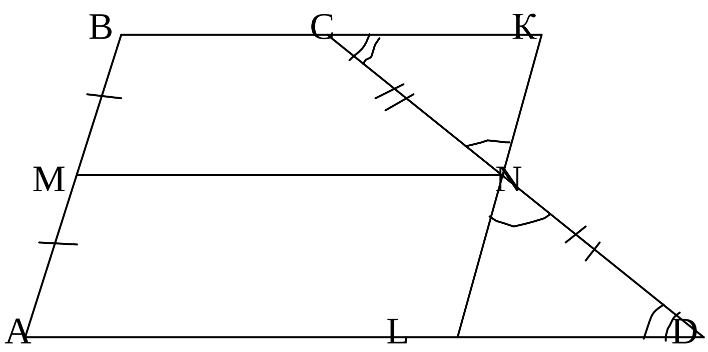


$$BC = \sqrt{AB \cdot BH}, \ \ CH = \sqrt{AH \cdot BH}$$

Գոյություն ունի մի պատկեր, որտեղ հանդիպում են վերը նշված բոլոր միջինները: Դա սեղանն է, որին մենք կնշանակենք ABCD և որի հիմքերն են BC = a , AD = b, b>a :

2.ՍԵՂԱՆԻ ՄԻՋԻՆ ԳԻԾԸ

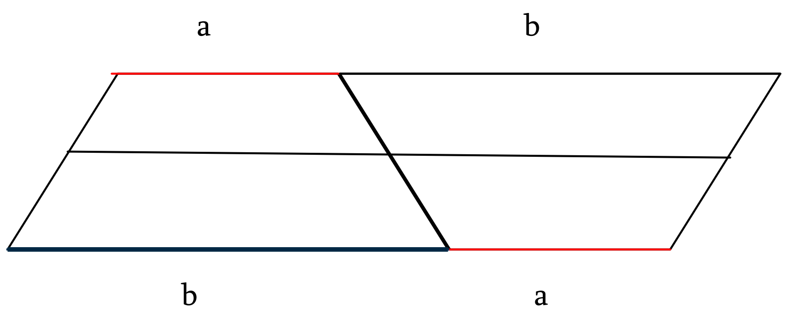
Ամենահայտնի հատվածը նրանցից, որոնց երկարությունները ունեն միջին արժեք սեղանի մեջ՝ դա սեղանի միջին գիծն է, որը սրունքների միջնակետերը միացնող հատվածն է: Ցանկացած սեղանի միջին գիծը հավասար է նրա հիմքերի կիսագումարին, այսինքն միջին թվաբանականին: [3] Ապացուցենք այս փաստը:



BC = a, AD = b

ABCD սեղանի MN միջին գծի N կետից տանենք զուգահեռ AB-ին, որը հիմքերը հատում է K և L կետերում՝ KL ∥ AB: Քանի որ $\triangle LND = \triangle KNC$ (ըստ կողմի և նրան առնթեր անկյունների) ⇒ CK = LD : Նշանակենք MN = m, այդ դեպքում քանի որ ABKL -ը զուգահեռագիծ է և AL = MN = BK = m, ապա CK = m - a , LD = b - m : Քանի որ CK = LD, ապա m - a = b - m, որտեղից էլ m = $\frac{a+b}{2}$:

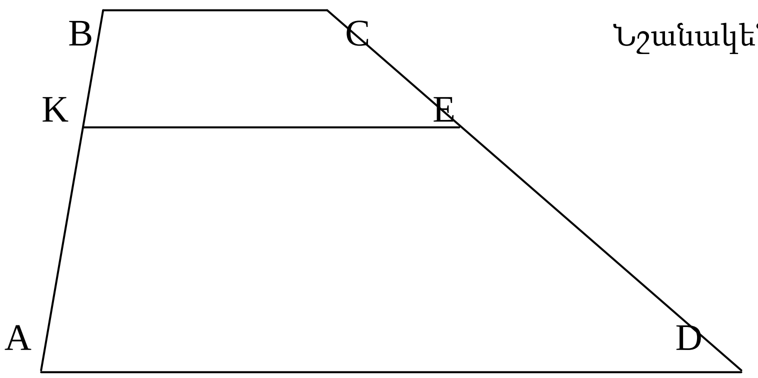
Մեկ այլ ապացույց ինտերակտիվ մոդելի տեսքով ներկայացված է mathnet.am կայքում, որի իմաստը հետևյալն է. [4]



Տրված a և b հիմքերի երկարություններ ունեցող սեղանի փոքր հիմքը լրացնում ենք մեծի երկարության չափով, մեծ հիմքը՝ փոքրի չափով: Արդյունքում ստացվում է զուգահեռագիծ a + b կողմով : Ստացվում է 2m = a + b , որտեղից էլ m = $\frac{a+b}{2}$:

3.ՄԻՋԻՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆԸ ՍԵՂԱՆԻ ՄԵՋ

Հատվածը, որը զուգահեռ է սեղանի հիմքերին և տրոհում է այն նման սեղանների, հավասար է հիմքերի միջին երկրաչափականին: Ապացույց.



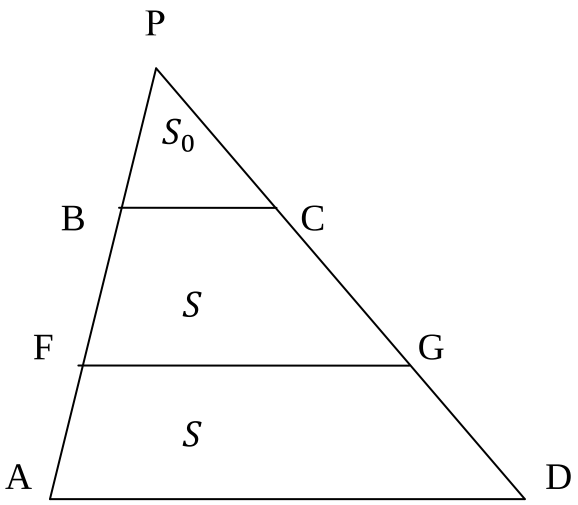
Նշանակենք BC = a, AD = b, KE = g

KE -ն սեղանը տրոհում է երկու նման սեղանների՝ AKED ~ KBCE , այսինքն համապատասխան կողմերի հարաբերությունները հավասար են՝ $\frac{KE}{BC} = \frac{AD}{KE} \Rightarrow$

$$\Rightarrow KE^2 = BC \cdot AD \Rightarrow KE = \sqrt{BC \cdot AD} \Rightarrow g = \sqrt{ab} \;:$$

4. ՄԻՋԻՆ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆԸ ՍԵՂԱՆԻ ՄԵՋ

AD = b և BC = a հիմքերով սեղանի մեջ գտնել հիմքերին զուգահեռ այն հատվածի երկարությունը (FG), որը սեղանը բաժանում է հավասարամեծ մասերի, հավասար է հիմքերի միջին քառակուսայինին: Այսինքն՝ $\boldsymbol{s} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a^2+b^2}}{\boldsymbol{2}}}$, որտեղ s = FG :



Ապացուցենք այս հատկությունը:

P կետը AB և CD սրունքների շարունակությունների հատման կետն է:

Ստացվում է, որ ΔBPC ~ ΔFPG ~ ΔAPD : Նշանակենք $S_{BPC} = S_0$, $S_{FBCG} = S_{AFGD}$ = S : Հայտնի է, որ նման եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցի քառակուսուն : ΔBPC ~ ΔFPG նմանությունից կստացվի

$\frac{S_0+S}{S_0} = \left(\frac{FG}{a}\right)^2$ (1), իսկ ΔBPC ~ ΔAPD նմանությունից՝ $\frac{S_0+2S}{S_0} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ (2) :

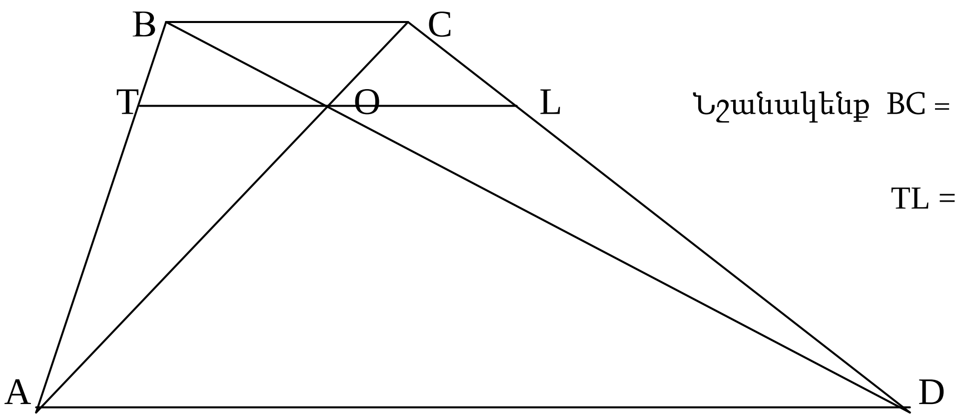
(1) հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք 2-ով. $\frac{2S_0+2S}{S_0} = 2\left(\frac{FG}{a}\right)^2$:

Ստացված հավասարությունից հանելով (2) հավասարությունը, կստացվի

$$1 = 2\left(\frac{FG}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 2FG^2 - b^2 \Rightarrow FG^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow \boldsymbol{s} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a^2+b^2}}{\boldsymbol{2}}} :$$

5. ՄԻՋԻՆ ՀԱՐՄՈՆԻԿԸ ՍԵՂԱՆԻ ՄԵՋ

Թերևս ամենագեղեցիկ հատկությունը սեղանի անկյունագծերի հատման կետով անցող և հիմքերին զուգահեռ հատվածի հատկությունն է: Այդ հատվածի երկարությունը հավասար է այդ սեղանի հիմքերի միջին հարմոնիկին (ներդաշնակին). $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{2ab}}{\mathbf{a+b}}$



Նշանակենք BC = a, AD = b,

TL = h

O -ն անկյունագծերի հատման կետն է: TL - ը զուգահեռ է հիմքերին և անցնում է O կետով: Ապացույցի համար դիտարկենք 4 զույգ նման եռանկյուններ.

$\Delta\,TBO \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{TO}{b} = \frac{BO}{BD}$

$\Delta OCL \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{OL}{b} = \frac{OC}{AC}$

$\Delta ODL \sim \Delta BDC \Rightarrow \frac{OL}{a} = \frac{OD}{BD}$

$\Delta TAO \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{TO}{a} = \frac{AO}{AC}$

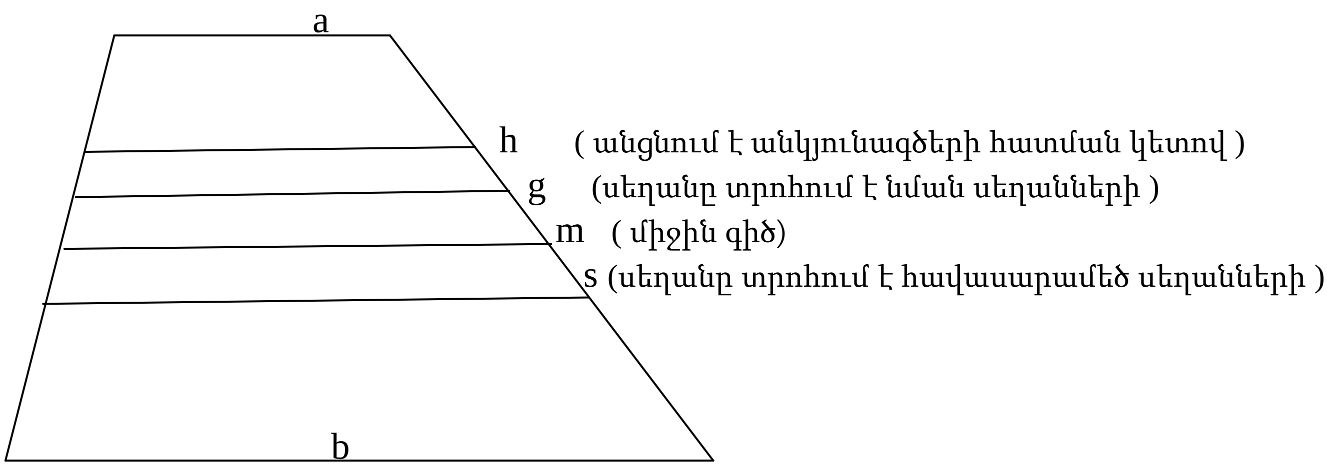
Գումարենք ստացված հավասարությունները.

$\frac{TO}{b} + \frac{OL}{b} + \frac{TO}{a} + \frac{OL}{a} = \frac{BO}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC} + \frac{OD}{BD}$ պարզեցնելով, կստանանք.

$\frac{TL}{b} + \frac{TL}{a} = \frac{BD}{BD} + \frac{AC}{AC} \Rightarrow TL\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = 2 \Rightarrow TL = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow \mathbf{h} = \frac{\mathbf{2ab}}{\mathbf{a+b}}$ **:**

6. ՄԻՋԻՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍԵՂԱՆԻ ՄԵՋ

Ամփոփենք միջինների հատկությունները և նրանց հավասար հատվածները դասավորենք սեղանի մեջ: Կունենանք հետևյալ պատկերը.



Նայելով պատկերին, կարող ենք կատարել ակնառու համեմատություն.

$\mathbf{a} \le \boldsymbol{h} \le \boldsymbol{g} \le \boldsymbol{m} \le \boldsymbol{s} \le \mathbf{b}$, որից էլ ավելի համոզիչ է դառնում միջին արժեքների հայտնի ոչ խիստ անհավասարությունը.

$$a \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b$$

Հավասարությունը տեղի ունի, երբ a = b :

7. ԷԼ ՈՐՏԵՂ ԵՆ ՀԱՆԴԻՊՈՒՄ ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ

- 9-րդ դասարանի հանրահաշվի ծրագրում ուսուցանվող թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաների հատկությունները ուսումնասիրելիս հատուկ ուշադրություն է դարձվում անունների ծագումնաբանությանը, որը կապված է բնութագրիչ հատկությունների հետ: Ըստ այդ հատկությունների $a_1, a_2, \dots\ a_n$ թվաբանական պրոգրեսիայի ցանկացած անդամ սկսած երկրորդից հավասար է իր հարևան անդամների միջին թվաբանականին՝ $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, որտեղից էլ առաջանում է հաջորդականության անունի թվաբանական լինելը: Եվ երկրաչափական պրոգրեսիա է կոչվել դրական անդամներով այն հաջորդականության անունը , որի ցանկացած անդամ հավասար է իր հարևան անդամների միջին երկրաչափականին՝ $a_n = \sqrt{a_{n-1}\ a_{n+1}}$: [2]

  Ստացվում է սեղանի հիմքերը միջին գծի հետ միասին կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա, իսկ սեղանի հիմքերը, նրանց զուգահեռ հատվածի հետ, որը նրան բաժանում է նման սեղանների, կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա:
- Համանման բնութագրական հատկություն ունի նաև ներդաշնակ պրոգրեսիան: Օրինակի համար դիտարկենք հետևյալ ներդաշնակ հաջորդականությունը'

  1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ... ; $\frac{1}{n}$; ... Դրանում $\frac{1}{n}$ -ի հարևան անդամներն են $\frac{1}{n-1}$ -ը՝ նախորդ և $\frac{1}{n+1}$ -ը՝ հաջորդ, իսկ նրանց միջին ներդաշնակը կլինի $\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{\frac{1}{n+1}}} = \frac{2}{n-1+n+1} = \frac{1}{n}$:

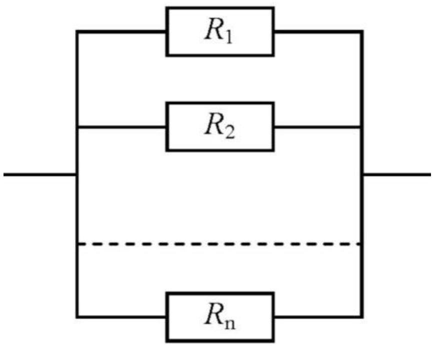
  Ինչպես տեսնում ենք ներդաշնակ պրոգրեսիայի ցանկացած անդամ սկսած երկրորդից հավասար է իր հարևան անդամների միջին ներդաշնակին (հարմոնիկին): Ներդաշնակ հաջորդականության անդամների գումարը'

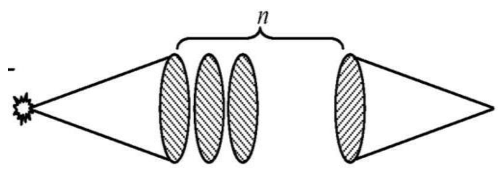
  Sn = 1+ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ - ը կոչվում է ներդաշնակ շարք: [1]

Դեռևս անտիկ շրջանում թվային միջինները հայտնի են եղել մաթեմատիկներին: Օրինակ Պյութագորասը երաժշտություն ուսումնասիրելիս նկատել է, որ ձայնային ինտերվալները, որտեղ կար հարմոնիկ հարաբերակցություն, առավել հաճելի էր և համահունչ: [7]

❖ Միջին ներդաշնակի հասկացությունը հաճախ կարելի է հանդիպել ֆիզիկայում:

Հայտնի է օրինակ, որ շղթան, որը կազմված է n զուգահեռ $R_1, R_2, \ldots R_n$ դիմադրություններից, ունի հետևյալ ընդհանուր դիմադրությունը՝ $R=\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_n}}$: Այսինքն R-ը R_1, R_2, ... ,R_n դիմադրությունների միջին ներդաշնակի $\frac{1}{n}$ մասն է:(նկ.1)





նկ.1

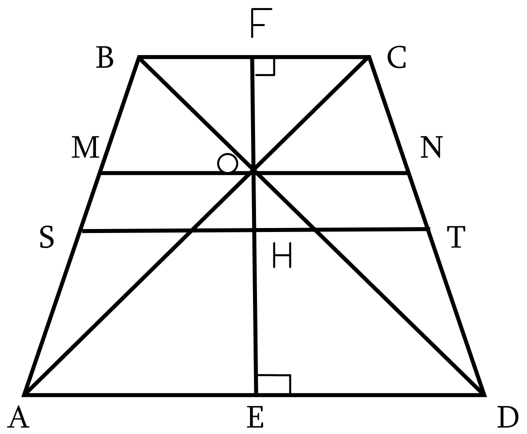
նկ.2

Համապատասխանաբար n ոսպնյակներից կազմված համակարգը (նկ.2), որոնց կիզակետային հեռավորությունները համապատասխանաբար f_1, f_2, ... , f_n է, արտահայտվում է ճիշտ նմանակերպ բանաձևով: f ընդհանուր կիզակետի հեռավորությունը որոշվում է այսպես.

$$f=\frac{1}{\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\cdots+\frac{1}{f_n}}$$

8. ՄԻՋԻՆՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

- Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. [5]



ABCD սեղանի մեջ , որտեղ O- ն անկյունագծերի հատման կետն է, MN‖AD, MN=4, անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը փոքր հիմքից երկու անգամ ավել է միջին գծից: Ինչի՞ են հավասար հիմքերը:

1. Նշանակենք AD=a, BC=b : Ըստ սեղանի վերը նշված հատկությունների՝ $MN = \frac{2ab}{a+b}$

2. ST -ն սեղանի միջին գիծն է, իսկ EF- ը անցնում է O կետով և ուղղահայաց է հիմքերին:

EF=h -ը սեղանի բարձրությունն է, որը ակնհայտորեն միջին գծով բաժանվում է 2 հավասար մասերի՝ $EH = FH = \frac{h}{2}$: $\Delta BOC \sim \Delta DOA \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{OF}{OE} = \frac{b}{a} \Rightarrow OE = \frac{a}{b} OF$:

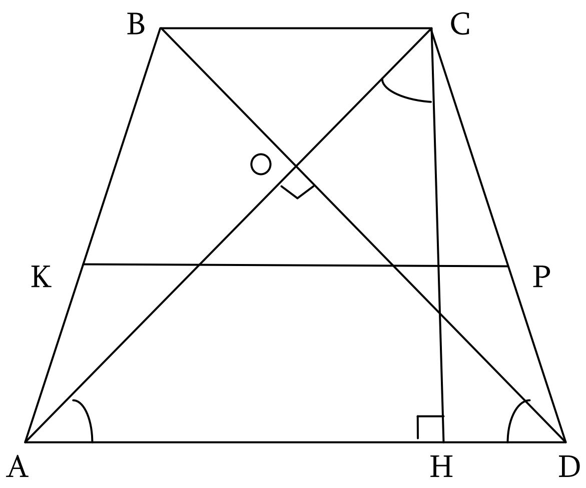
Քանի որ OE + OF = h $\Rightarrow OF = \frac{b}{a+b} h$: Ըստ պայմանի $FH = FO + \frac{1}{2} FO = \frac{3}{2} FO \Rightarrow \frac{1}{2} h = \frac{3}{2} FO$ $\Rightarrow FO = \frac{1}{3} h \Rightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{1}{3} \Rightarrow a=2b$: Տեղադրելով a=2b հավասարությունը $\frac{2ab}{a+b} = 4$ հավասարության մեջ, ստանում ենք b = 3 , a = 6 :

Այսպիսով միջին հարմոնիկի և նմանության կիրառմամբ հնարավոր դարձավ խնդիրը լուծել ավելի արագ ու ընկալելի:

- Դիտարկենք նաև մաթեմատիկայի շտեմարանում ներկայացված հետևյալ խնդիրը . [6]

ABCD փոխուղղահայաց անկյունագծերով հավասարասրուն սեղանի բարձրությունը $17\sqrt{2}$ է, իսկ BC և AD հիմքերը հարաբերում են ինչպես 5:12:

1. Գտնել սեղանի անկյունագծի և հիմքի կազմած անկյան աստիճանային չափը:
2. Գտնել սեղանի մակերեսը:
3. Գտնել սեղանի անկյունագծի երկարությունը:
4. Գտնել սեղանի սրունքների վրա ծայրակետեր ունեցող և հիմքերին զուգահեռ այն հատվածի երկարությունը, որը սեղանը տրոհում է երկու հավասարամեծ մասերի:



1) Քանի որ սեղանը հավասարասրուն է ⇒ AC = BD ⇒ AO = OD ⇒ ∠CAD = ∠BDA = 45°

2) Δ ACH- ը հավասարասրուն է, քանի որ ∠A = ∠C = 45° ⇒ AH = CH = $17\sqrt{2}$: Այստեղ արդեն օգտագործվում է հավասարասրուն սեղանի ևս մի հիշարժան հատկություն.

AH -ը միջին գծին է հավասար ⇒ S = AH • CH = $(17\sqrt{2})^2$ = 578

3) Δ ACH-ում AC = CH$\sqrt{2}$ = 34

4) Նշանակենք AD=a, BC=b : Ըստ պայմանի $\frac{b}{a} = \frac{5}{12}$ և քանի որ AH = $\frac{a+b}{2} = 17\sqrt{2}$ ⇒

b = $5\sqrt{2}$; a = $12\sqrt{2}$: Ըստ պայմանի KP ∥ AD , $S_{KBCP} = S_{AKPD}$ ⇒ KP հատվածը հանդիսանում է հիմքերի միջին քառակուսայինը՝ KP = $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ⇒ KP = $\sqrt{\frac{(12\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2}{2}}$ = 13:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Սեղանի մեջ միջին արժեքների առկայությունը թույլ է տալիս ընդլայնել սեղանի մասին գիտելիքները, միջին արժեքներին տալ երկրաչափական իմաստ, կատարել միջինների ակնառու համեմատություն: Այս բանաձևերը նաև ցույց են տալիս հանրահաշիվ, երկրաչափություն, ֆիզիկա առարկաների միջառարկայական կապերը: Այս բանաձևերը հնարավորություն են տալիս լուծել խնդիրները առավել արագ ու անսխալ : Բանաձևերի իմացությունը աշակերտների մոտ հնարավորություն է ստեղծում նպաստել ճանաչողության ունակությունների, տրամաբանական և ալգորիթմական մտածողության, ապացուցման կարողությունների զարգացմանը: Բանաձևերի իմացությունը հատկապես օգտակար է թե՛ դիմորդների, թե՛ուսուցիչների համար, ովքեր քննական թեստ գրելիս կանգնած են սահմանափակ ժամանակամիջոցում արդյունք գրանցելու խնդրի առջև:

Առաջարկում եմ հանրահաշվի 9-րդ դասարանի դասընթացում հաջորդականությունների մասին խոսելիս ներկայացնել նաև ներդաշնակ շարքը, իսկ սեղանի միջին գիծը ներկայացնելիս՝ նաև մյուս միջինները և նրանց երկրաչափական իմաստը սեղանի մեջ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Մաթեմատիկան դպրոցում 2-3 2009

https://tert.nla.am/archive/NLA%20AMSAGIR/Matematikan%20dprocum/2009%282-3%29.pdf

2. Ս. Նիկոլսկի, Մ. Պոտապով, Ն. Ռեշետնիկով, Ա. Շևկին   Հանրահաշիվ 9

3. Լ. Ս. Աթանասյան Երկրաչափություն 9

4. https://mathnet.am/interact_1/sexan_mijin_gic_1000.html

5. https://znanio.ru/media/zamechatelnye-svojstva-trapetsii-2614331

6. https://online.fliphtml5.com/rwkgm/vzhw/#p=204

7. https://habr.com/ru/articles/416969/

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

«ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ.ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ» ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ **ՄՈԴՈՒԼ ՊՐՈՒՆԱԿՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿ**

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ **ՎԱՆԱՁՈՐԻ N 30 ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑԻՉ Լ.ՉԱՏԻՆՅԱՆ**

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ **Ֆ.Մ.Գ.Թ. ԴՈՑԵՆՏ Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ**

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈւԹՅՈւՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

«Կրթվածությունն այն է, ինչ մնում է, երբ մոռանում են այն, ինչ սովորել են»:

Ալբերտ Էյնշտեյն

- Արդիականություն

Հիմնական դպրոցում, մասնավորապես 9-րդ դասարանի հանրահաշվի դասագրքում, «Մոդուլ պարունակող ֆունկցիաների գրաֆիկներ» թեման ներառված է աստղանիշով: Հիմնականում այդ թեման անտեսվում է, քանի որ 9-րդ դասարանում բովանդակությունը խիտ է, իսկ աշակերտի մոտ մնում են միայն աղոտ պատկերացումներ 8-րդ դասարանում ուսումնասիրած $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկից: Տարեսկզբին, երբ 9-րդ դասարանում սկսվում ենք ուսումնասիրել ֆունկցիա թեման, շատ աշակերտներ են անորոշ, հարցական հայացքով նայում գրատախտակին, ուսուցչին: Աշակերտների մեծ մասը ֆունկցիա թեմայից որոշ հասկացություններ սկսում են ընկալել քառակուսային ֆունկցիայի օրինակներ քննարկելիս: Ուսուցչի մոտ առաջանում է վախ, նա փորձում է աշակերտներին հեռու պահել անհասկանալի թեմաներից: Սակայն Ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխություններից հետո, շատ լավ կլինի, որ ուսուցիչը ժամանակ տրամադրի, ջանքեր գործադրի ու այս թեման նույնպես հասանելի դարձնի աշակերտների գոնե մի մասին:

Փորձը ցույց է տվել, որ միևնույն թեման որոշ ժամանակ հետո կրկին ուսումնասիրելիս ավելի լավ ենք ընկալում: Կարծում եմ, որ հիմնական դպրոցում, որքան ջանքեր են գործադրում ֆունկցիա թեման խորապես ուսումնասիրելիս, այնքան ամուր հիմք ենք դնում ավագ դպրոցում աշակերտի համար:

Թեմայի արդիականությունը կայանում է նաև նրանում, որ պարամետրական հավասարումներն ու անհավասարումները կարելի է շատ գեղեցիկ լուծել գրաֆիկական եղանակով, որի համար հստակ պետք է պատկերացնել ֆունկցիայի գրաֆիկի տեսքը, առանցքային կետերը:

- Հետազոտության նպատակ

Պարզել ինչպես կարելի է 9-րդ դասարանում ուսուցանել այս թեման՝ այն հասանելի դարձնելով հնարավորինս շատ աշակերտների:

Պարզել ինչպես կարելի է Մոդուլ պարունակող ֆունկցիայի գրաֆիկն օգտագործել մոդուլով պարամետրական հավասարումներ լուծելիս:

- Հետազոտության խնդիրներ

✓Ուսումնասիրել, վերլուծել գրականությունը և ամփոփել այս թեմայի վերաբերյալ գիտելիքները:

✓Ուսումնասիրել թեմայի հետ կապված տեսությունը:

✓Տիրապետել մոդուլ պարունակող ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցման մեթոդներին:

✓Ուսումնասիրել մոդուլ պարունակող պարամետրական հավասարումները և դրանց լուծման գրաֆիկական եղանակը:

✓Լուծել մի քանի պարամետրական հավասարումներ:

✓Կատարել եզրահանգումներ և եզրակացություններ:

ՄՈԴՈՒԼ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿԸ

Ֆունկցիան հիմնական դպրոցում աշակերտներին ամենաանհասկանալի կամ դժվար ընկալվող թեմաներից է, ուսուցչից շատ ջանքեր է պահանջվում այն հնարավորինս պարզ ու մատչելի բացատրելու համար։

Մի բան է, երբ աշակերտը, վստահելով ուսուցչին, ընդունում է այսպիսի ֆունկցիաների կառուցման սխեման, կանոնները, այլ բան, երբ նա ինքն է ուսուցչի օգնությամբ վերլուծում, բացահայտում այդ կանոներն ու օրինաչափությունը։ Այս թեման ուսումնասիրելու համար պետք է փոքրիկ քայլերով առաջ գնալ.

- Քայլ 1

Մոդուլ պարունակող ֆունկցիաները, դրանց գրաֆիկների կառուցումը լավ հասկանալու համար նախ պետք է վերհիշել մոդուլ հասկացությունը, նրա սահմանումը։

$$y = |x| = \begin{cases} x, \square\square\square\ x \geq 0 \\ -x\ , \square\square\square\ x \leq 0 \end{cases}$$

Այստեղ շատ կարևոր է, որ երեխան գիտակցի՝ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի թե՛ դրական, թե՛ բացասական արժեքների դեպքում ֆունկցիայի արժեքը դրական է, իսկ x=0 դեպքում, y=0։

Հետևություն 1: **ֆունկցիայի գրաֆիկի բոլոր կետերը, բացի մեկից՝ (0;0) կետից, գտնվում են աբսցիսների առանցքից վերև։**

Ինչպես նաև պետք է ուշադրություն դարձնել նաև այն փաստին, որ արգումենտի հակադիր արժեքների դեպքում ֆունկցիան ընդունում է միևնույն արժեքը։

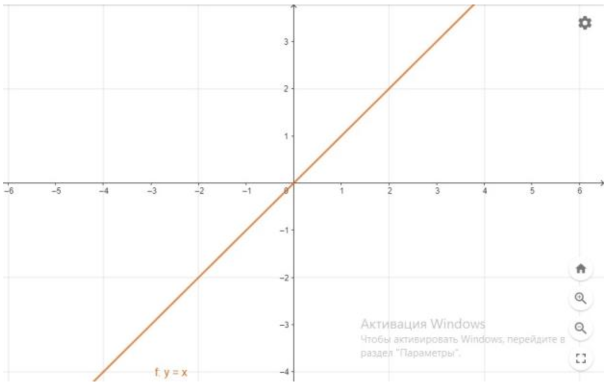
Հետևություն 2: **Ֆունկցիան զույգ է, գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ ։**

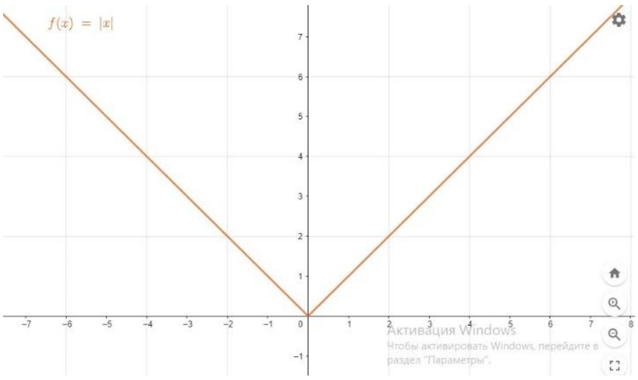
Այսպիսով՝ գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է.

- Եղանակ 1: **կառուցել y=x ֆունկցիայի գրաֆիկը, աբսցիսների առանցքից ներքև գտնվող կետերը համաչափ տեղափոխել ox-ի նկատմամբ։**
- Եղանակ 2: $y = |x|$ **ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցել ոչ բացասական x-երի համար, այնուհետև կառուցել այդ գրաֆիկի համաչափը օրդինատների առանցքի նկատմամբ։**

- **Եղանակ 3: Օգտվելով մոդուլի սահմանումից՝ կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը ոչ բացասական x-երի համար, բացասական x-երի համար**

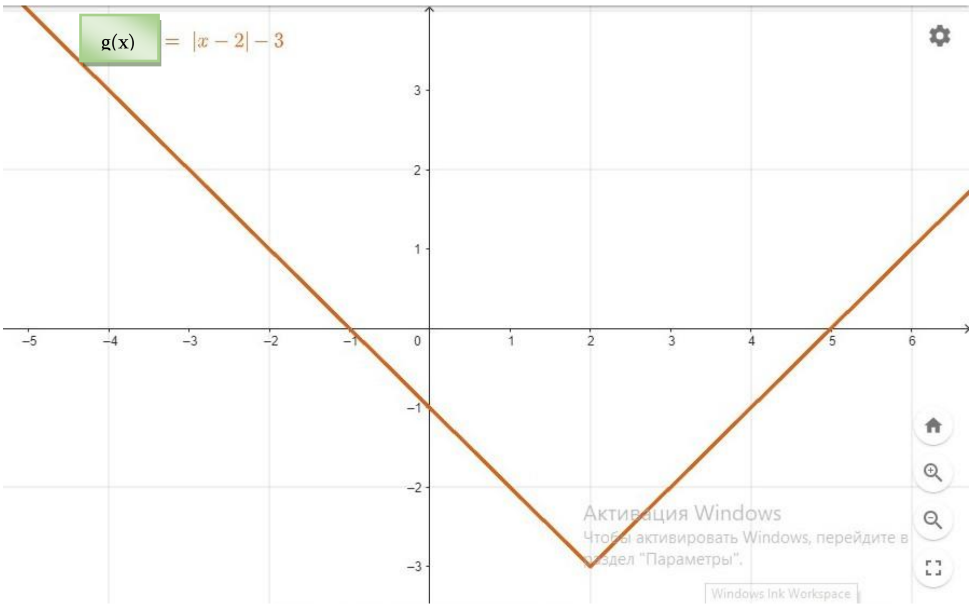
Աշակերտը պետք է համոզվի, որ անկախ եղանակի ընտրությունից, ստացվում է նույն գրաֆիկը:





- Քայլ 2

Կառուցել y=Ix-2|-3 ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ օգտվելով $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխություններից : Նախորդ դասերից արդեն սովորել ենք՝ $\boldsymbol{f(x) = |x|}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 միավոր պետք է տեղաշարժել աջ և 3 միավոր ներքև:



- Քայլ 3

Դիտարկել $|f(x)| = ||x - 2| - 3|$ ֆունկցիան:

Աշակերտները կատարում են իրենց դիտարկումներն ու վերլուծությունները՝

Ֆունկցիայի արժեքը բացասական չի լինի, արգումենտի ոչ մի արժեքի դեպքում :

$f(x)$ ֆունկցիան արգումենտի (-1,5) միջակայքի արժեքների դեպքում ընդունում է բացասական արժեք, իսկ | $f(x)$| այդ նույն միջակայքում կընդունի դրական արժեքներ: Հետևաբար գրաֆիկի այն կետերը, որոնք գտնվում են աբսցիսների առանցքից ներքև, պետք է համաչափ տեղաշարժել աբսցիսների առանքի նկատմամբ, ստացված գրաֆիկն էլ կլինի g(x)=| $f(x)$| ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Այսպիսով՝

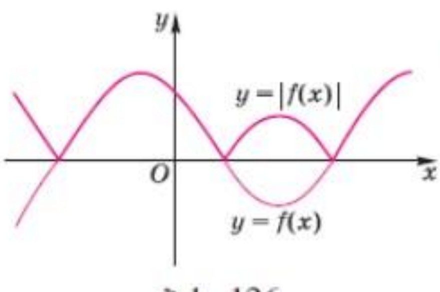
Եթե y=f(x) ֆունկցիան X բազմության վրա ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ, ապա X-ի վրա y=|f(x)| ֆունկցիայի գրաֆիկը համընկնում է y=f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկին:

Իսկ եթե y=f(x) ֆունկցիան X_1 բազմության վրա ընդունում է բացասական արժեքներ, ապա X_1-ի վրա y=|f(x)| ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է y=f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկից աբսցիսների առանցքի նկատմամբ համաչափ արտապատկերելով, քանի որ X_1 բազմության վրա բոլոր x-երի համար |f(x)| =- f(x):

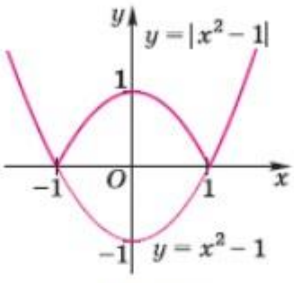
Այսպիսով. y=|f(x)| ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է պահպանել y=f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկի այն մասը, որի կետերը գտնվում են աբսցիսների առանցքի վրա, կամ դրանից վերև, և համաչափ արտապատկերել աբսցիսների առանցքի նկատմամբ y=f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկի այն մասը, որի կետերը գտնվում են Ox առանցքից ներքև (նկ. 126):

Նկատենք, որ y=|f(x)| ֆունկցիայի գրաֆիկն Ox առանցքից ներքև գտնվող կետեր չունի: [1]

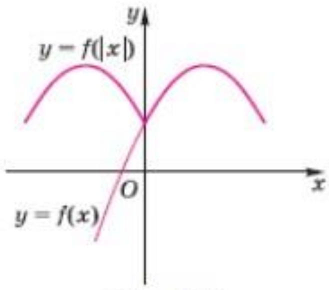
Այդ մեթոդով կառուցենք $y = |x^2 - 1|$ (նկ. 127) ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Նկ. 126



Նկ. 127



Նկ. 129

[1]

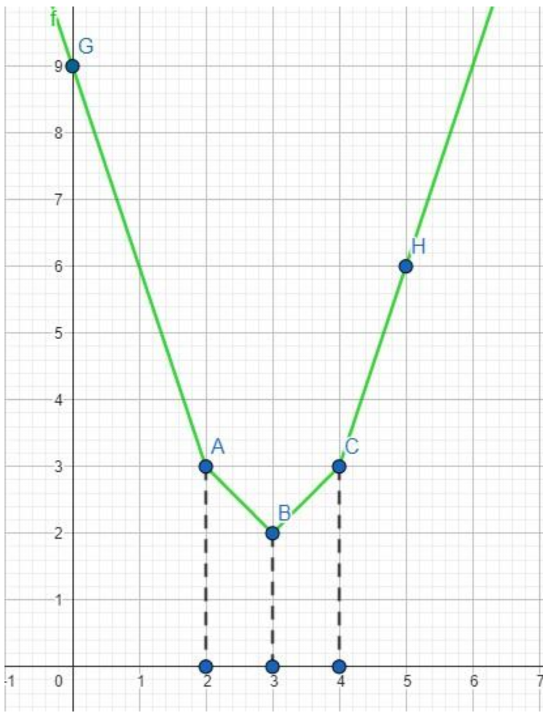
- Քայլ 4:

Կառուցել $y = |x-2| + |x-3| + |x-4|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Փորձը ցույց է տալիս, որ այս ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի առանձին միջակայքերում գծային ֆունկցիա է, դրանում կհամոզվենք՝ ազատվելով մոդուլի նշաններից: Այսինքն՝ գրաֆիկն իրենից ներկայացնելու է մի քանի ուղիղ գծերի միավորում: Մոդուլից ազատվելիս, ըստ սահմանման, կա՛մ մոդուլի տակ գրված արտահայտությունն ենք գրում, կա՛մ դրա հակադիրը, բայց այն կարող է հավասար լինել նաև 0-ի, դա այն թիվն է, որից աջ և ձախ մոդուլի ներսում եղած արտահայտությունը փոխում է իր նշանը:

Այս դեպքում մոդուլ պարունակող արտահայտությունները 3-ն են, ուստի մոդուլի տակ գտնվող երեք արտահայտություններից յուրաքանչյուրն իրենց արմատներից աջ և ձախ կընդունեն համապատասխանաբար դրական և բացասական արժեքներ:

Հետևաբար պետք է գտնել այդ արմատները՝ զրոները, որոնցով որոշման տիրույթը կբաժանվի չորս միջակայքերի՝ $(-\infty; 2]$; $[2; 3]$; $[3; 4]$; $[4; +\infty)$:



Քանի որ յուրաքանչյուր միջակայքում ֆունկցիայի գրաֆիկը ճառագայթ է կամ հատված է, դրանք գծելու համար բավական կլինի հաշվել ֆունկցիայի արժեքները այդ միջակայքերի ծայրակետերում, իսկ աջ և ձախ միջակայքերում վերցնել ևս մեկական արժեք, քանի որ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ ուղիղը գծելու համար բավարար է 2 կետը:

- Քայլ 5

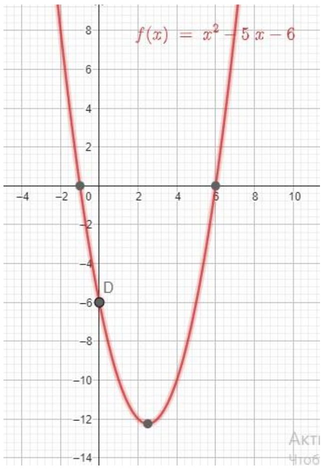
Իսկ ինչ կլինի, եթե մոդուլի նշանի մեջ առնենք ոչ թե ամբողջ ֆունկցիան, այլ միայն արգումենտը:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

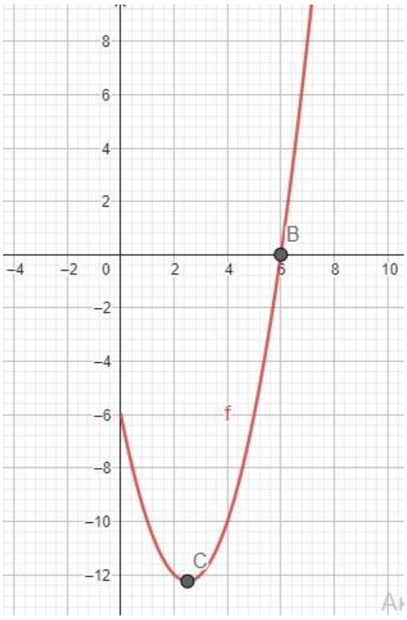
Կառուցել $g(x) = |x|^2 - 5|x| - 6$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

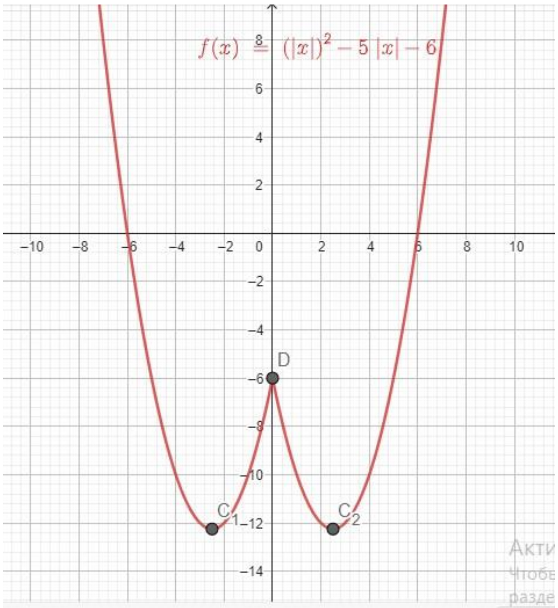
Աշակերտներն ուսումնասիրում, վերլուծում են $f(x) = x^2 - 5x - 6$

$g(x) = |x|^2 - 5|x| - 6$ ֆունկցիաները, կատարում հետևություններ, որոնք ներկայացված են աղյուսակով.

<table>
<tr><td>$f(x) = x^2 - 5x - 6$</td><td>$g(x) = |x|^2 - 5|x| - 6$</td></tr>
<tr><td>Ֆունկցիայի գրաֆիկը պարաբոլ է:</td><td>Հետաքրքիր է՝ ինչպիսի՞ն կլինի այս ֆունկցիայի գրաֆիկը:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Որոշման տիրույթը իրական թվերի բազմությունն է:</td></tr>
<tr><td>$f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը աբսցիսների առանցքի հետ հատվում է $(-1;0)$ և $(6,0)$ կետերում:</td><td>$g(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը աբսցիսների առանցքի հետ հատվում է $(-6;0)$ և $(6,0)$ կետերում:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Օրդինատների առանցքը հատում են $(-6,0)$ կետում:</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Արգումենտի հակադիր արժեքների դեպքում $g(x)$ ֆունկցիայի արժեքը ստացվում է նույնը, ընդ որում այդ արժեքները համընկնում են դրական x-երի դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքներին:</td></tr>
<tr><td></td><td>$|x|^2 = x^2 \Rightarrow g(x) = x^2 - 5|x| - 6$</td></tr>
</table>

Հետևություն 1: $g(x)$ ֆունկցիան զույգ է, այսինքն՝ գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ, երբ արգումենտը ստանում է բացասական արժեք, ֆունկցիայի արժեքը հավասար է լինում $f(x)$-ին դրական x-երի դեպքում: Այսինքն՝ տրամաբանական է ոչ բացասական x-երի համար կառուցել $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, և այն համաչափ արտապատկերել օրդինատների առանցքի նկատմամբ:

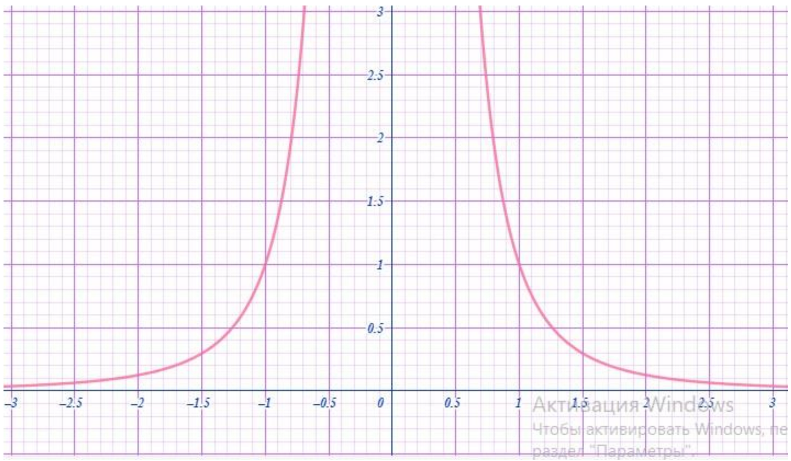




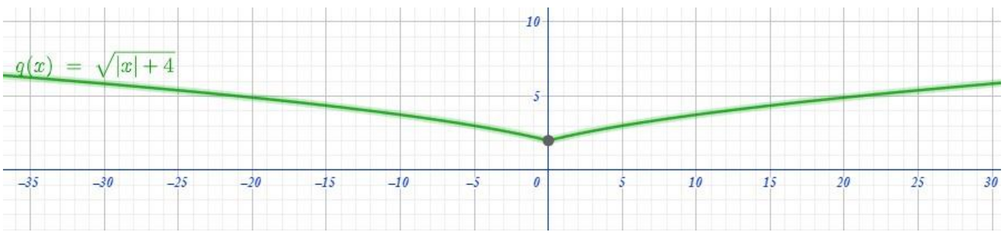
Այսպիսով. y=f(|x|) ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է պահպանել y=f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկի միայն այն մասը, որի կետերը գտնվում են Oy առանցքի վրա կամ դրանից աջ, և համաչափ արտապատկերել այդ մասը Oy առանցքի նկատմամբ (նկ. 129): **[1]**

Օգտվելով ձևակերպված կանոններից՝ կառուցենք մի քանի ֆունկցիաների գրաֆիկներ:

y = $\frac{1}{|x|^3}$ նույն ինքը y=$\left|\frac{1}{x^3}\right|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա հետևյալ տեսքը

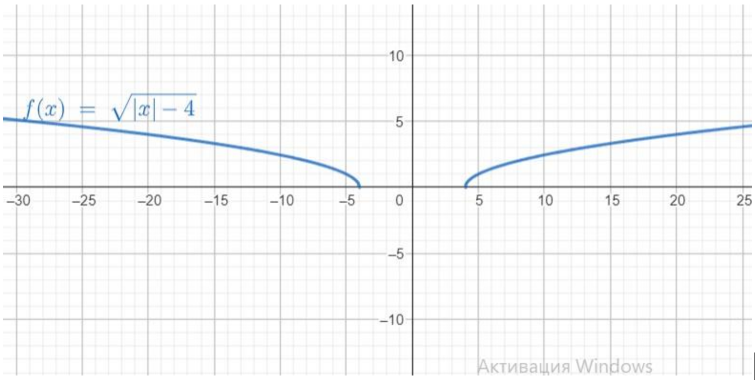

[1]

y = $\sqrt{|x| + 4}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը



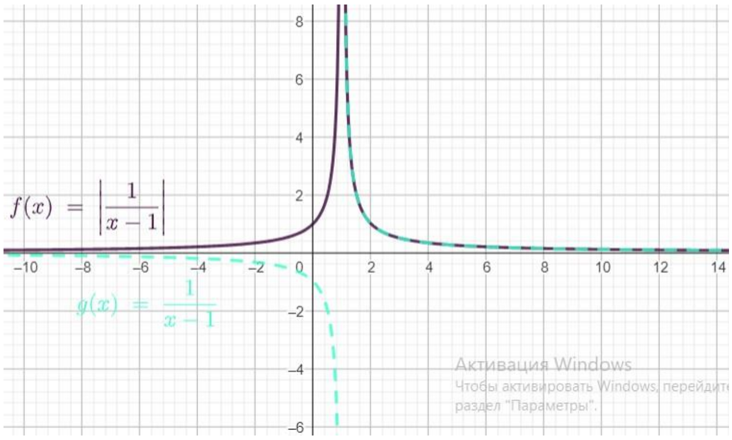
[1]

y = $\sqrt{|x| + 4}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

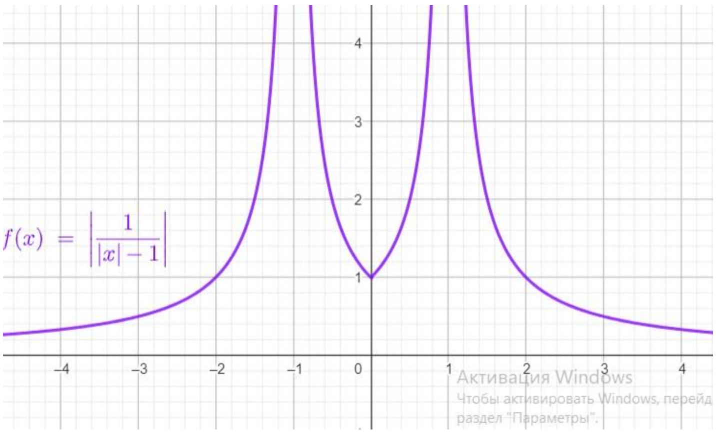


[1]

$\boldsymbol{y} = \left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}\right|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը



y = $\left|\frac{1}{|x|-1}\right|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը



[2]

ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ՄՈԴՈՒԼ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿ

Մի շարք պարամետրական հավասարումներ շատ հետաքրքիր են լուծվում, եթե դրանց լուծման ժամանակ օգտագործում ենք համապատասխան գրաֆիկներ:

Խնդիր 1: a-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $|x-5|+|x-7|=a^2-a$ հավասարումը.

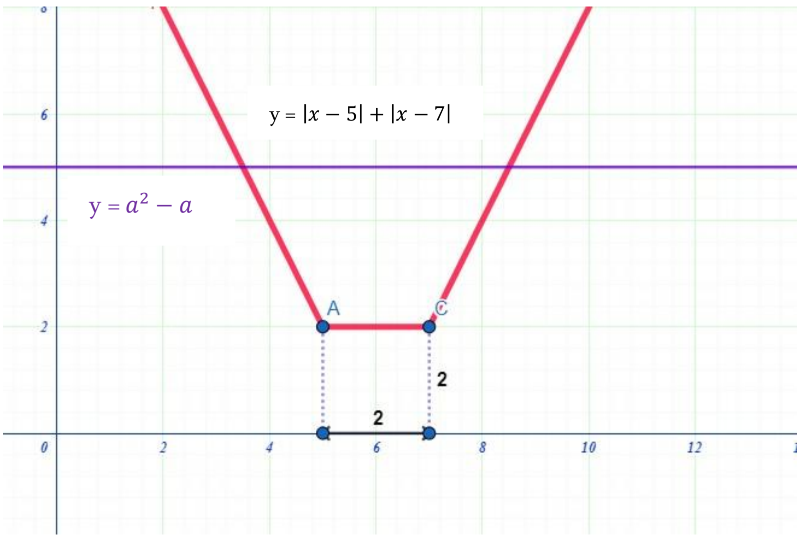
1. ունի երկու լուծում
2. լուծում չունի
3. ունի անթիվ լուծումներ:[3]

Նկատենք, որ տրված հավասարման լուծումների քանակը համընկնում է y = $|x-5|+|x-7|$ և y = a^2-a ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետերի քանակի հետ:

y = $|x-5|+|x-7|$ ֆունկցիայի գրաֆիկն իրենից ներկայացնում է 2 միավոր կողմով քառակուսու վրա դրված «նավակ», իսկ y = a^2-a ֆունկցիայի գրաֆիկը աբսցիսների առանցքին զուգահեռ, օրդինատների առանցքի (0; a^2-a) կետով անցնող ուղիղ է.

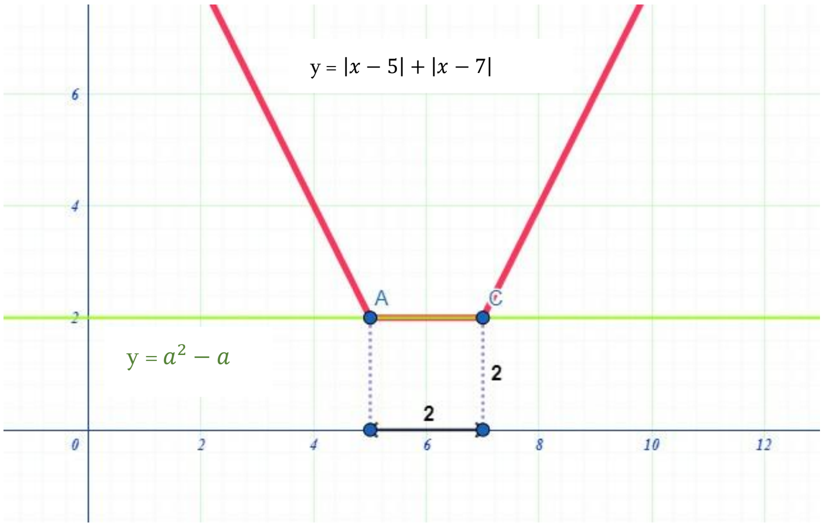
Գրաֆիկորեն ակնհայտ է դառնում.

1. $a^2-a>2$ դեպքում գրաֆիկներն ունենն երկու հատման կետ,հետևաբար հավասարումն ունի երկու լուծում:



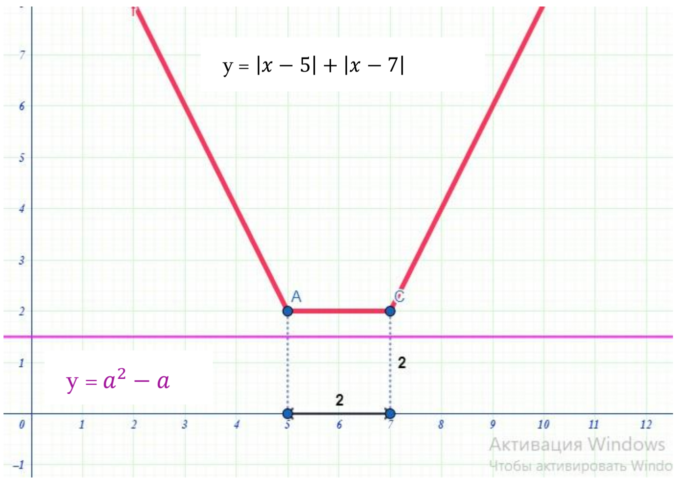
$a^2 - a > 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 > 0 \Leftrightarrow \; a(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

2. $a^2 - a = 2$ արժեքի դեպքում երկու ֆունկցիաների գրաֆիկներն ունեն անթիվ ընդհանուր կետեր՝ AC հատվածի բոլոր կետերը պատկանում են երկու գրաֆիկներին էլ, այսինքն հավասարումն ունի անթիվ բազմության լուծումներ:



$a^2 - a = 2 \; \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \; a = -1, a = 2$

3. $a^2 - a < 2$ դեպքում հատման կետեր չունեն , հետևաբար հավասարումը լուծում չունի:



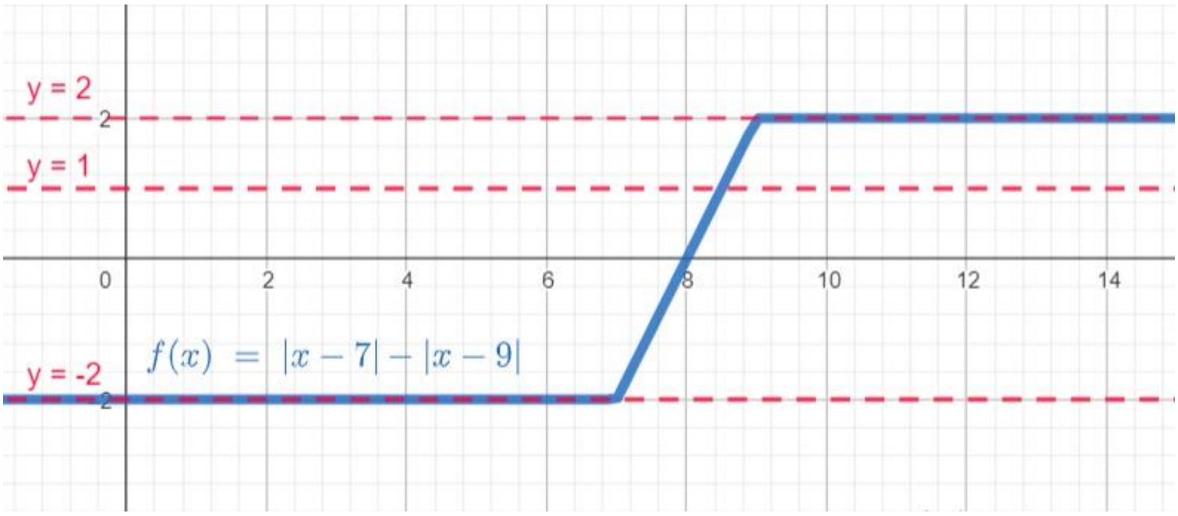
$a^2 - a < 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 < 0 \Leftrightarrow \; a(-1; 2)$

Այսպիսով $|x - 5| + |x - 7| = a^2 - a$ հավասարումը

1. ունի երկու լուծում, երբ $a \epsilon (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$
2. լուծում չունի, երբ $a \in (-1; 2)$
3. ունի անթիվ լուծումներ, երբ $a = -1, a = 2$:

Խնդիր 2 ։ a-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $|x-7|-|x-9|=3a-6$ հավասարումը .

1. ունի մեկ լուծում
2. ունի անթիվ լուծումներ
3. լուծում չունի։[3]



Գրաֆիկից ակնհայտ է.

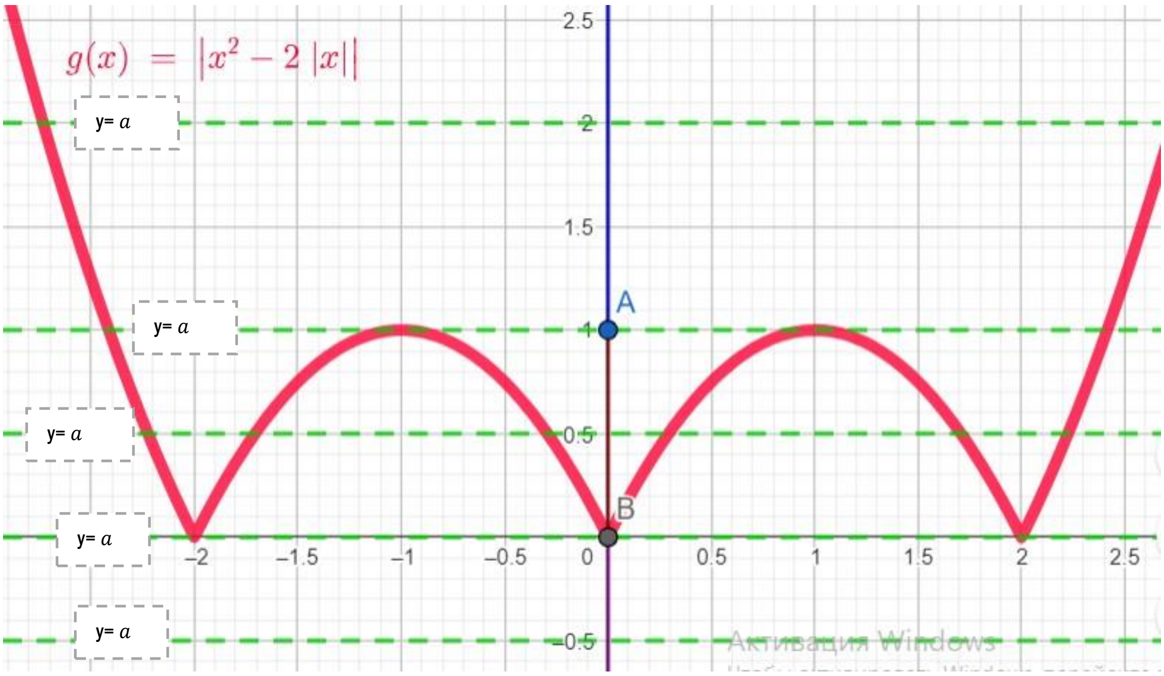
1. Երբ $\left[\begin{smallmatrix} 3a-6=2 \\ 3a-6=-2 \end{smallmatrix}\right.$ $\left[\begin{smallmatrix} a=8/3 \\ a=4/3 \end{smallmatrix}\right.$, ունի անթիվ լուծումներ,
2. Երբ $-2<3a-6<2 \Leftrightarrow 4/3<a<8/3$, $a\in\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$ ունի մեկ լուծում,
3. Երբ $\left[\begin{smallmatrix} 3a-6>2 \\ 3a-6<-2 \end{smallmatrix}\right.$ $\left[\begin{smallmatrix} a>8/3 \\ a<4/3 \end{smallmatrix}\right.$, , $a\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$ լուծում չունի։

Խնդիր 3 ։ a-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $\left|x^2-2|x|\right|=a$ հավասարումն ունի երկու, երեք, չորս, վեց լուծում և երբ լուծում չունի. [2]

y= $\left|x^2-2|x|\right|$ գրաֆիկը կառուցելու համար

- կկառուցենք y = x^2-2x պարաբոլը,
- պահպանելով միայն օրդինատների առանցքից աջ գտնվող մասը՝ այն համաչափ կարտապատկերենք օրդինատների առանցքի նկատմամբ, կստանանք y = $x^2-2|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,
- կպահպանենք ստացված գրաֆիկի աբսցիսների առանցքից վեր գտնվող մասը, իսկ վար գտնող մասը համաչափ կարտապկերենք ox-ի նկատմամբ։

Կստանանք y= $\left|x^2-2|x|\right|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը.



Այսպիսով՝

$\left|x^2-2|x|\right|=a$ հավասարումն ունի

1. երկու լուծում, երբ $a \in (1;\ +\infty)$
2. երեք լուծում, երբ a =0
3. չորս լուծում, երբ $a = 1$
4. վեց լուծում, երբ $a \in (0;1)$
5. լուծում չունի, երբ $a \in (-\infty;0)$: [5]

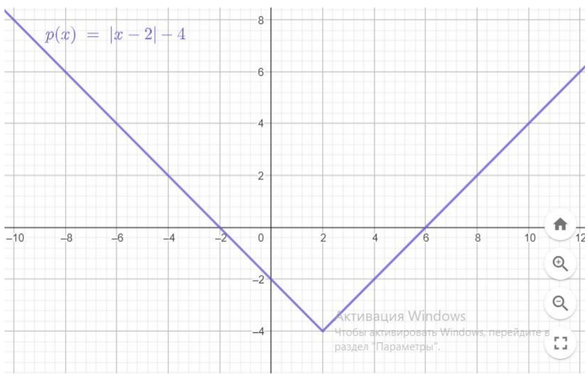
Այսպիսով՝ մոդուլ պարունակող ֆունկցիաների կիրառությունն արդիական է նաև պարամետրական հավասարումների լուծման ժամանակ:

Հետազոտության ընթացքում հայտորոշիչ և ձևավորող գնահատման նպատակով աշակերտներին տրվել է քարտային աշխատանք:

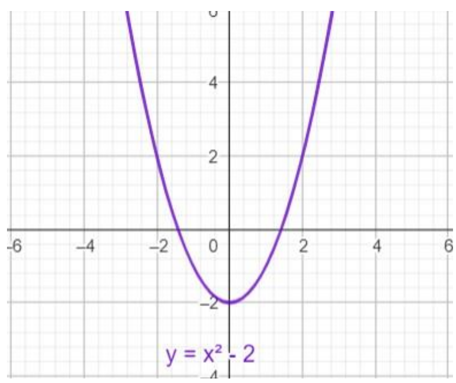
Ունենալով y=f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցել y=f(|x|), y= |f(x)|, y=|f(|x|)| ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Ստորև ներկայացնում եմ դրանցից մի քանիսը.

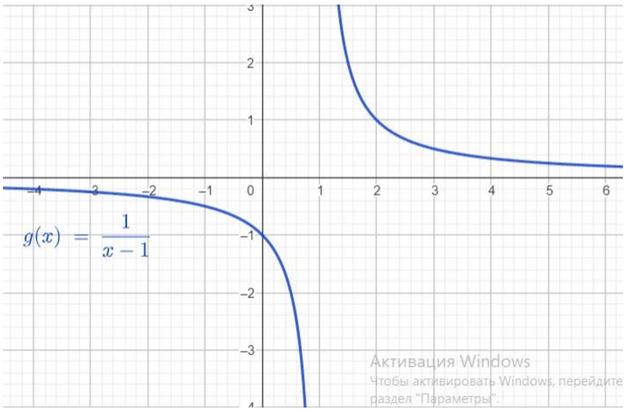
Կառուցել |P(|x|)| ֆունկցիայի գրաֆիկը:



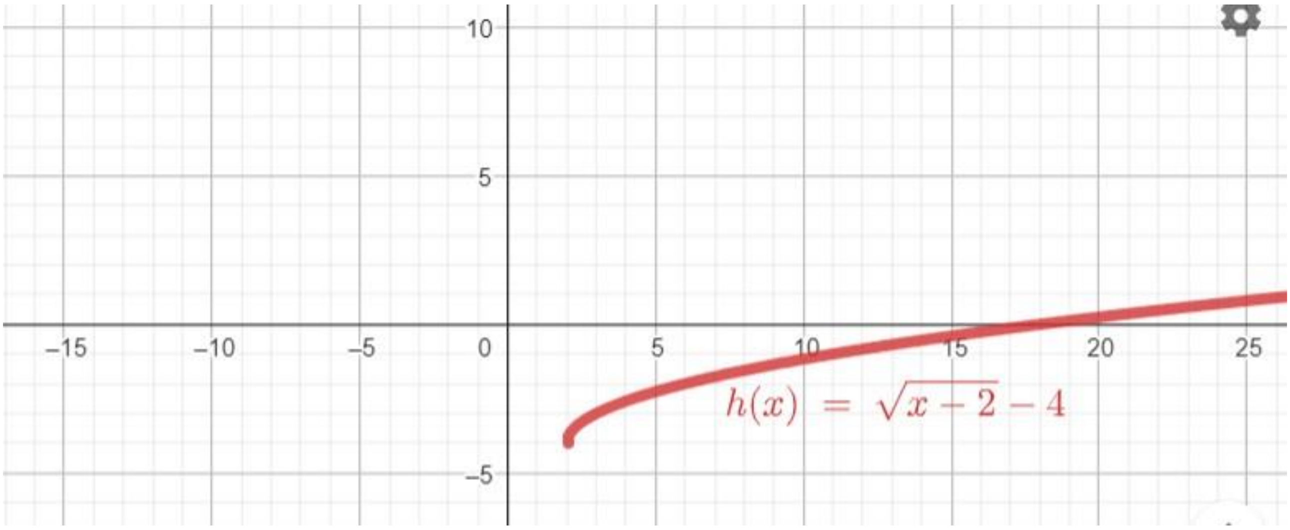
Կառուցել y=|x^2-2| ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Կառուցել g(|x|) ֆունկցիայի գրաֆիկը



Կառուցել |h(x)| ֆունկցիայի գրաֆիկը։



ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Այսպիսով՝ հետազոտության ընթացքում, ելնելով իմ առաջադրած նպատակներից, հանգել եմ հետևյալ եզրակացությունների.

- 9-րդ դասարանի քիչ թվով աշակերտների համար է խորապես հասանելի մոդուլ պարունակող ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը:
- Մշակեցի քայլերի հաջորդականություն՝ ըստ որի հնարավորինս պարզեցրել եմ թեմայի ուսուցանումը 9-րդ դասարանում:
- Ավելի մեծ թվով աշակերտների մոտ տպավորվեց գրաֆիկի կառուցման սխեմատիկ մոդելը:
- Հեշտությամբ և հաճույքով կատարեցին քարտային աշխատանքները:
- Աշակերտները կարողացան տրված մոդուլով ֆունկցիայից տարանջատել պարզագույն ֆունկցիան, նշել նրա գրաֆիկի հետ կատարվող ձևափոխությունները, ավելի կարողները նաև կառուցեցին առաջադրված ֆունկցիաների գրաֆիկները:
- 9-րդ դասարանի հանրահաշվի դասընթացի սկզբում մանրակրկիտ ուսումնասիրելով քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ աշակերտները լավ ընկալեցին մոդուլի օգտագործումը քառակուսային ֆունկցիայի մեջ:
- Աշակերտների մոտ զարգացավ վերլուծելու կարողությունը:
- Աշկերտները հասկացան պարամետրական հավասարումների լուծման գրաֆիկական եղանակը, փորձեցին իրենց հանդիպած պարամետրական հավասարումները լուծել գրաֆիկորեն:
- Այնուամենայնիվ, 9-րդ դասարանի համար այս թեման իսկապես բարդ է, այն խորապես ուսումնասիրելու համար շատ ժամանակ է անհրաժեշտ:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Ս. Մ. Նիկոլսկի, Մ. Կ. Պոտապով, Ն. Ն. Ռեշետնիկով, Ա. Վ. Շևկին, 9-րդ դասարանի հանրահաշվի դասագիրք, «Անտարես» 2013
2. Գ. Գևորգյան, Ա. Ա. Սահակյան Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, 10-րդ դասարան, բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար, Տիգրան Մեծ 2009
3. Մաթեմատիկան դպրոցում գիտամեթոդական ամսագիր, Թիվ 1 (94), 2014թ
4. Մաթեմատիկան դպրոցում գիտամեթոդական ամսագիր, Թիվ 3 (106), 2016թ
5. Գ. Գևորգյան, Ա. Ա. Սահակյան Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, 12-րդ դասարան, բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար, Տիգրան Մեծ 2009

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
«ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ.ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ» ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ **Գրաֆիկների կիրառումը պարամետրով հավասարումներ եվ անհավասարումներ լուծելիս**

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ **Մարիետա Մխիթարյան**

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ **Հ.Գրիգորյան**

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

Բովանդակություն

Ներածություն

Թեմայում ընդգրկված են պարամետր պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ, որոնց լուծումն ավելի հեշտ է, եթե օգտվենք գրաֆիկներից:

Լուծումների ընթացքում կիրառում ենք՝ $y=kx+b$, $y=ax^2+bx+c$ և $y=|X|$ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Օգտվում ենք նաև համակարգերից, գրաֆիկների հատմա կետեր որոշելու համար:

ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ

1. Մենք գիտենք, որ հավասարումը անհայտ պարունակող հավասարություն է: Լուծել հավասարումը նշանակում է գտնել անհայտի բոլոր այն արժեքները, որոնք բավարարում են հավասարմանը, կամ ցույց տալ, որ այդպիսի արժեքներ չկան: Երբեմն հավասարումը բացի անհայտից պարունակում է նաև այլ տառեր, որոնք կոչվում են պարամետրեր: Այս դեպքում գործ ունենք անվերջ թվով հավասարումների հետ, քանի որ պարամետրի յուրաքանչյուր թույլատրելի արժեքի դեպքում ստանում ենք մեկ հավասարում: Պարամետրի որոշ արժեքների դեպքում այն կարող է ունենալ մեկ կամ մի քանի արմատ, իսկ որոշ արժեքների դեպքում կարող է ընդհանրապես արմատ չունենալ:

__**Սահմանում:**__ Լուծել պարամետր պարունակող հավասարում (անհավասարում) նշանակում է լուծել այն պարամետրի բոլոր թույլատրելի արժեքների դեպքում:

Դիտարկենք օրինակներ:

1. a –ի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի միակ արմատ: $(a^2 - 2a)x^2 + 2ax-1=0$ Ընդհանրապես աշակերտները x^2-ին տեսնելով մտածում են քառակուսի հավասարման մասին և նշված հավասարումը դիտարկում որպես միայն քառակուսային հավասարում և դիտարկում են միայն $D = 0 = 4a^2 + 4(a^2 - 2a) = 0$ դեպքը, որը ճիշտ չէ, քանի որ $a^2—2a = 0$ դեպքում վերը նշված հավասարումը դադարում է քառակուսի հավասարում լինելուց, ընդհակառակը $a = 0$ դեպքում այն դադարում է նույնիսկ հավասարում լինելուց, դառնում է կեղծ հավասարություն, այն է $-1=0$:

Ո՞րն է հավասարման լուծման ճիշտ մեթոդը

1 դեպք: Նկատենք, որ $\begin{cases} a^2 - 2a = 0 \\ 2a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$ դեպքում հավասարումը վերածվում է գծային հավասարման, որն ունի մեկ արմատ:

ll դեպք: $\begin{cases} a^2 - 2a \neq 0 \\ 4a^2 + 4(a^2 - 2a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$

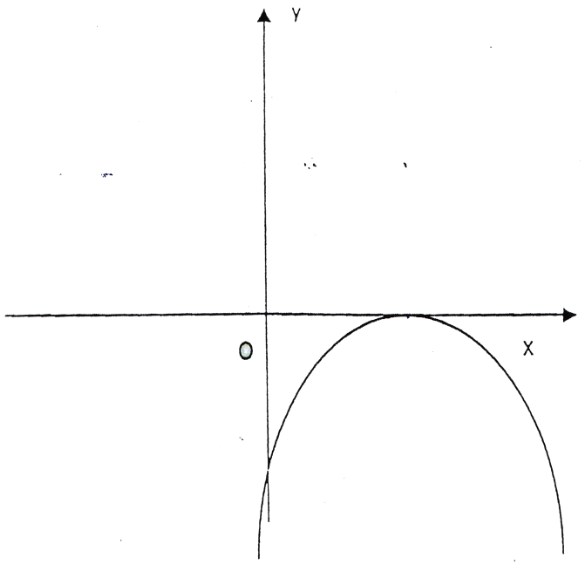
Այս դեպքում պահպանվում է քառակուսային հավասարումը, հետևաբար այն ունի մեկ արմատ, եթե $a^2 - 2a \neq 0, D = 0$: Այսպիսով՝ պատասխան {1:2}:

2. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $x^2-(2a^2-a)\ x-5\leq0$ անհավասարման լուծումների բազմությունը՝ համաչափ է թվային առանցքի $x_0 = 1$ կետի նկատմամբ: Նաև հարկավոր է աշակերտներին բացատրել, որ y = ax^2 + bx + c ֆունկցիայի գրաֆիկը պարաբոլ է, որի գրաֆիկի համար x =$\frac{-b}{2a}$ –ն համաչափության առանցք է, հետևաբար

$$\frac{2a^2-a}{2}=1 \Leftrightarrow 2a^2-a-2=0 \Leftrightarrow a_1=\frac{1-\sqrt{17}}{4}; a_2=\frac{1+\sqrt{17}}{4}:$$

3. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում արտահայտությունն իմաստ ունի x–ի միայն մեկ արժեքի համար։ $\sqrt{(a-3)x^2+2ax+2a}$

Դժվար չէ նկատել, որ y = (a – 3)x^2 + 2ax + 2a ֆունկցիայի գրաֆիկը պետք է ունենա հետևյալ տեսքը,



որից հետևում է, որ$\begin{cases} a-3<0 \\ D=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=0$

Պատ՝ a = 0

4. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում y = ax^2 - (2a^2- 1)x - 5 պարաբոլի գագաթը կգտնվի 2x – 1 = 0 ուղղի վրա: Պարզ է, որ պարաբոլի գագաթը գտնվում է նրա համաչափության առանցքի վրա $x_գ$ = $\frac{-b}{2a}$, մյուս կողմից 2x – 1 = 0 ⇔ x = $\frac{1}{2}$ հետևաբար

$\frac{2a^{2-1}}{2a}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^2-a-1=0 \Leftrightarrow a_1=-\frac{1}{2}, a_2=1$

Պատ.՝ $a_1=-\frac{1}{2}, a_2=1$

5. Գտնել b պարամետրի ամենամեծ ամբողջ արժեքը, որի դեպքում համակարգն ունի երկու լուծում:

$$\begin{cases} y = |\ 7x + b \\ y = 5x + 8 \end{cases}$$

Այս խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է, որ աշակերտն իմանա

• y = kx + b Ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը

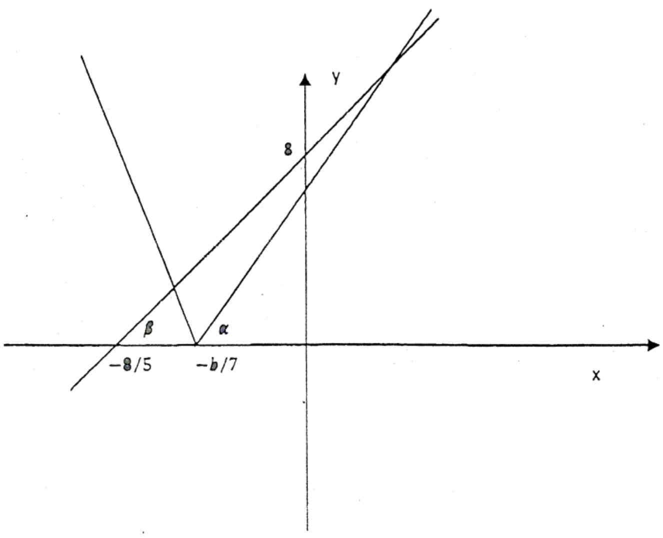
• y = |f(x)| Ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը

• tg α = k, որտեղ k–ն ուղղի անկյունային գործակիցն է, իսկ α -ն y = kx + b ուղղի և աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյունն է:

• Իմանա, որ I քառորդում y = tg x ֆունկցիան աճող է:

• $y = k_1x+b_1$ և $y = k_2x$ ուղիղները զուգահեռ են, եթե $k_1 = k_2$:

Նշված համակարգի լուծումը կդառնա ակնառու, եթե դիտարկենք y = |7x + b| և y = 5x + 8 ֆունկցիաների գրաֆիկները:



$$a > \beta \text{ քանի որ } tga = 7, tg\beta = 5 \text{ գրաֆիկներից երևում է, որ} -\frac{b}{7} > -\frac{8}{5} \Leftrightarrow \frac{b}{7} < \frac{8}{5} \Leftrightarrow 5b < 56 \Leftrightarrow b < 11\frac{1}{5}$$

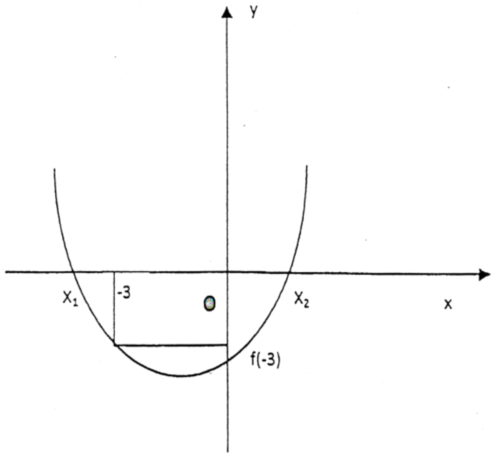
Պատ՝ b= 11

6. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի երկու արմատ, մեկը մեծ, մյուսը՝ փոքր -3-ից:

$x^2+(3a+5)x+8a+22=0$

Թվում է, թե բարդ է այս խնդրի լուծումը, սակայն, գրաֆիկորեն պարզ երևում է այս խնդրի լուծման կարճ եղանակը:

Դիտարկենք f (x) = x^2 + (3a + 5)x + 8a + 22 ֆունկցիան:



Պարզ է, որ f (−3) < 0 հետևաբար

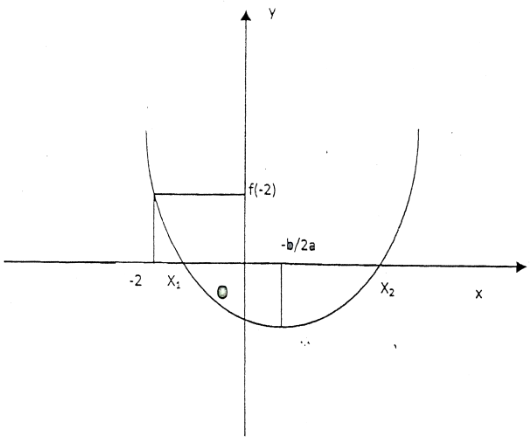
$$f(-3) < 0 \Leftrightarrow 9 - 9a - 15 + 8a + 22 < 0 \Leftrightarrow a > 16$$

Պատ.՝ a ∈ (16; ∞)

7. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի երկու իրարից տարբեր արմատ, երկուսն էլ մեծ -2-ից:

x^2+(3a+1)x+7a=0

Այս պարամետրական հավասարումը նույնպես հետաքրքիր գրաֆիկական լուծում ունի, սակայն լուծման պրոցեսում գոյություն ունեն մի շարք նրբություններ, որտեղ պետք է զգույշ լինել լուծման ճիշտ ուղղուց չշեղվելու համար:

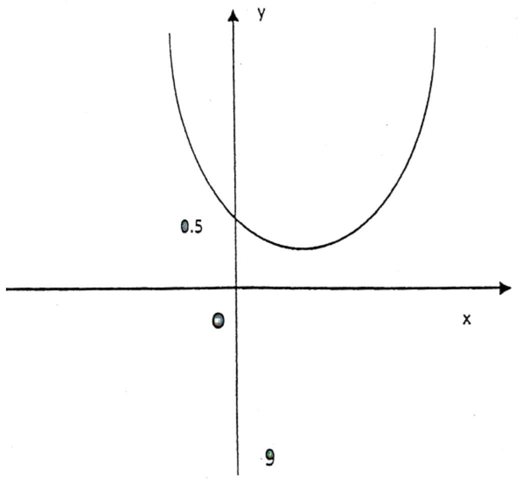


$$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ D > 0 \\ \dfrac{-b}{2a} 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2(3a+1) + 7a > 0 \\ (3a+1)^2 - 28a > 0 \\ \dfrac{-3a-1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \in (-2; -\frac{1}{3} \\ a \in (-\infty; \frac{11-4\sqrt{7}}{9} \end{cases} \cup \left(\frac{11+4\sqrt{7}}{9}; \infty\right) \Leftrightarrow a \in \left(-2; \frac{11-4\sqrt{7}}{9}\right)$$

Պատ.՝ $a \in \left(-2; \frac{11-4\sqrt{7}}{9}\right)$

8. a-ի ինչ արժեքի դեպքում անհավասարումը բավարարում է ամբողջ թվային առանցքի վրա:



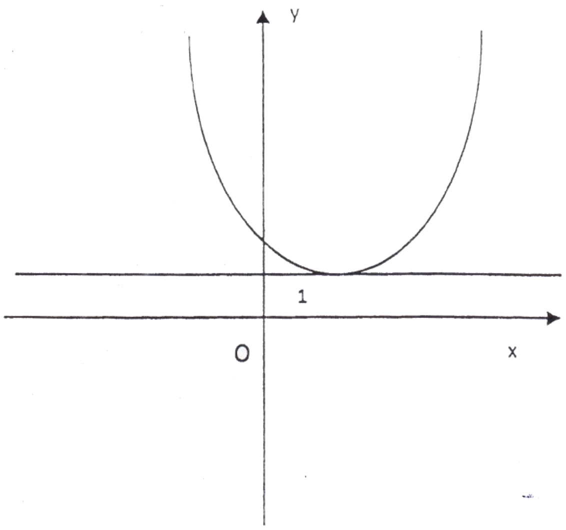
$ax^2+2ax+0.5>0$

Այս անհավասարման լուծումը նույնպես գրաֆիկային պարզ լուծում ունի: Բավական է նկատել, որ f(x) = ax^2 + 2ax + 0,5 ֆունկցիայի գրաֆիկը պետք է ունենա հետևյալ տեսքը, որից հետևում է, որ

Անհավասարումը ճիշտ է նաև a=0 դեպքում:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 2a^2 - a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [0; \frac{1}{2})$$

9. c-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում y = $2x^2$ - 6cx + 3c + 1 ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում y=1 ուղղից վերև:



$$y(x) > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 6cx + 3c > 0$$

D<0

$36c^2 - 24c < 0$

$$3c^2 - 2c < 0$$
$$c(3c-2) < 0$$
$$c \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$$

Մոդուլի գաղափարը հեշտացնում է մաթեմատիկական որոշ խնդիրների գրառումը և պարզաբանումը: Բավականին դյուրին է դառնում խնդիրների և վարժությունների լուծումը, եթե օգտվում ենք մոդուլի երկրաչափական մեկնաբանությունից: Դրա համար նախ պետք է աշակերտը հասկանա, որ |x–a| ասելով հասկանում ենք կոորդինատային x-ի հեռավորությունը a-ից:

Օրինակ1. Մոդուլի նշանով գրել պայմանը, որով նկարագրվում են այն x կետերը, որոնք

ա) –2 կետից 5 միավոր են հեռու՝ (x + 2| = 5,

բ) -4 կետից ամենաշատը 10 միավոր են հեռու |x + 4| ≤ 10,

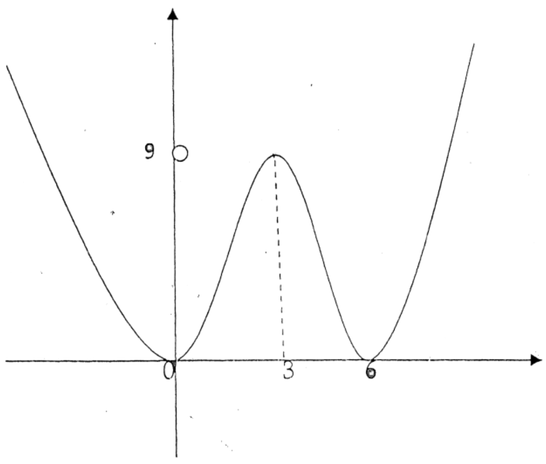
գ) ավելի մոտ են 24-ին, քան 32-ին |x - 24| < |x - 32|,

դ) 2 անգամ մոտ են 10-ին, քան 4-ին՝ 2|x - 10| =|x - 4|:

Օրինակ2. Գտնել (x^2 – 6x| = a հավասարման լուծումների քանակը կախված է a պարամետրից:

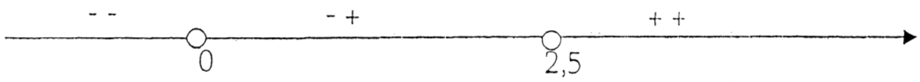
Այս խնդիրը լուծելու համար աշակերտը պետք է լավ տիրապետի գրաֆիկական մեթոդին: Նախ կառուցենք y = |x^2 - 6x| ֆունկցիայի գրաֆիկը, այնուհետև կախված y=a ուղղի դիրքից, կերևա հավասարման լուծումների քանակը:

$$y = |\,x^2 - 6x| = |\,x^2 - 6x + 9 - 9|$$
$$= |\,(x-3)^2 - 9|$$



Կառուցված գրաֆիկից ակնհայտ է դառնում, որ հավասարումը ունի երկու լուծում, եթե $a \in \{0\} \cup (9, +\infty)$, հավասարումն ունի երեք լուծում, եթե a=9, հավասարումն ունի չորս լուծում, եթե a ∈(0,9)։

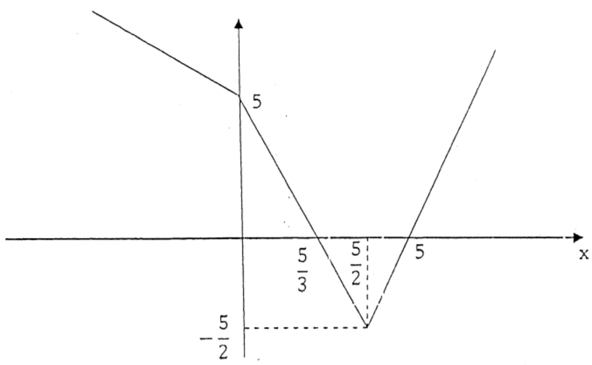
Օրինակ 3. Կառուցել y=|2x=5|-|x| ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Օգտվենք միջակայքերի եղանակից՝



Այսպիսով՝ եթե x ∈(-∞,0), y = -2x + 5 + x = –x + 5

եթե x ∈ [0, 2,5], y = -2x + 5 – x = –3x + 5

եթե x ∈ (2,5:∞), y = 2x - 5 - x = x - 5։



Օրինակ 4

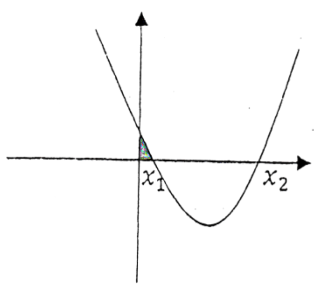
a-ի ինչ արժեքների դեպքում արտահայտությունն իմաստ ունի միայն մեկ արժեքի համար $\sqrt{(a-3)x^2+2ax+2a}$։

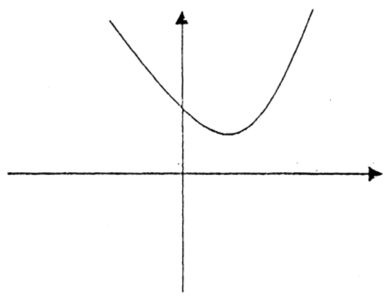
Պարզ է, որ a=3 դեպքում արմատատակ արտահայտությունը կընդունի y=6x+6 տեսքը։

Այս դեպքում արմատն իմաստ կունենա x-ի անթիվ արժեքների դեպքում (x $\in [-1, \infty)$), հետևաբար a≠3։

Եթե a > 3, ապա այս դեպքում արմատատակ արտահայտությունը կընդունի

$y = (a - 3)x^2 + 2ax + 2a$ տեսքը։

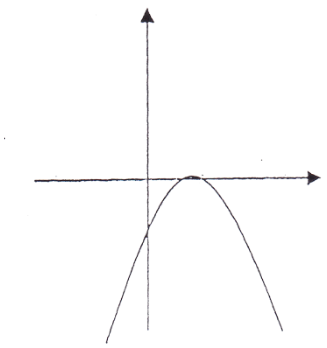




Գրաֆիկից երևում է, որ արմատն իմաստ ունի, եթե x ∈ (−∞, x_1) U (x_2, ∞), կամ իմաստ ունի, երբ x ∈ R:

Մնում է դիտարկել a < 3 դեպքը:

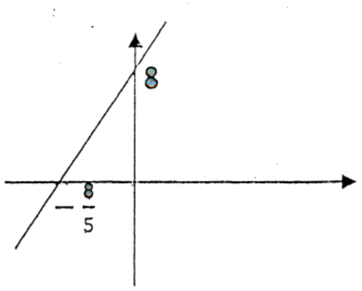
Խնդրի պահանջից հետևում է, որ գրաֆիկը պետք է ունենա հետևյալ տեսքը:



Հետևաբար $\begin{cases} a-3<0 \\ D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3<0 \\ 4a^2-8a(a-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3<0 \\ 24a-4a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0$: *Պատ.* $a = 0$

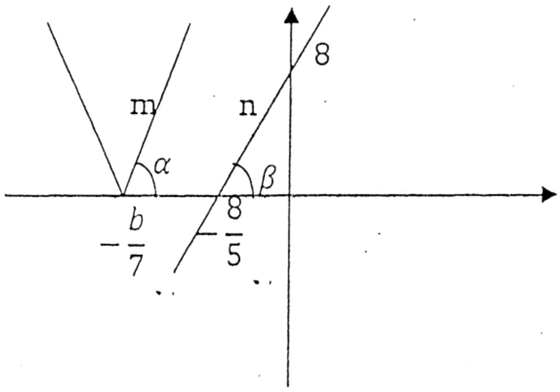
Օրինակ 5. Գտնել b պարամետրի ամենամեծ ամբողջ արժեքը, որի դեպքում համակարգն ունի լուծում. $\begin{cases} y=|\ 7x+b| \\ y=5x+8 \end{cases}$:

Նախ կառուցենք y=5x+8 ուղիղը.

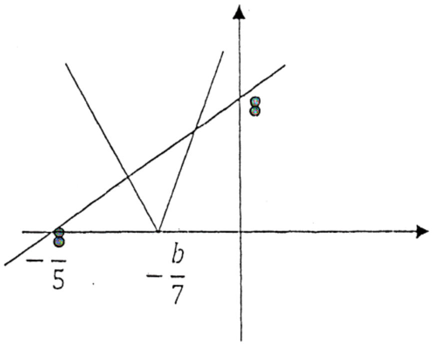


Աշակերտներին հարկավոր է հիշեցնել, որ y=ax+b ուղիղը x-երի առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է այնպիսի φ անկյուն, որ $tg\varphi$ = k, ինչպես նաև այն, որ առաջին քառորդի անկյունների համար a > β => tga > $tg\beta$:

Հարկավոր է նաև հիշեցնել y = |f (x)| ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման մեթոդները: Պարզ է, որ եթե $x = -\frac{b}{7}$ կետը գտնվի $-\frac{8}{5}$-ից ձախ, ապա կստացվի հետևյալ պատկերը.



m ճառագայթը և n ուղիղը միմյանց հետ չեն հատվի, քանի որ $\alpha > \beta$: Այս դեպքում համակարգը լուծում չունի: Պարզ է, որ $-\frac{b}{7} = -\frac{8}{5}$ դեպքում համակարգն ունի մեկ լուծում: Եթե $x = -\frac{b}{7}$ կետը գտնվում է $-\frac{8}{5}$ից աջ, ստացվում է հետևյալ պատկերը, որը բավարարում է խնդրի պայմանին:

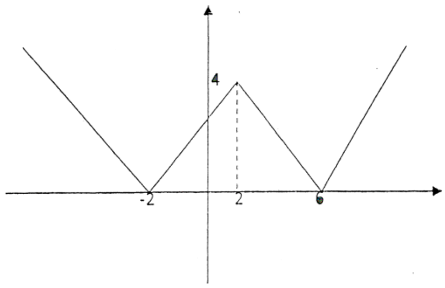


Հետևաբար- $\frac{b}{7} > -\frac{8}{5} \Leftrightarrow \frac{b}{7} < \frac{8}{5} \Rightarrow 5b < 56 \Rightarrow b < 11\frac{1}{5}$: Պատ.՝ b=11:

Օրինակ 6. Լուծել ||x – 2| - 4| = a հավասարումը:

Նման հավասարումներ լուծելու կարճագույն մեթոդներից մեկը գրաֆիկական մեթոդն է:

Դիտարկենք y = ||x - 2| - 4| ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Գրաֆիկից հետևում է, որ նշված հավասարումն ունի

ա) երկու լուծում, եթե $a \in \{0\}\, U\, (4, \infty)$

բ) երեք լուծում, եթե a=4

գ) չորս լուծում, եթե $a \in (0,4)$

դ) լուծում չունի, եթե $a \in (-\infty, 0)$:

Օրինակ 7. Տրված է$(a-1)4^{-|x|} - 10 \cdot 2^{-|x|} + 1 = 0$ հավասարումը: a պարամետրի ինչպիսի արժեքների դեպքում հավասարումն ունի ա) երեք լուծում, բ) չորս լուծում: Դիտարկենք $y = (a-1)t^2 — 10t + 1$ ֆունկցիան, որտեղ t = $2^{-|x|} = (-\frac{1}{2})^{|x|}$

1.դեպք. երբ a=0 ⇒ -10t+1=0 => t=0,1,=> $(-\frac{1}{2})^{|x1|} = \frac{1}{10}$ ունի երկու լուծում:

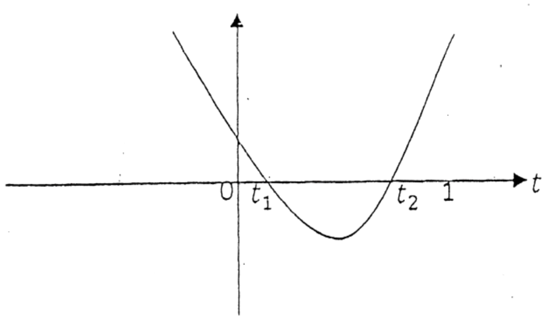
2 դեպք. երբ a>1. պարզ է՝ որպեսզի$(\frac{1}{5)})^{|x|}$ հավասարումը լուծում ունենա պետք է տեղի ունենա t∈(0,1] պայմանը:

Որպեսզի սկզբնական հավասարումը ունենա երեք լուծում, պետք է տեղի ունենա t, ∈(0,1)t_2 = 1 պայմանը: Հետևաբար ստուգենք t=1 դեպքը a-1-10+1=0 >1=10:

Ստուգելով համոզվում ենք, որ a=10-ը բավարարում է երեք լուծում ունենալու պայմանին:

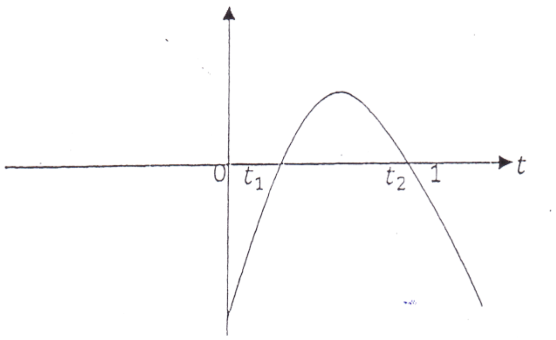
Չորս լուծում ունենալու հարցը պարզենք, օգտվելով գրաֆիկական մեթոդից:

y=(a-1)^{2}t-10t+1, պարզ է, որ այս դեպքում հավասարումը պետք է ունենա երկու արմատ՝ t_1և t_2 ընդ որում $t_1 \neq t_2$, $t_2 \in (0;1)$ $t_2 \in (0;1)$



$$\begin{cases} a-1>0 \\ y(0)>0 \\ y(1)>0 \\ y\left(-\dfrac{b}{2a}\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ a>10 \\ a>6 \Rightarrow a \in (D,26) \\ a<26 \end{cases}$$

a-1<0 դեպքը չի բավարարում, քանի որ կստացվի y(0) < 0 => 1<0, որը հնարավոր չէ (տես գրաֆիկը).



Պատ. հավասարումն ունի 4 լուծում, երբ $a \in (10,26)$:

Եզրակացություն

Գրաֆիկների կիրառումը միջնակարգ դպրոցի առանցքային հարցերից է, առանց որի դժվար է լուծել բազմաթիվ ժնդիրներ:

Հետազոտական աշխատանքում ընդգրկված են տարբեր տիպի և դժվարության խնդիրներ: Կարծում եմ որ աշխատանքը օգտակար կլինի միջնակարգ դպրոցի բարձր դասարանի աշակերտների և սկսնակ ուսուցիչների համար:

Գրականություն

1. Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի տեսական նյութերի տեղեկատու, Կ. Գ. Առաքելյան

2. Факультативный курс по математике, решение задач, И.Ф. Шарыгин

3. За страницами учебника математики, Н.Я. Валенкин, Л.П. Шибасова,З.Ф.Шибасова

4. Сборник задач по алгебре, М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич

5. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրնը, Գ. Գևորգյան, Ա Սահակյան:

6. https//wwwgoogle.com

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ
ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ԹԵՄԱ՝ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ ԱՆԱՀԻՏ ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ ՄԵԼՍ ՍԱՔԱՆՅԱՆ

Վանաձոր 2023թ.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Հետազոտական աշխատանքի թեման է` ,,Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներով արտահայտությունների ձևափոխություններ,, :

Աշխատանքում տեղ են գտել բնագիտամաթեմատիկական հոսքի ,,Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր,, 10-րդ դասարանի դասագրքի տեսական մասի վերլուծությունը, առավել բարդ առաջադրանքների լուծումները` իրենց մեկնաբանություններով: Աշխատանքում տեղ են գտել նաև հակադարձ եռանկյունաչափական արտահայտություններ պարունակող հավասարումների լուծումներ, արտահայտությունների ձևափոխություններ և նույնությունների ապացուցումներ:

Աշխատանքի նպատակն է` խորացնել գիտելիքները հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների վերաբերյալ: Այն օգտակար կլինի նաև ավագ դպրոցի այն աշակերտներին, որոնք ցանկանում են խորացնել իրենց գիտելիքները մաթեմատիկայի բնագավառում:

Հեղինակ` Ա.Խաչիկյան

ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

Սահմանում – φ ֆունկցիան կոչվում է D բազմության վրա որոշված f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիա, եթե այն որոշված է f ֆունկցիայի արժեքների E բազմության վրա և D բազմության կամայական x կետի համար

$$\varphi\ (f(x) = x$$

Եթե ֆունկցիան ունի հակադարձ, այն անվանում են հակադարձելի: Հեշտ է համոզվել, որ D բազմության վրա տրված ֆունկցիան հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն փոխմիարժեք է այդ բազմության վրա:

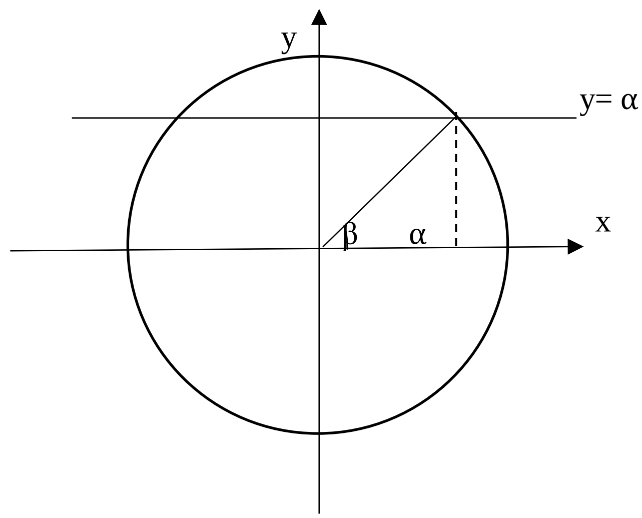
Իրոք, եթե f(x) ֆունկցիան այնպիսին է, որ $x_1 \neq x_2 \in D(f)$ դեպքում $f(x_1) = f(x_2)$, ապա $x_1 = \varphi(f(x_1)) = \varphi(f(x_2)) = x_2$

Ըստ պայմանի $x_1 \neq x_2$: Հետևաբար f – ը չի կարող ունենալ հակադարձ ֆունկցիա:

Այստեղից պետք է եզրակացնել, որ հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները դիտարկելիս, պետք է եռանկյունաչափական ֆունկցիաների համար որոշման տիրույթը վերցնել նրանց մոնոտոնության միջակայքը:

ԹՎԻ ԱՐԿՍԻՆՈՒՍԸ

Կոորդինատային հարթության վրա դիտարկենք միավոր շրջանագիծը և y= α ուղիղը:



Պարզ է, որ $|a| \leq 1$ դեպքում $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում գոյություն ունի միակ β թիվ այնպիսին, որ $\sin\beta = \mathcal{L}$: Այդ թիվն անվանում ենք a թվի արկսինուս:

Սահմանում: $\alpha \in [-1;1]$ թվի արկսինուս կոչվում է $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ հատվածի այն թիվը, որի սինուսը հավասար է $\alpha -$ ի: Արկսինուսի սահմանումից հետևում է, որ $\forall\alpha \in [-1;1]$ թվի համար

$$\sin(arcsina) = a$$

Հատկություն 1: $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Իրոք, - $arcsina \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin(-arcsina) = -\sin(arcsina) = -a$

Հետևաբար $\arcsin(-a) =$ - $arcsina$

Եթե $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ապա $\arcsin(sinx) = x$

Ինչպես գտնել $\arcsin(sinx)$, երբ $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Եթե n = 2k, օգտվելով y=sinx ֆունկցիայի պարբերականությունից

$$\sin(x - \pi n) = \sin x$$

Եթե n=2k+1, ապա օգտվում ենք բերման բանաձևից.

$$\sin(\pi n - x) = \sin x$$

Այսպիսով

$$\arcsin(sinx) = \begin{cases} x - \pi n, & \text{եթե } n - \text{ը զույգ է} \\ \pi n - x, & \text{եթե } n - \text{ը կենտ է} \end{cases}$$

Օրինակ, գտնենք $\arcsin(sin10)$

$3\pi - 10 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin(sin10) = 3\pi - 10$

Որպես օրինակներ դիտարկենք 10-րդ դասարանի բնագիտական հոսքի գործող դասագրքի թիվ 467 վարժությունը:

ա) $\arcsin(sin5) = 5 - 2\pi$

$5\text{-}2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

բ) $\arcsin(sin12) = \arcsin(\sin(12 - 4\pi) = 12 - 4\pi$

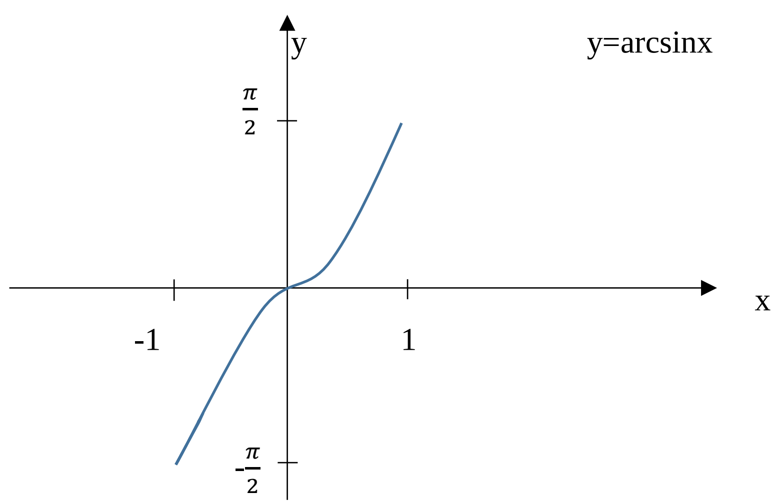
$12\text{-}4\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

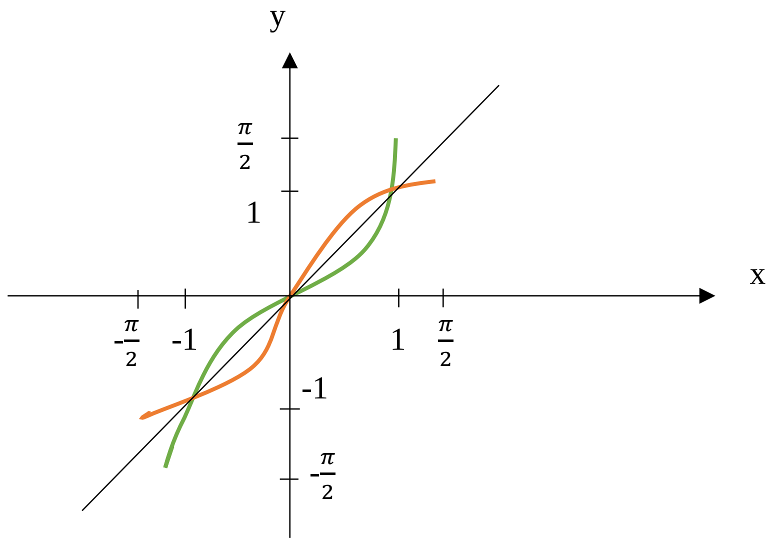
գ) $\arcsin(sin - 8) = - \arcsin(\sin 8) = - \arcsin(\sin(3\pi - 8)) = -(3\pi - 8) = 8 - 3\pi$

$3\pi - 8 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Եթե հաշվի առնենք, որ y=sinx ֆունկցիան $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում մոնոտոն է, հետևաբար նաև հակադարձելի է:

$y = \arcsin x$ և $y = \sin x$ ֆունկցիաները փոխհակադարձ թվեր են: Պատկերենք այդ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

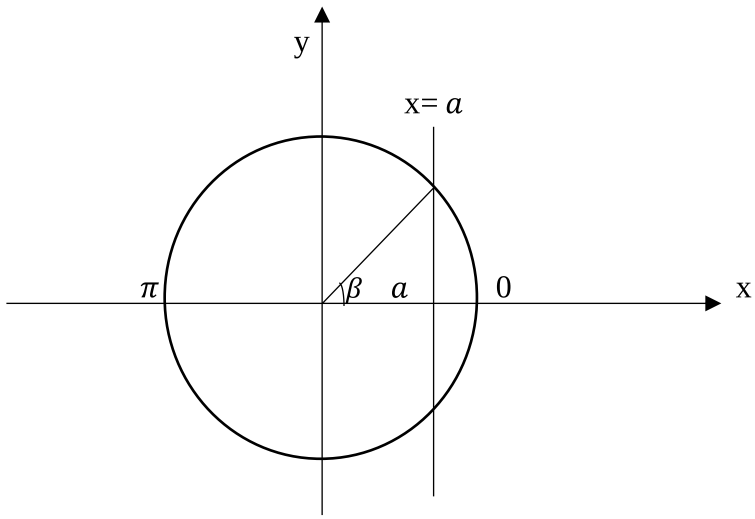




y
$\frac{\pi}{2}$
1
x
$-\frac{\pi}{2}$
-1
1
$\frac{\pi}{2}$
-1
$-\frac{\pi}{2}$

ԹՎԻ ԱՐԿԿՈՍԻՆՈՒՍԸ

Համանման ձևով տրվում է նաև a թվի արկկոսինուսի սահմանումը միավոր կիսաշրջանագծի միջոցով



Սահմանում: $a \in [-1;1]$ թվի արկկոսինուս կոչվում է $[0;\pi]$ հատված այն թիվը, որի կոսինուսը հավասար է a-ի:

$\forall a \in [-1;1]$

$$\cos(arccosa) = a \in [-1;1]$$

Հատկություն 2:

$$arccosa(a) = \pi - arccosa$$

Ապացույց: $0 \leq arccosa \leq \pi$

$$-\pi \leq -arccosa \leq 0$$

$$0 \leq \pi - arccosa \leq \pi$$

Հետևաբար՝ $\pi - arccosa \in [0;\pi]$

Ըստ բերման բանաձևի՝

$$\cos(\pi - arccosa) = -\cos(arccosa) = -a$$

Հետևաբար՝ $\arccos(-a) = \pi - arccosa$

Սահմանումից հետևում է նաև՝ եթե $x \in [0;\pi]$, ապա $arccosa\,(cosx) = x$

Նույն ձևով կարելի է ստանալ, որ

$$arccosa\ (cosx) = \begin{cases} x - \pi k, & \text{եթե } k - \text{ն զույգ է} \\ (k+1)\pi - x, & \text{եթե } k - \text{ն կենտ է} \end{cases}$$

Օրինակ, գտնենք $arccosa\ (cos10)$

$10\text{-}3\pi \in [0;\ \pi]$

$arccos\ (cos10) = 4\pi - 10$

Դիտարկենք դասագրքի **472 վարժությունը.**

ա) $arccos\ (\cos(-1)) = \arccos(\cos 1) = 1$

$1 \in [0;\ \pi]$

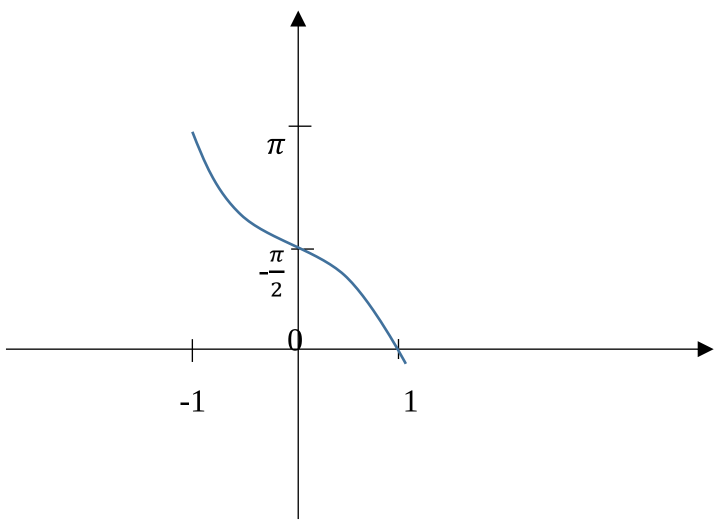
բ) $arccos\ (\cos(9)) = \arccos(\cos(9 - 2\pi) = 9 - 2\pi$

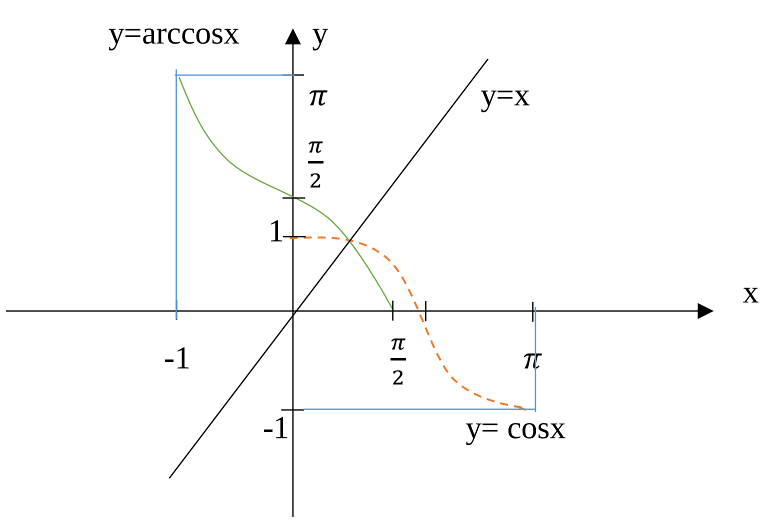
$9\text{-}2\pi \in [0;\ \pi]$

գ) $arccos\ (\cos(4)) = \arccos(\cos(\ 2\pi - 4) = 2\pi - 4$

$2\pi - 4 \in [0;\ \pi]$

Կառուցենք y=cosx $x \in [0;\ \pi]$ և y= arccosx փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները:





Ապացուցենք, որ $\forall a \in [-1;1]$ թվի համար

$$arcsina + arccosa = \frac{\pi}{2}$$

Ապացույց: Դիցուք $a \in [-1;1]$ $\beta = arcsina$ այդ դեպքում՝

$$-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le -\beta \le \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{\pi}{2} - \beta \le \pi \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{\pi}{2} - \beta \in [0;\pi]$$

$$cosa(\frac{\pi}{2} - \beta) = sin\beta = \sin(arcsina) = a$$

Հետևաբար

$$\frac{\pi}{2} - \beta = arccosa$$

$$arcsina + arccosa = \frac{\pi}{2}$$

Ապացուցված է:

Այժմ դիտարկենք դասագրքի **473 վարժությունը**.

ա) $\arcsin\left(cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$

բ) $\arccos\left(sin\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(sin\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{14}$

գ) $\arcsin\left(cos\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$

դ) $\cos\left(2arcsin\frac{1}{4}\right)$

Օգտվենք $\cos 2\mathcal{L} = 1 - \sin^2\mathcal{L}$ բանաձևից.

$$\cos\left(2arcsin\frac{1}{4}\right) = 1 - 2\frac{1}{16} = \frac{7}{8}$$

ե) $\cos\left(arcsin\frac{2}{5}\right) = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

զ) $\sin\left(\frac{1}{2}arccos\frac{5}{13}\right)$

Օգտվենք $\sin\frac{\mathcal{L}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\mathcal{L}}{2}}$ բանաձևից և քանի որ

$$\frac{1}{2}\arccos\frac{5\pi}{13} \in [0;\ \pi] \quad \rightarrow \quad \sin\mathcal{L} > 0\ ; \qquad \sin\left(\frac{1}{2}arccos\frac{5}{13}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{20}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Վարժություն 474

Ապացուցել, որ $\forall a_1, a_2 \in [-1; 1]$ թվի դեպքում $a_1 < a_2$ պայմանից հետևում է, որ

ա) $arc\sin a_1 < arc\sin a_2$

բ) $arccos a_1 > arccos a_2$

Ապացույց:

ա) Ենթադրենք հակառակը, ենթադրենք գոյություն ունեն այնպիսի

$-1 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1$ թվեր, որ

$arc\sin a_1 \geq arc\sin a_2$

Քանի, որ $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում y= sinx ֆունկցիան աճող է, ուրեմն՝

$\sin(arc\sin a_1) \geq \sin(arc\sin a_2)$ այսինքն $a_1 \geq a_2$, որը հակասում է պայմանին:

բ) նույն ձևով

$arccos a_1 \leq arccos a_2$

Քանի որ $[0; \pi]$ միջակայքում y= cosx ֆունկցիան նվազող է, ուստի

$\cos(arccos a_1) \geq \cos(arccos a_2)$ այսինքն $a_1 \geq a_2$, որը հակասում է պայմանին:

Այստեղից պետք է եզրակացնել, որ որևէ միջակայքում աճող ֆունկցիայի հակադարձը աճող է, իսկ նվազողինը՝ նվազող:

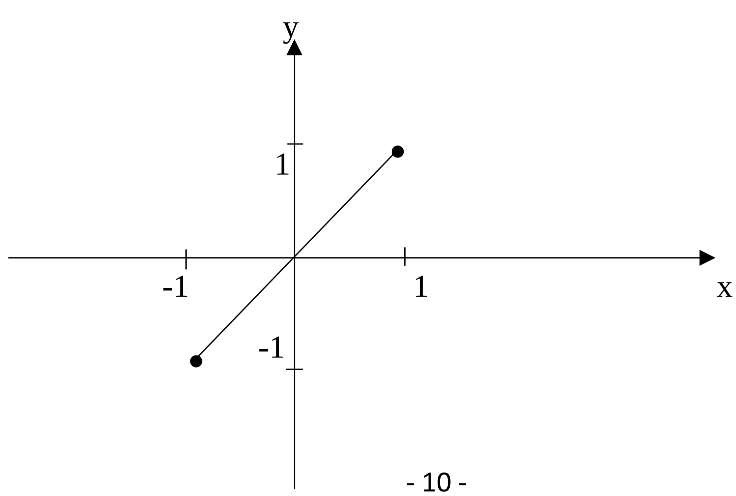
Վարժություն 475

Կառուցել ֆունկցիաների գրաֆիկները

ա) $y=\sin(arc\sin x)$

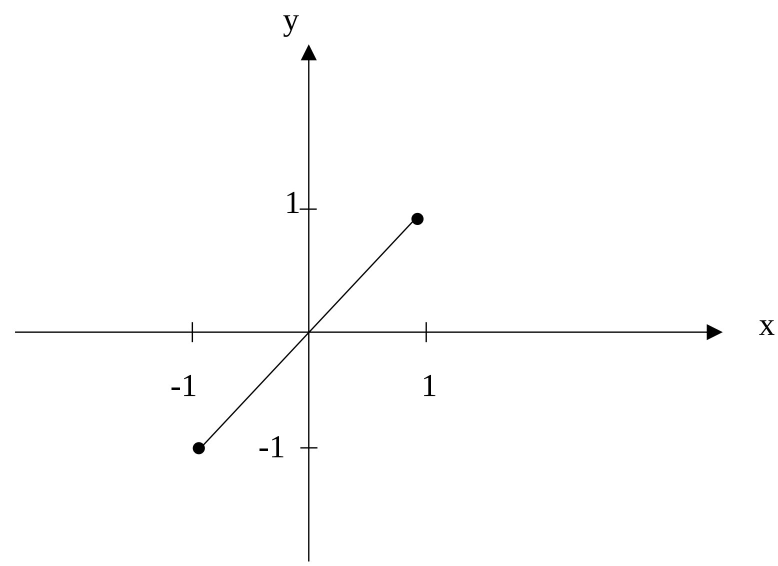
Քանի որ $\sin(arc\sin x) = x$, $x \in [-1; 1]$ պետք է կառուցել $y = x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

$D(y) = [-1; 1]$, $E(y) = [-1; 1]$



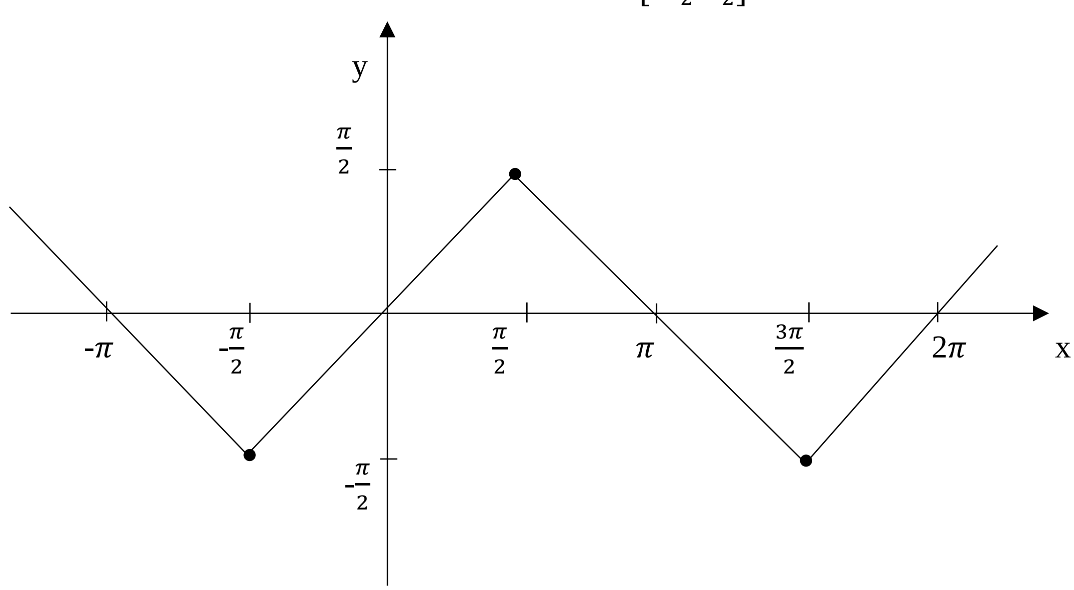
բ) y=$cosa(arccosx)$

y=x D(y) = $[-1; 1]$ $E(y) = [-1; 1]$



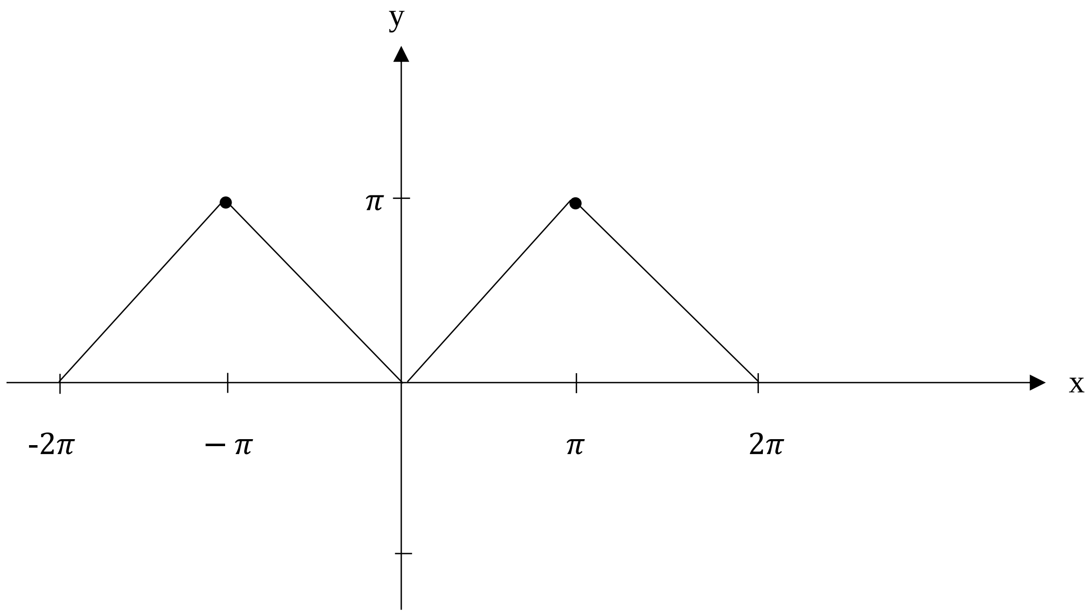
գ) y= arcsin(sinx)

Այստեղ պետք է օգտվել y=sinx ֆունկցիայի պարբերականությունից: Պետք է հաշվի առնել, որ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը՝ E(y) = $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



դ) y=$arccosx(cosx)$

D(y) =R E(y) = $[0; \pi]$


y
π
x
-2π
$-\pi$
π
2π

ԹՎԻ ԱՐԿՏԱՆԳԵՆՍԸ ԵՎ ԱՐԿԿՈՏԱՆԳԵՆՍԸ

Քանի որ y=tgx ֆունկցիան $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում աճող է և ընդունում է ցանկացած արժեք $(-\infty; +\infty)$ միջակայքից, հետևաբար $a \in R$ թվի համար գոյություն ունի միակ $b \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ թիվը, որի համար $\text{tg}b = a$: Այդ թիվը a թվի արկտանգենսն է:

Սահմանում: a թվի արկտանգենս կոչվում է $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքի այն թիվը, որի տանգենսը a է:

$$\text{tg}\,(arctga) = a$$

Ցույց տանք, որ $arctg(-a) = -arctga$

Ապացույց: $arctga \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow -\frac{\pi}{2} < arctga < \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2} < -arctga < \frac{\pi}{2} \rightarrow$

$\rightarrow -arctga \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$tg(-arctga) = -tgarctba = -a$

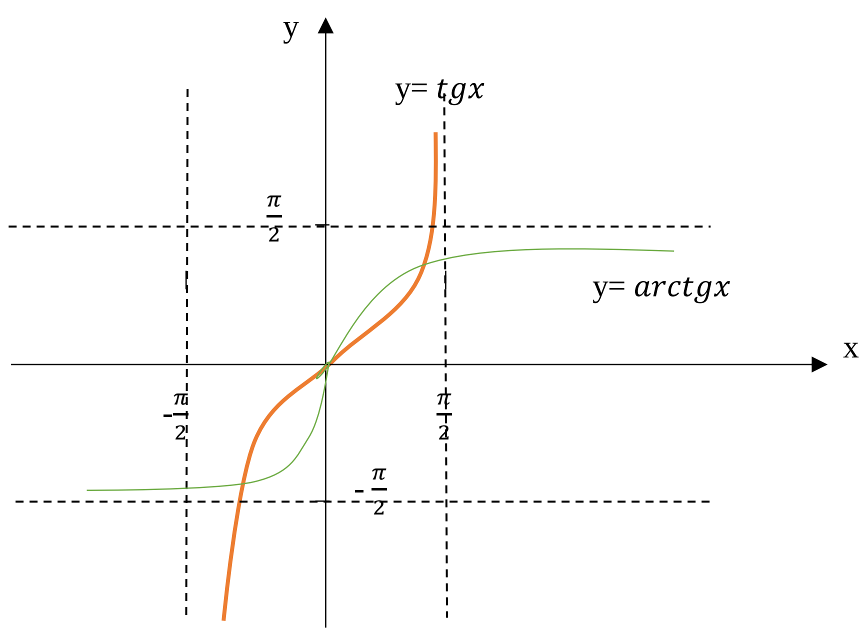
Այսինքն $arctg(-a) = -arctga$

Սահմանումից երևում է, որ

ա) $\forall a \in R \quad \text{tg}(\text{arctga}) = a$

բ) եթե $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad arctg(tgx) = x$

Կառուցենք $y = tgx$ և $y = arctgx$ փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները



Նույն ձևով սահմանվում է y= $ctgx$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան
$(0;\pi)$ միջակայքում:

Սահմանում: a թվի արկկոտանգենս կոչվում է $(0;\pi)$ միջակայքի այն թիվը, որի կոտանգենսը a է:

Ցույց տան, որ $arcctg(-a) = \pi - arcctga$

Իրոք, $0< arcctga < \pi \rightarrow -\pi < -arcctga < 0 \rightarrow 0 < \pi - arcctga < 0 \rightarrow$

$\pi - arcctga \in (0;\ \pi)$ և

$ctg(\pi - arcctga) = -ctg(arcctga) = -a$

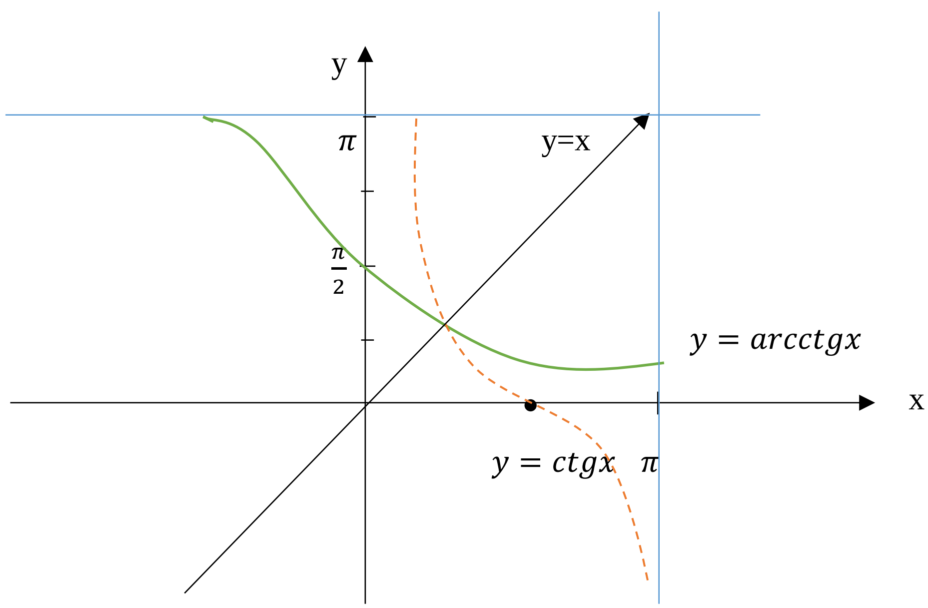
ուստի $arcctg(-a) = \pi - arcctga$:

Սահմանումից հետևում է, որ

ա) $\forall a \in \mathrm{R}$ $\quad \mathrm{ctg(arcctga)} = a$

բ) եթե $\mathrm{x} \in [0;\pi]$ $\quad arcctg(ctgx) = x$

Կառուցենք $y = ctgx$ $x\epsilon(0;\pi)$ և $y = arctgx$ ֆունկցիաների գրաֆիկները.



Վարժություն 479

Ապացուցել հավասարությունը

բ) $arcctg(\sqrt{5} - 5) + arcctg(5 - \sqrt{5}) = \pi$

Ապ. $arcctg(\sqrt{5}-5)+\pi - arcctg(5-\sqrt{5}) = \pi$

գ) $arcctg(1-\sqrt{3}) + arcctg\ (\frac{2}{\sqrt{3}+1}) = \pi$

$arcctg\ (\frac{2}{\sqrt{3}+1}) = arcctg\ (\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}) = arcctg(\sqrt{3}-1) = \pi - arcctg(1-\sqrt{3})$

Հետևաբար

$arcctg(1-\sqrt{3}) + arcctg\ (\frac{2}{\sqrt{3}+1}) = \pi$

դ) $arcctg(1-\sqrt{7}) + arcctg\ \left(\frac{6}{\sqrt{7}+1}\right) = 0$

$arcctg\ \left(\frac{6}{\sqrt{7}+1}\right) = arcctg\ \left(\frac{6\sqrt{7}-1}{6}\right) = arctg(\sqrt{7}-1) = -arctg(1-\sqrt{7})$

Հետևաբար

$$arcctg(1-\sqrt{7}) + arcctg\ \left(\frac{6}{\sqrt{7}+1}\right) = 0$$

Վարժություն 480

Ապացուցել, որ $\forall a$ իրական թվի համար $arctg$a + arcctg = $\frac{\pi}{2}$

Ապացույց: Դիցուք a-ն ցանկացած իրական թիվ է և $\beta = arctga$

Այդ դեպքում՝

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \;\; \rightarrow \;\; -\frac{\pi}{2} < -\beta < \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \pi$$

$$\frac{\pi}{2} - \beta \in (0;\ \pi)$$

$ctg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = tg\beta = tg(arctg) = a$ այսինքն՝ $\frac{\pi}{2} - \beta = arctga$ կամ

$$arctga + arcctga = \frac{\pi}{2}$$

Վարժություն 481

Ապացուցել, որ $\forall a_1 < a_2$ թվերի համար

ա) $arctga_1 < arctga_2$

բ) $arcctga_1 > arcctga_2$

Ապացույցը նախորդների նման կատարվում է հակասող ենթադրությամբ: Գրաֆիկների վրա երևում է, որ $y = arctgx$ ֆունկցիան աճող է, իսկ $y = arcctgx$ – ը՝ նվազող:

ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Օրինակ 1: Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները

ա) $arcsin\frac{2x}{x-1}$ բ) y= $\sqrt{\pi - 4arccos\frac{x}{2}}$

Լուծում:

ա) -1≤ $\frac{2x}{x-1} \leq 1 \begin{cases} \frac{2x}{x-1} \leq 1 \\ \frac{2x}{x-1} \geq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \leq 0 \\ \frac{3x-1}{x-1} \end{cases}$ $\begin{cases} x \in [-1; 1] \\ x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)\right] \cup (1; +\infty) \end{cases}$

D(y) = $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$ Պատ. $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$

բ) Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը որոշելու համար պետք է լուծել համակարգը.

$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \\ 4arccos\frac{x}{2} \leq \pi \end{cases}$ $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ arccos\frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Հաշվի առնելով, որ $arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, վերջին անհավասարությունը կգրենք հետևյալ տեսքով.

$$arccos\frac{x}{2} \leq arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Քանի որ ֆունկցիան նվազող է, հետևաբար՝

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 1 \quad \to \quad \sqrt{2} \leq x \leq 2 \quad \to \quad x \in [\sqrt{2}; 2]$$

Համակարգի լուծումը կլինի.

$\begin{cases} x \in [-2; 2] \\ x \in [\sqrt{2}; 2] \end{cases}$ → $x \in [\sqrt{2}; 2]$ D$(y) = [\sqrt{2}; 2]$

Պատ. $[\sqrt{2}; 2]$

Օրինակ 2: $arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$ արտահայտությունն արտահայտել մնացած արկֆունկցիաներով.

I եղանակ: Նշանակենք $\mathcal{L} = arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$, ունենք $sin\mathcal{L} = \frac{7}{\sqrt{50}}$, որտեղ $0 \leq \mathcal{L} \leq \frac{\pi}{2}$:

Գտնենք $\mathcal{L}$ անկյան մյուս եռանկյունաչափական ֆունկցիաները.

$cos\mathcal{L} = \sqrt{1 - \sin^2 \mathcal{L}} = \sqrt{1 - \frac{49}{50}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$

$tg\mathcal{L} = \frac{sin\mathcal{L}}{cos\mathcal{L}} = 7$

$ctg\mathcal{L} = \frac{1}{tg\mathcal{L}} = \frac{1}{7}$

$\mathcal{L} = arccos\frac{1}{\sqrt{50}} = arctg7 = arcctg\frac{1}{\sqrt{7}}$

II եղանակ: Կարելի է ստանալ նաև երկրաչափորեն:

Քանի որ $0 < arcsin\frac{7}{\sqrt{50}} < \frac{\pi}{2}$, ապա կարելի է դիտարկել ուղղանկյուն եռանկյուն, որի էջը հավասար է 7-ի, իսկ ներքնաձիգը $\sqrt{50}$: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի մյուս էջը հավասար է 1-ի: Այդ դեպքում $\cos\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{50}} = arctg7 = arcctg\frac{1}{7}$:

Օրինակ 3: Հաշվել $\cos(arctgx)$;

Լուծում: Նշանակենք $\mathcal{L} = arctgx$, $tg\mathcal{L} = x$,

Ընդ որում $-\frac{\pi}{2} < \mathcal{L} < \frac{\pi}{2}$: Այսպիսով, խնդիրը բերվում է $\cos\mathcal{L}$ գտնելուն:

$$1 + tg^2\mathcal{L} = \frac{1}{cos^2\mathcal{L}}$$

$$cos\mathcal{L} = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2\mathcal{L}}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Օրինակ 4: Հաշվել $tg\left[2arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$,

Լուծում: Նշանակենք $\mathcal{L} = arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$,

$cos\mathcal{L} = -\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \mathcal{L} < \pi$:

Օգտվենք $tg2\mathcal{L} -$ ի բանաձևից.

$$tg2\mathcal{L} = \frac{2tg\mathcal{L}}{1-tg^2\mathcal{L}}$$

$$tg\mathcal{L} = -\sqrt{\frac{1}{cos^2\mathcal{L}} - 1} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$tg2\mathcal{L} = -\frac{5}{1-\frac{5}{4}} = 4\sqrt{5}$

$tg\mathcal{L} = \left[2arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = 4\sqrt{5}$:

Օրինակ 5: Հաշվել $arctg2 + arctg3$:

Նշանակենք $arctg2 + arctg3 = A$

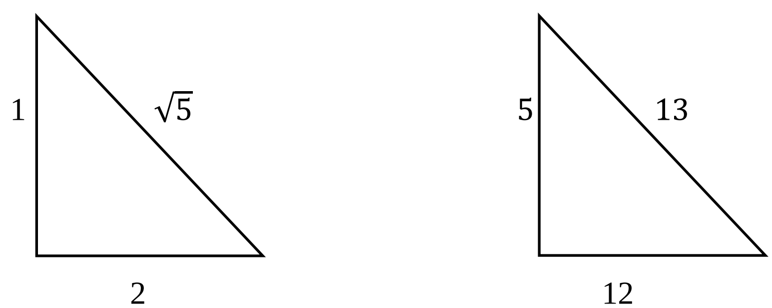
Հաշվենք $tgA -$ ն:

$$tgA = tg(arctg2 + arctg3) = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$$

$$arctg2 + arctg3 = -\frac{\pi}{4}:$$

Օրինակ 6: Հաշվել $12sin\left(2arctg\frac{1}{2}\right) + 5cos\left(2arctg\frac{1}{2}\right)$ արտահայտության արժեքը:

Լուծում: Օգտվենք երկրաչափական մեկնաբանությունից և գումարի սինուսի բանաձևից



$$12sin\left(2arctg\frac{1}{2}\right) + 5cos\left(2arctg\frac{1}{2}\right)$$

$$13sin\left(2arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{5}{12}\right) =$$

$$13\left[sin\left(2arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)cos\left(arccos\frac{12}{13}\right) + cos\left(2arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot sin\left(arcsin\frac{5}{13}\right)\right] =$$

$$13\left[\frac{12}{13}\, sin\left(2arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{5}{13}\, cos\left(2arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right] = 12sin\left(2arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 5cos\left(2arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$12\cdot 2sin\left(arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot cos\left(arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 5\left[cos^2\left(arccos\frac{2}{\sqrt{5}} - sin^2\left(arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\right] =$$

$$12\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + 5\cdot\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{48}{5} + \frac{15}{5} = \frac{63}{5}$$

Պատ. $\frac{63}{5}$

ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄ

Օրինակ 1: Լուծել հավասարումը.

$$arctgx + arctg\frac{x}{2} + arctg\frac{x^2}{7} = 0$$

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ երբ x> 0 հավասարումը լուծում չունի, քանի որ

$$arctgx + arctg\frac{x}{2} + arctg\frac{x^2}{7} > 0$$

Հավասարումը բերենք հետևյալ տեսքի.

$$arctgx + arctg\frac{x}{2} = -arctg\frac{x^2}{7}$$

հավասարեցնենք աջ և ձախ մասերի տանգենսները.

$$tg(arctgx + arctg\frac{x}{2}) = -tg(arctg\frac{x^2}{7})$$

Որտեղից՝

$$\frac{tg(arctgx)+tg\left(arctg\frac{x}{2}\right)}{1-tg(arctgx)tg\left(arctg\frac{x}{2}\right)} = -\frac{x^2}{7}$$

$$\frac{x+\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}} = -\frac{x^2}{7}$$

2 մասը x $\neq 0-$ի բաժանելով վրա կստանանք $x^3 - 2x - 21 = 0$: Քանի որ x=3 հավասարման արմատ է, ձախ մասը բաժանելով (x-3) -ի վրա, հավասարումը կբերենք հետևյալ տեսքի.

$$(x-3)(x^2+3x+7) = 0$$

Սկզբում նկատեցինք, որ x=3> 0 հավասարմանը չի բավարարում, իսկ երկրորդ արտադրիչը իրական արմատ չունի: մնում է ստուգել x=0

$$arctg0 + arctg0 + arctg0 = 0$$

հավասարման արմատ է x = 0

Պատ. 0:

Օրինակ 2: Լուծել

$$2arcsinx + arccos(1-x) = 0$$

Լուծում: Հավասարման ԹԱԲ-ը.

$$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |1-x| \leq 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x\epsilon[-1;1] \\ x\epsilon[0;2] \end{cases} \rightarrow x \,\epsilon\, [0;1]$$

Երբ $x \,\epsilon\, [0;1]$, ապա $0 \leq 2arcsinx \leq \pi$ $0 \leq arccos(1-x) \leq \frac{\pi}{2}$

Այստեղից հետևում է, որ 2 արտահայտությունների գումարը կհավասարվի 0-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ գումարելիները միաժամանակ ընդունում են 0 արժեքը:

$$\begin{cases} 2arcsinx = 0 \\ 2arccos(1-x) = 0 \end{cases}$$

Այստեղից՝ x = 0: Այսպիսով x = 0-ն հավասարման միակ արմատն է:

Օրինակ 3: Լուծել $arcsin(x^2+1) = 0$ հավասարումը:

Լուծում: $x^2+1 \geq 1$, հավասարման ԹԱԲ-ը՝

$$-1 \leq x^2+1 \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad x^2+1 \leq 1$$

Ստացվեց. $\begin{cases} x^2+1 \geq 1 \\ x^2+1 \leq 1 \end{cases}$ որտեղից $x^2+1 = 1 \quad \leftrightarrow \quad x = 0$

Հավասարման միակ արմատը՝ x = 0:

Օրինակ 4: Լուծել հավասարումը

$$arcsin6x = arccos8x$$

Լուծում: Հավասարման ԹԱԲ-ը $\begin{cases} |6x| \leq 1 \\ |8x| \leq 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{8} \end{cases} \leftrightarrow$ x $\epsilon \left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$

x-ը չի կարող լինել բացասական, քանի որ հակառակ դեպքում՝

$-\frac{\pi}{2} < sin6x < 0$, բայց՝ $\frac{\pi}{2} < cos8x < \pi$,:

Այսպիսով, հավասարման երկու մասերը պատկանում են $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքին:

$$arcsin6x = arccos8x \;\leftrightarrow\; \sin(arcsin6x) = \sin(arccos8x) \;\leftrightarrow\; \begin{cases} 6x = \sqrt{1-64x^2} \\ x\epsilon\left[0; \frac{1}{8}\right] \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \quad x = \frac{1}{10}$$

Պատ. $\frac{1}{10}$

Օրինակ 5: Լուծել հավասարումը

$$arcsinx - arctgx = 0$$

Լուծում: $arcsinx = arctgx \quad \leftrightarrow \quad tg(arcsinx) = tg(arctgx) \quad \leftrightarrow \quad \frac{\sin(arcsinx)}{\cos(arcsinx)} = x \quad \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x \quad \leftrightarrow \quad x = 0$$

Քանի որ $0 \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ուրեմն x = 0–ն հավասարման արմատ է:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Հետազոտական իր մեջ ներառում է տեսական մասի համակողմանի վերլուծություն նշված թեմայի վերաբերյալ, ինչպես նաև մանրամասններկայացված է արտահայտությունների ձևափոխությունների, հավասարումների լուծումների մեկանաբանությունները, կատարված են նույնությունների ապացուցումներ:

Աշխատանքի կատարումը նպաստեց խորացնել գիտելիքները հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների վերաբերյալ:

Աշխատանքում տեղ գտած նյութերը կիրառելի են նաև ավագդպրոցում՝ ինչպես թեմայի ուսումնասիրության շրջանակներում, այնպես էլ դրանից դուրս:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Գ.Գ. Գևորգյան, Ա.Ա. Սահակյան - Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, Երևան, Տիգրան Մեծ 2009
2. Կ.Առաքելյան, Ռ.Խաչատրյան և ուրիշներ – Մաթեմատիկայի ձեռնարկ, Երևան, 1997
3. Шувалова Э.З, Агафонов Б.Г. , Богатырев Г. – Повторим математику, Москва, 1969г

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
«ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ.ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ» ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ «ՄՈԴՈՒԼ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐՆ ՈՒ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ՄԻՋԱԿԱՅՔԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ»

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ Ռուզաննա Այվազյան

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ Հ. Գրիգորյան

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

Բովանդակություն

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

«Նա, ով մաթեմատիկա չգիտի, չի կարող որևէ այլ բան իմանալ,

և նույնիսկ չի կարող իմանալ իր տգիտությունը»

Ռ. Բեկոն

Հավասարումները և անհավասարումները մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի անբաժան մասն են կազմում: Պարզագույնները մենք սովորում ենք ցածր դասարաններում և, տարիների ընթացքում, աստիճանաբար սովորում ենք նաև բարդ հավասարումների և անհավասարումների հետ աշխատանքը:

Բացարձակ թվի (մոդուլի) հասկացությանը աշակերտները ծանոթանում են դեռևս 6-րդ դասարանից, սակայն ավելի հիմնարար գիտելիքներ այդ թեմայի շրջանակներում ստանում են ավագ դասարանում: Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի թերևս ամենաբարդ ընկալվող և լուծվող վարժություններն են համարվում նրանք, որոնցում փոփոխականը գտնվում է մոդուլի նշանի տակ:

Հետազոտական աշխատանքի նպատակն է ***ուսումնասիրել*** 12-րդ դասարանում մոդուլ պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծման մեթոդների յուրացման մակարդակը:

Հետազոտական աշխատանքի նպատակից բխող խնդիրներն են.

- ներկայացնել մոդուլ պարունակող հավասարումների և անհավասարումների ընդհանուր տեսքը,
- ներկայացնել դրանց լուծման մեթոդները,
- վերլուծել 12-րդ դասարանի աշակերտների գիտելիքները թեմայի շուրջ:

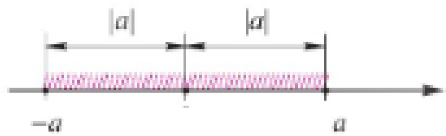
Հետազոտական աշխատանքը բաղկացած են ներածությունից, երկու գլուխներից, յուրաքանչյուրը երկուական կետով, եզրակացությունից և գրականության ցանկից: Առաջին գլխում ներկայացված է մոդուլ պարունակող հավասարումների և անհավասարումների մասին ընդհանուր տեղեկություն, իսկ երկրորդ գլխում ներկայացրել ենք լուծման միջակայքերի մեթոդը և վերլուծել դրա կիրառությունը ավագ դասարանի աշակերտների կողմից:

ԳԼՈՒԽ 1. ՄՈԴՈՒԼ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1.1 Թվի բացարձակ արժեք (մոդուլ) հասկացությունը: Մոդուլի հիմնական հատկությունները

Համարվում է, որ մոդուլ (բացարձակ արժեք) տերմինը առաջարկել է օգտագործել Նյուտոնի աշակերտ Կոտսը, սակայն բացարձակ արժեքի մերօրյա համընդհանուր նշանակությունը ներմուծվել է 1841 թվականին Վեյերշտրասի կողմից:[6]

Ամբողջ թվի բացարձակ արժեք կամ մոդուլ է կոչվում այն բնական թիվը, որը ցույց է տալիս, թե կոորդինատային ուղղի վրա 0-ից քանի միավոր հեռավորության վրա է գտնվում տվյալ ամբողջ թիվը: [1] Սա մոդուլի երկրաչափական իմաստն է:



Հանրահաշվում a թվի մոդուլ (բացարձակ արժեք) կոչվում է $|a|$ թիվը, որը հավասար է a-ի, եթե a-ն ոչ բացասական է և հավասար է $-a$, եթե a-ն ոչ դրական է, այսինքն.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{□□□}\ a \geq 0 \\ -a, \text{□□□}\ a \leq 0 \end{cases}$$

Օրինակ՝ $|7| = 7, |-3| = -(-3) = 3$:

Վերը նշվածից տեսնում ենք, որ 0-ից տարբեր ցանկացած թվի բացարձակ արժեքը ոչ բացասական թիվ է: 0 թվի մոդուլը հավասար է 0:

Մոդուլ պարունակող պարզագույն հավասարումն է $|x| = a$:

Ըստ մոդուլի սահմանման, եթե $a > 0 \Rightarrow x = \pm a$

$$a = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$a < 0 \Longrightarrow x \in \emptyset$$

Մոդուլի հիմնական հատկություններն են. [4]

Կամայական x և y թվերի համար՝

1) $|x| \geq 0$

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

4) $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$

5) $|x| = |y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$

6) $|x| = y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right. \end{array}\right.$

7) $|x| < y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y \\ x > -y \end{cases}$

8) $|x| > y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > y \\ x < -y \end{array}\right.$

Մոդուլի բոլոր հատկությունները անմիջապես բխում են մոդուլի սահմանումից: Ուշադիր նայելով 7-րդ և 8-րդ հատկություններին, նկատում ենք, որ $y < 0$ դեպքում 7-րդ համարժեքության և՛ աջ, և՛ ձախ մասերին ոչ մի x չի համապատասխանում, իսկ 8-րդ համարժեքության թե՛ աջ համախմբին և թե՛ ձախ անհավասարությանը բավարարում են բոլոր x-երը:

Գոյություն ունեն մոդուլ պարունակող տարբեր տեսքի հավասարումներ և անհավասարումներ: Դիտարկենք մի քանի ընդհանուր դեպքեր.

1. $|f(x)| = g(x)$ տեսքի մոդուլ պարունակող հավասարման լուծումը համարժեք է

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{cases}$$ համակարգի լուծմանը:

2. $|f(x)| = |g(x)|$ տեսքի մոդուլ պարունակող հավասարման լուծումը համարժեք է

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$ համախմբի լուծմանը:

3. $|f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

4. Դիտարկենք$|f(x)| < g(x)$ տեսքի անհավասարումը, որտեղ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը x փոփոխականից կախված արտահայտություններ են: Քանի որ անհավասարման ձախ մասը չի կարող լինել անբավարար, ուրեմն նրա լուծումները պետք է բավարարեն $g(x) > 0$ անհավասարմանը: Հետևաբար, ըստ 7-րդ հատկության.

$$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

Հեշտ է տեսնել, որ համակարգի առաջին անհավասարումը ավելորդ է: Իրոք, եթե x-ը բավարարում է համակարգի երկրորդ և երրորդ անհավասարումներին, ապա բավարարում է նաև առաջինին՝

$$g(x) > f(x) > -g(x) \Rightarrow g(x) > -g(x) \Rightarrow 2g(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$$

Այսպիսով ստացվեց, որ

$$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

5. $|f(x)| > g(x)$ տեսքի անհավասարման լուծումն է.

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array} \right.$$

Իրոք, $g(x) \geq 0$ անհավասարությանը բավարարող x-երի համար վերոնշյալ համարժեքությունը հետևում է մոդուլի 8-րդ հատկությունից: Իսկ եթե $g(x) < 0$ և $f(x)$ արտահայտությունը որոշված է, ապա x-ը բավարարում է թե՛ $|f(x)| > g(x)$ անհավասարմանը, և թե՛ համախմբին: Իսկապես, $f(x) \geq 0$ դեպքում ճիշտ է համախմբի առաջին հավասարությունը՝ $f(x) \geq 0 > g(x)$, իսկ $f(x) < 0$ դեպքում՝ երկրորդը՝ $f(x) < 0 < -g(x)$: [3]

1.2 Մոդուլ պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծման օրինակներ

Վերը նշեցինք մոդուլի սահմանումը և դրանից բխող հիմնական հատկությունները: Այժմ ներկայացնենք, թե ինչպես ենք կիրառում դրանք մոդուլ պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ լուծելիս:

Օրինակ 1. $|5x-2|=3$: Ըստ մոդուլի սահմանման՝

$$|5x-2|=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-2=3 \\ 5x-2=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=5 \\ 5x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{5} \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left\{-\frac{1}{5};1\right\}:$$

Մոդուլ պարունակող հավասարումներ կամ անհավասարումներ լուծելիս, լուծման ավարտին ստացված արմատները նշվում են ձևավոր փակագծերում:

Օրինակ 2. $|7x-3|=-2$: Այս հավասարման դեպքում ակնհայտ է, որ $x \in \emptyset$, քանի որ մոդուլը միշտ ոչ բացասական թիվ է:

Օրինակ 3. $|x^2+6x-5|=5-2x$: Այս դեպքում պայման ենք դնում, որ հավասարման աջ մասը պետք է լինի ոչ բացասական և նոր միայն կիրառում ենք մոդուլի հիմնական հատկությունը:

$$\text{Լուծում:} \left\{\begin{array}{l} 5-2x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+6x-5=5-2x \\ x^2+6x-5=-(5-2x) \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq \frac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+8x-10=0 \\ x^2+4x=0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Համախմբի ներսում կատարեցինք փակագծերի բացում և նման անդամների միացում: Այժմ առանձին-առանձին լուծենք համախմբի առաջին և երկրորդ տողերը:

$x^2+8x-10=0$

Հաշվենք քառակուսային եռանդամի դիսկրիմինանտը և գտնենք արմատները.

$D=64+40=104$

$x_1=\frac{-8+\sqrt{104}}{2}=\frac{2(-4+\sqrt{26})}{2}=-4+\sqrt{26}$

$x_2=\frac{-8-\sqrt{104}}{2}=\frac{2(-4-\sqrt{26})}{2}=-4-\sqrt{26}$

Այժմ գտնենք համախմբի երկրորդ տողի արմատները: Քանի որ այստեղ թերի քառակուսի է, կարող ենք ներկայացնել արտադրյալի տեսքով և արտադրիչները հավասարեցնել 0-ի:

$x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ x + 4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Ստացված արմատները տեղադրենք մեր սկզբնական համակարգում, կստանանք.

$$\begin{cases} x \le \dfrac{5}{2} \\ x \in \left\{-4-\sqrt{26}; -4+\sqrt{26}; -4; 0\right\} \end{cases}$$

Թվերի մոտավոր արժեքները հաշվելով, տեսնում ենք, որ գտնված չորս արմատներն էլ բավարարում են համակարգի առաջին տողի պայմանին, հետևաբար, $|x^2+6x-5| = 5-2x$ հավասարման արմատներն են. $x \in \left\{-4-\sqrt{26}; -4; 0; -4+\sqrt{26}\right\}$:

Օրինակ 4. $|7x-1| = |2x+4|$: Ըստ մոդուլի սահմանման՝

$$\left[\begin{array}{l} 7x-1 = 2x+4 \\ 7x-1 = -2x-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = 5 \\ 9x = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$$

Դիտարկեցինք հավասարումների լուծման օրինակներ, այժմ նշենք անհավասարումները.

Օրինակ 5. $|2x-5| \ge 7$

Լուծում: Ըստ մոդուլի 8-րդ հատկության կազմենք համախումբ և լուծենք այն.

$$\left[\begin{array}{l} 2x-5 \ge 7 \\ 2x-5 \le -7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \ge 12 \\ 2x \le -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 6 \\ x \le -1 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$$

Օրինակ 6. $|5x-9| \le 6$

Լուծում: Կիրառելով մոդուլի 7-րդ հատկությունը, կազմենք հետևյալ համակարգը և լուծենք այն.

$$\begin{cases} 5x-9 \le 6 \\ 5x-9 \ge -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x \le 15 \\ 5x \ge 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x \ge \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{3}{5};3]$$

Օրինակ 7. $|6x-5| \ge 0$: Այս կարգի անհավասարումները հատուկ լուծում չեն պահանջում: Ուշադիր նայելով անհավասարմանը հասկանում ենք, որ լուծումը $x \in R$-ն է, քանի որ մոդուլից միշտ դուրս է գալիս ոչ բացասական թիվ, այսինքն տրված անհավասարումը ճիշտ է փոփոխականի ցանկացած արժեքի դեպքում:

Նույն կերպ և $|3x-7| < 0$ անհավասարումը ևս լուծում չի պահանջում. այս դեպքում $x \in \emptyset$ վերոհիշյալ պատճառով. մոդուլից չի կարող դուրս գալ բացասական թիվ:

Օրինակ 8. $|x-9| \le 0$: Այս անհավասարումը նման է վերոնշյալ անհավասարմանը, սակայն ունի մի էական տարբերություն: Այս դեպքում կիրառելի է մոդուլի 4-րդ հատկությունը, այն է. անհավասարումն ունի միակ լուծում՝ $x-9=0 \Rightarrow x=9$:

Օրինակ 9. $|5x-4| > 0$: Այս անհավասարման լուծման համար կիրառում ենք մոդուլի 3-րդ հատկությունը: Պետք է հիշենք, որ մոդուլատակ արտահայտությունը չի կարող հավասար լինել 0-ի: Այսինքն լուծում ենք առանց վերցնելու այն կետը, որի դեպքում մոդուլատակ արտահայտությունը հավասարվում է 0-ի:

Լուծում: $\left[\begin{array}{l} 5x-4>0 \\ 5x-4<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x>4 \\ 5x<4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{4}{5} \\ x<\frac{4}{5} \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty;\frac{4}{5}) \cup (\frac{4}{5};+\infty)$:

Օրինակ 10. $|6-x-x^2| + |x^2-2x-15| > 0$: Ուշադիր նայենք անհավասարմանը: Տեսնում ենք, որ գումարվել են երկու մոդուլներ և նրանց գումարը մեծ է 0-ից: Այս տեսակի անհավասարումները միշտ լուծում ունեն, քանի որ մոդուլից դուրս է գալիս միայն ոչ բացասական թիվ: Սակայն մեր օրինակում կա մի նրբություն, որին չենք կարող ուշադրություն չդարձնել. այն չի ունենա լուծում միակ դեպքում, երբ երկու մոդուլները միաժամանակ հավասարվեն 0-ի: Այդ պատճառով, սկզբում պետք է պայման դնենք, որ մոդուլատակ արտահայտությունները միաժամանակ 0 չլինեն:

Լուծում: Պայման՝ $\begin{cases} 6-x-x^2 \neq 0 \\ x^2-2x-15 \neq 0 \end{cases}$: Որպեսզի ստուգենք, թե որ թվերը չենք կարող ներառել լուծումների բազմության մեջ, նախ պետք է համակարգի տողերը առանձին-առանձին հավասարեցնենք 0-ի և լուծենք:

$6-x-x^2=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$

$D=1+24=25$

$x_1=\frac{-1-5}{2}=-3$ $\qquad\qquad$ $x_2=\frac{-1+5}{2}=2$

Դիտարկենք երկրորդ հավասարումը.

$x^2-2x-15=0$

$D=4+60=64$

$x_1=\frac{2+8}{2}=5$ $\qquad\qquad$ $x_2=\frac{2-8}{2}=-3$

Ինչպես տեսնում ենք, երկու արտահայտություններն էլ միաժամանակ 0 են դառնում $\{-3\}$ կետում, հետևաբար անհավասարման լուծումը կարող է լինել ցանկացած թիվ, բացի $\{-3\}$-ից: Հետևաբար, անհավասարման լուծումների բազմությունը կլինի.

$$x \in (-\infty;-3) \cup (-3;+\infty)$$

Օրինակ 11. $\left|\frac{x}{x-5}\right|=\frac{x}{x-5}$: Ըստ մոդուլի սահմանման, եթե մոդուլից դուրս է եկել հենց ինքը, հետևաբար մոդուլատակ արտահայտությունը ոչ բացասական է: Որպեսզի մոդուլատակ արտահայտությունը լինի ոչ բացասական, դիտարկվում է երկու դեպք. 1. երբ թե՛ հայտարարը և թե՛ համարիչը դրական են, 2. երբ թե՛ հայտարարը և թե՛ համարիչը միաժամանակ բացասական են: Հաշվի առնելով նաև այն հանգամանքը, որ ռացիոնալ արտահայտության հայտարարը չի կարող լինել 0, կազմենք հետևյալ համախումբը.

Լուծում: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x-5>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x-5<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x>5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x<5 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (5;+\infty) \\ x \in (-\infty;0] \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty;0] \cup (5;+\infty)$

Օրինակ 12. $|x^2 - x - 12| \le |2x - 4|$: Այս անհավասարումը լուծելու համար կրկնակի կիրառելու ենք մոդուլի սահմանումը: Այսպես.

$$\begin{cases} |x^2 - x - 12| \le |2x - 4| \\ |x^2 - x - 12| \ge -|2x - 4| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2x - 4| \ \ge |x^2 - x - 12| \\ |2x - 4| \ge -x^2 + x + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x - 4 \ge x^2 - x - 12 \\ 2x - 4 \le -x^2 + x + 12 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2x - 4 \le -x^2 + x + 12 \\ 2x - 4 \le x^2 - x - 12 \end{array}\right. \end{cases}$$

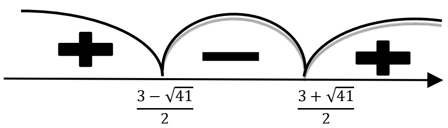
Լուծենք ստացված անհավասարումները առանձին-առանձին.

1) $x^2 - 3x - 8 \le 0$

$D = 9 + 32 = 41$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{41}}{2}$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{41}}{2}$



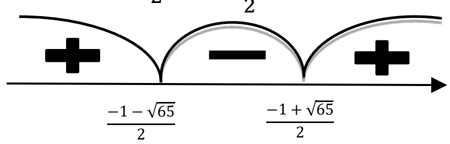
$x \in \left[\frac{3-\sqrt{41}}{2}; \frac{3+\sqrt{41}}{2}\right]$

2) $x^2 + x - 16 \le 0$

$D = 1 + 64 = 65$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{65}}{2}$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{65}}{2}$



$x \in \left[\frac{-1-\sqrt{65}}{2}; \frac{-1+\sqrt{65}}{2}\right]$

1-ին և 2-րդ անհավասարումների միավորումը կլինի $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{65}}{2}; \frac{3+\sqrt{41}}{2}\right]$

3) $x^2 + x - 16 \ge 0$

Օգտվենք 2-րդ անհավասարման լուծումից. $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{65}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{65}}{2}; +\infty\right)$

4) $x^2 - 3x - 8 \ge 0$

Օգտվենք 1-ին անհավասարման լուծումից. $x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$

3-րդ և 4-րդ անհավասարումները միասին $x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{65}}{2}; +\infty\right)$

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{-1-\sqrt{65}}{2}; \frac{3+\sqrt{41}}{2}\right] \\ x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{65}}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{-1-\sqrt{65}}{2}; \frac{3-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{65}}{2}; \frac{3+\sqrt{41}}{2}\right)$$

Ինչպես տեսնում ենք, նման տիպի անհավասարումները բավական բարդություն են ներկայացնում այս մեթոդով լուծելիս: Մի քանի մոդուլ պարունակող անհավասարումների համար ավելի կիրառելի է միջակայքերի մեթոդը:

ԳԼՈՒԽ 2. ՄԻՋԱԿԱՅՔԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ԵՎ ԴՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑՈՒՄ

2.1 Մոդուլ պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծման միջակայքերի մեթոդը

Մոդուլի նշան պարունակող ավելի ընդհանուր տեսքի հավասարումների և անհավասարումների լուծման համար կիրառվում է ***միջակայքերի եղանակը***։ Այս դեպքում հավասարման կամ անհավասարման մեջ պարունակվող բոլոր մոդուլատակ արտահայտությունները առանձին-առանձին հավասարեցնում ենք 0-ի, ստացված կետերով թվային ուղիղը տրոհում ենք միջակայքերի և յուրաքանչյուր միջակայքում որոշում մոդուլատակ բոլոր արտահայտությունների նշանները։ Նշանները որոշելուց հետո ազատվում ենք մոդուլի նշանից (օգտվելով մոդուլի սահմանումից) և համապատասխան միջակայքում լուծում ենք ստացված հավասարումը կամ անհավասարումը։ [1]

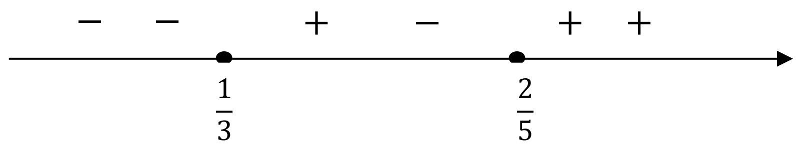
Ասվածը ավելի պատկերավոր ներկայացնելու համար դիտարկենք մոդուլ պարունակող հավասարումների և անհավասարումների մի քանի օրինակներ.

Օրինակ 1. $|3x-1|+|5x-2|=5$

$3x-1=0$ $\qquad$ $5x-2=0$

$x=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x=\frac{2}{5}$

Ստացված արմատները տեղադրենք թվային միջակայքի վրա և յուրաքանչյուր միջակայքից որևէ թիվ տեղադրելով մոդուլատակ արտահայտությունների մեջ, որոշենք տվյալ միջակայքում մոդուլատակ արտահայտությունների նշանները։ Կստացվի.



Յուրաքանչյուր միջակայքում ազատվենք մոդուլի նշանից,

1) $(-\infty;\frac{1}{3}]$ միջակայք

$-(3x-1)-(5x-2)=5$

$-3x+1-5x+2=5$

$-8x=2$

$x=-\frac{1}{4}$

Ստացված արմատը համապատասխանում է միջակայքին, հետևաբար բավարարում է պայմանին։

2) $[\frac{1}{3};\frac{2}{5}]$ միջակայք

$3x-1-(5x-2)=5$

$3x-1-5x+2=5$

$-2x=4$

$x=-2$

Ստացված արմատը չի գտնվում համապատասխան միջակայքի մեջ, հետևաբար չի բավարարում պայմանին։

3) $[\frac{2}{5};+\infty)$ միջակայք

$3x-1+5x-2=5$

$8x=8$

$x=1$

Ստացված արմատը համապատասխանում է միջակայքին, հետևաբար բավարարում է պայմանին։

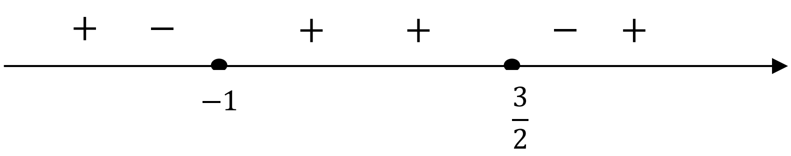
Վերոնշյալից հետևում է, որ մեր սկզբնական հավասարման արմատներն են.

$$x \in \left\{-\frac{1}{4};1\right\}$$

Օրինակ 2. $|3-2x|+|x+1| \le 7+2x$

$3-2x=0$ $\qquad$ $x+1=0$

$x=\frac{3}{2}$ $\qquad$ $x=1$



1) $(-\infty;-1]$ միջակայք

$3-2x-x-1 \leq 7+2x$

$-5x \leq 5$

$x \geq -1$

Պետք է հատել տրված միջակայքը և ստացված միջակայքը՝ լուծում ստանալու համար. $x \in (-\infty;-1] \cap [-1;+\infty) = x \in \{-1\}$

2) $[-1;\frac{3}{2}]$ միջակայք

$3-2x+x+1 \leq 7+2x$

$-3x \leq 3$

$x \geq -1$

$x \in \left[-1;\frac{3}{2}\right] \cap [-1;+\infty) = x \in [-1;\frac{3}{2}]$

3) $[\frac{3}{2};+\infty)$ միջակայք

$-3+2x+x+1 \leq 7+2x$

$x \leq 9$

$x \in \left[\frac{3}{2};+\infty\right) \cap (-\infty;9] = x \in [\frac{3}{2};9]$

Բոլոր երեք միջակայքերում անհավասարումը լուծելուց հետո անհրաժեշտ է հատել բոլոր երեք ստացված լուծումները: Այսպես.

$x \in \{-1\} \cap \left[-1;\frac{3}{2}\right] \cap \left[\frac{3}{2};9\right] = [-1;9]$

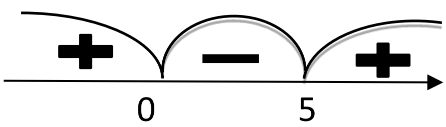
Օրինակ 3. $\left|\frac{x}{x-5}\right| = \frac{x}{x-5}$: Ըստ մոդուլի սահմանման, եթե մոդուլից դուրս է եկել հենց ինքը, հետևաբար մոդուլատակ արտահայտությունը ոչ բացասական է.

$$\frac{x}{x-5} \geq 0$$

Օգտվենք $\frac{x}{x-5} = 0$ ռացիոնալ հավասարումից.

$$\begin{cases} x = 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

Ըստ միջակայքերի մեթոդի, կստանանք.



$x \in (-\infty;0] \cup (5;+\infty)$

Օրինակ 4. $\left|\frac{2x-1}{x-4}\right| = \frac{2x-1}{4-x}$: Հավասարման աջ մասում «-» նշանը հանենք ընդհանուր, կստանանք.

$$\left|\frac{2x-1}{x-4}\right| = -\frac{2x-1}{x-4}$$

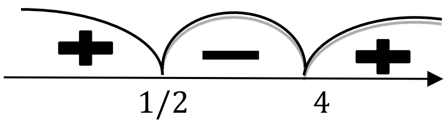
Ինչպես տեսնում ենք, մոդուլից դուրս է եկել իր հակադիրը, հետևաբար, ըստ մոդուլի սահմանման, մոդուլատակ արտահայտությունը ոչ դրական թիվ է: Այսպես.

$$\frac{2x-1}{x-4} \leq 0$$

Օգտվենք $\frac{2x-1}{x-4} = 0$ ռացիոնալ հավասարումից: Կստանանք.

$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x \neq 4 \end{cases}$$

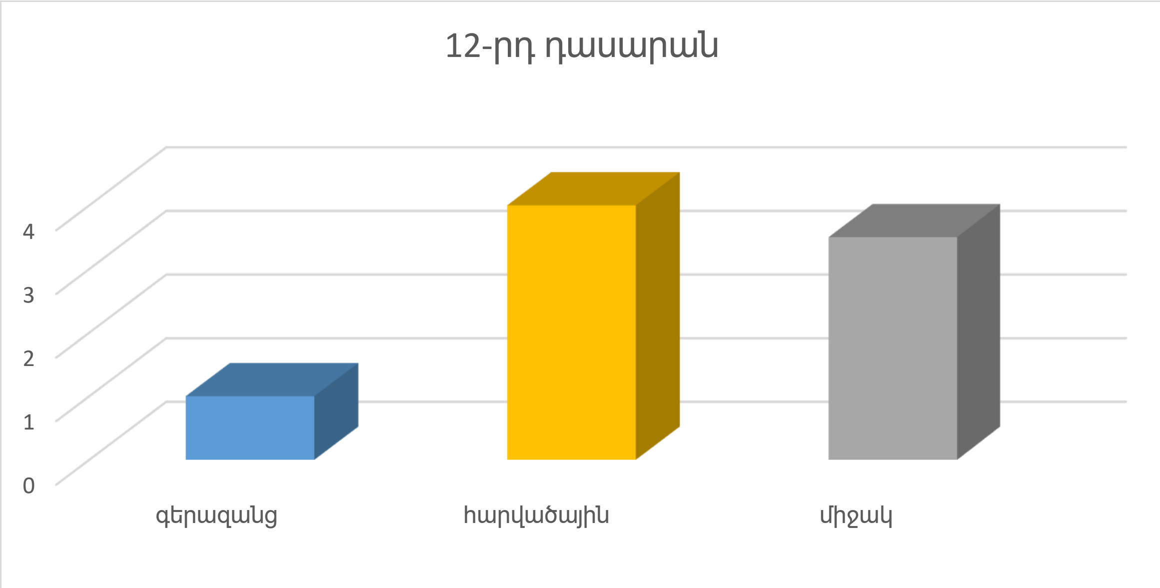
Թվային ուղղի վրա նշենք կետերը, տրոհենք միջակայքերի.



$x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right)$

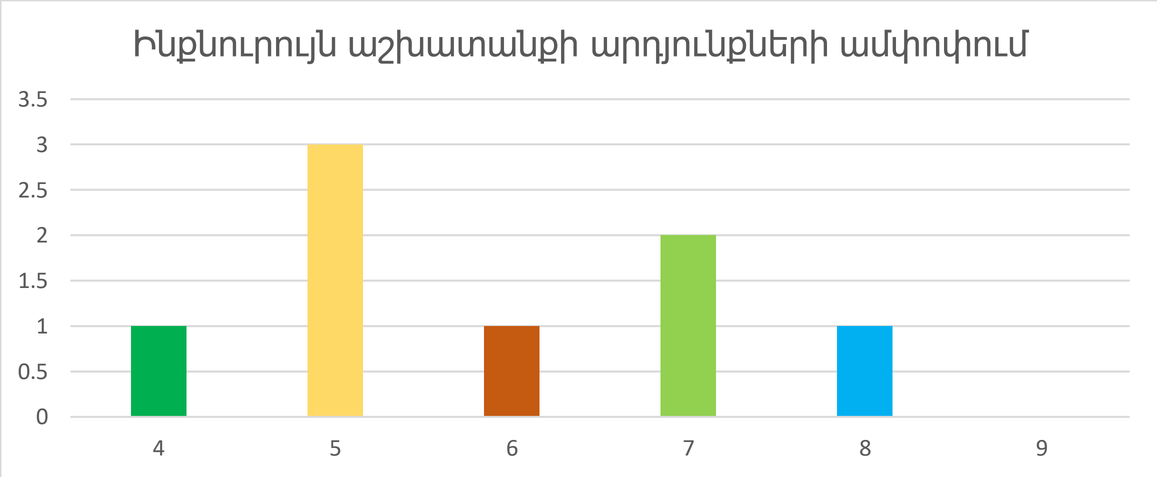
2. 2 Հետազոտական մաս

Հետազոտական աշխատանքս իրականացրել եմ Վահագնիի Ա. Քոչինյանի անվան միջնակարգ դպրոցի 12-րդ դասարանի աշակերտների հետ: Դասարանում սովորում են 8 աշակերտ՝ 3 աղջիկ և 5 տղա: Աշակերտների առաջադիմությունը. 1 աշակերտ սովորում է գերազանց, ակտիվ մասնակցում է մաթեմատիկայի դասերին, 4 աշակերտներ սովորում են հարվածային, իսկ մյուս 3 աշակերտները միջակ սովորողներ են.



12-րդ դասարանում «Մոդուլ պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ» թեման բացատրելուց, վերը նշված համապատասխան օրինակներով թեման ամրապնդելուց հետո, դասարանի աշակերտներին առաջարկվեց կատարել ինքնուրույն աշխատանք: Ինքնուրույն աշխատանքի կատարման նպատակն էր հասկանալ, թե երեխաները որքանով են ընկալել թեման և որ մեթոդներն են կիրառում մոդուլ պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ լուծելիս: Ինքնուրույն աշխատանքը կազմված էր մեկ տարբերակով (հավելված 1): Ինքնուրույն աշխատանքի կատարման համար աշակերտներին տրվել է 45 րոպե ժամանակ: Ինքնուրույն աշխատանքը բաղկացած էր 7 առաջադրանքներից, որոնցում ընդգրկված էին նաև ընտրովի պատասխաններով առաջադրանքներ: Ինքնուրույն աշխատանքի կազմման ժամանակ հաշվի է առնվել առաջադրանքների բարդության ատիճանականությունը. դրանք տրվել են 1-7՝ համապատասխանաբար պարզից բարդ կարգով:

Աշակերտների կատարած ինքնուրույն աշխատանքի արդյունքները ներկայացված են ստորև բերված գրաֆիկով. (գնահատական-աշակերտի քանակ)



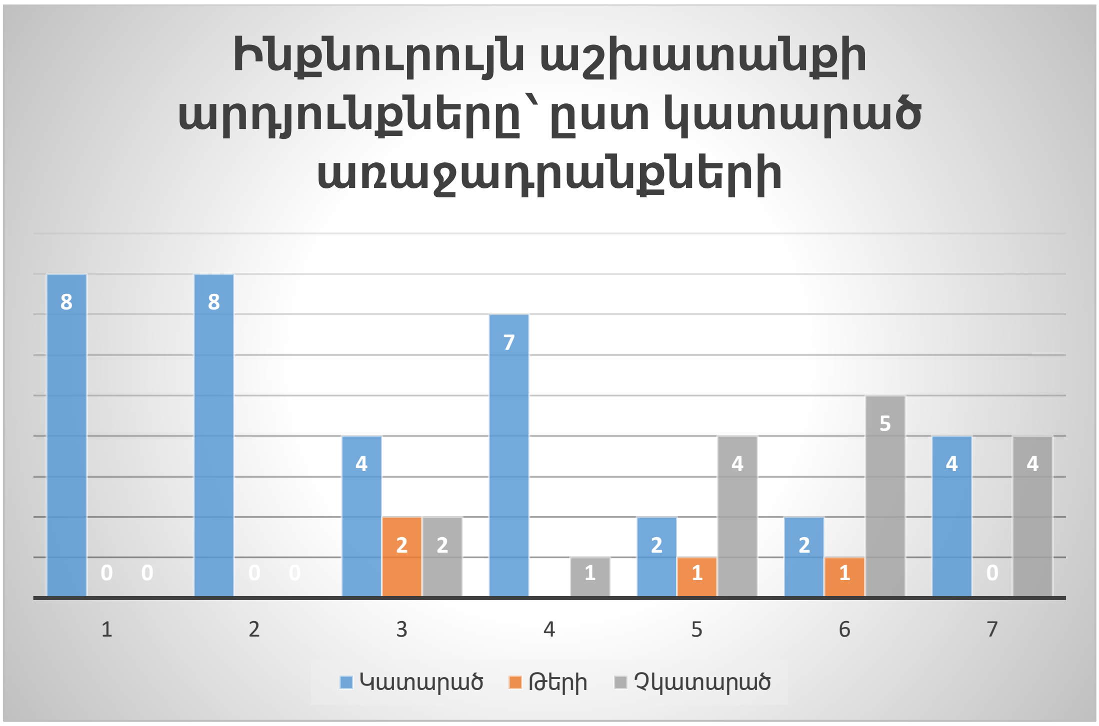
Ինչպես տեսնում ենք վերը նշված գրաֆիկից, 12-րդ դասարանում «Մոդուլ պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ» թեմայով տրված ինքնուրույն աշխատանքի արդյունքները հետևյալն են. 1 աշակերտ ստացել է 4 միավոր, 3 աշակերտ ստացել են 5 միավոր, 1 աշակերտ ստացել է 6 միավոր, 2 աշակերտ՝ 7 միավոր և 1 աշակերտ՝ 8 միավոր:

Ըստ ճիշտ կատարված առաջադրանքների թվի, ունենք հետևյալ պատկերը.

Աշակերտ-ների քանակ	Ճիշտ կատարած առաջադրանք-ների քանակ	Ճիշտ կատարած առաջադրանք-ների համարները	Նշումներ
1	6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	Սխալ է կատարել պնդումների մեջ, քառակուսային եռանդամով անհավասարումը թերի է կատարել
2	6	1, 2, 4, 5, 6, 7	Սխալ են կատարել պնդումները, քառակուսային եռանդամով

			հավասարումը թերի են կատարել
1	5,5	1, 2, 3, 4, 5, 7	Սխալ է կատարել պնդումներում և քառակուսային եռանդամի արմատներ գտնելում
3	4	1, 2, 3, 4	Չեն օգտվել միջակայքերի մեթոդից
1	3	1, 2, 3	Չի կարողացել լուծել բարդացող հավասարումներն ու անհավասարումները

Աղյուսակի տվյալները ավելի պատկերավոր ներկայացնենք դիագրամի տեսքով.



Այսպիսով, ինչպես ցույց են տալիս մեր տվյալները, 12-րդ դասարանի աշակերտների 50%-ը լիարժեք կարողացել են կիրառել միջակայքերի մեթոդը: Հիմնական թերությունը կայանում է տեսական նյութի իմացության մեջ և խնդիր ունենք քառակուսային եռանդամով հավասարումների և անհավասարումների լուծման հարցում:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Ամփոփելով հետազոտական աշխատանքը նշենք, որ «մոդուլ պարունակող հավասարումները և անհավասարումներ»-ը համարվում է մաթեմատիկայի ավագ դպրոցի դասընթացի ամենակարևոր թեմաներից մեկը: Աշակերտները, թեև թվի մոդուլին ծանոթ են դեռևս միջին դասարաններից, միևնույնն է ավագ դասարանում դեռևս հստակ չեն պատկերացնում դրա հիմնական գաղափարը:

Կատարված հետազոտության արդյունքները ցույց են տալիս, որ աշակերտներին ավելի հեշտ է տրվում մոդուլ պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծման միջակայքերի մեթոդը, քան մոդուլի սահմանման և հիմնական հատկությունների կիրառումը, թեև երկու ուղղության ամրապնդման համար էլ կատարվում են բավարար չափով առաջադրանքներ:

12-րդ դասարանի աշակերտների մեծ մասի թերությունը կայանում է նաև տեսական նյութը սովորելու հարցում, քանզի մեծ մասը, ճիշտ կատարելով առաջադրանքները, այնուամենայնիվ սխալ էր թույլ տվել «պնդումների փունջ» առաջադրանքի մեջ:

Հետևաբար, ավելի մեծ ուշադրություն պետք է դարձվի աշակերտների տեսական նյութը հստակ յուրացնելու համար կատարվող աշխատանքներին, մշակվեն նոր մեթոդներ տեսական նյութի մտապահման համար, աշակերտներին սովորեցնել, թե ինչպես կիրառումից բխեցնել տեսական նյութին վերաբերող պնդումների ճշգրտությունը:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Ս. Մ. Նիկոլսի, Մ. Կ. Պոտապով, Ն. Ն. Ռեշետնիկով, Ա. Վ. Շևկին «Հանրահաշիվ 8-րդ դասարանի դասագիրք», Երևան, 2012թ.
2. Ս. Մ. Նիկոլսի, Մ. Կ. Պոտապով, Ն. Ն. Ռեշետնիկով, Ա. Վ. Շևկին «Մաթեմատիկա 6-րդ հանրակրթական դպրոցի դասագիրք», Երևան, 2020թ.
3. Գ.Գ. Գևորգյան, Ա.Ա.Սահակյան «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» (ընդհանուր և հումանիտար հոսքեր), Երևան, 2017թ.
4. Գ.Գ. Գևորգյան, Ա.Ա.Սահակյան «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» (բնագիտամաթեմատիկական հոսք), Երևան, 2011թ.
5. https://mathnet.am/
6. https://ru.wikipedia.org

Հավելված 1

Ինքնուրույն աշխատանք

1) Ո՞րն է $|8-5x|=0$ հավասարման արմատը: (1 միավոր)

ա) 0 բ) $\frac{8}{5}$ գ) $\frac{5}{8}$ դ) $-\frac{8}{5}$

2) Գտնել $|x^3-4|=4$ հավասարման արմատը: (1 միավոր)

ա) $\sqrt{2}$ և 2 բ) $-\sqrt{2}$ և - 2 գ) 2 և 0 դ) -2 և 0

3) Պնդումներից յուրաքանչյուրի դիմաց գրել ճիշտ է թե սխալ: (2 միավոր)

ա) $|x|=0 \Leftrightarrow x>0$

բ) $|x|=|y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y \end{array}\right.$

գ) $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x=0$

դ) $|x|>0 \Leftrightarrow x \in R$

4) Լուծել անհավասարումը: (1 միավոր)

$|4x-7|<9$

5) Լուծել հավասարումը: (2 միավոր)

$|2x^2-9x-5|=3x-5$

6) Լուծել անհավասարումը: (2 միավոր)

$|x^2+3x-10| \geq -4-2x$

7) Լուծել հավասարումը՝ օգտվելով միջակայքերի մեթոդից: (1 միավոր)

$|5x+1|+|5x+9|=8$

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

«ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ» ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ

ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ

ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ ՍԵՂԱՆԻՆ ԱՐՏԱԾԱԾ ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ ԿԱՐԻՆԵ ԱՐՏԵՄԻ ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ ՄԵԼԻՍ ՍԱՔԱՆՅԱՆ

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Հետազոտության արդիականությունը:

1. **Հետազոտության նպատակը՝**

Սովորողի համար նյութի ընկալումը դարձնել հեշտ, մատչելի և հետաքրքիր:

2. **Հետազոտության խնդիրներ**

- Կարողունակությունների վրա հիմնված կրթության ձևավորում
- Կրթության բովանդակության ձևավորման հիման վրա ուսումնական գործընթացի կազմակերպում
- Թեման դիտել որպես գործիք՝ առավել ընդհանրական որակներ ձևավորելու համար:
- Ուսումնական գործընթացի կազմակերպում այնպես, որ հնարավորինս նպաստի սովորողների այն գիտելիքների, հմտությունների, վերաբերմունքի և արժեքների ձևավորմանը, որոնց սովորողը առընչվում է իր առօրյա և աշխատանքային գործունեությունը կազմակերպելիս:

3. **Հետազոտության մեթոդներ**

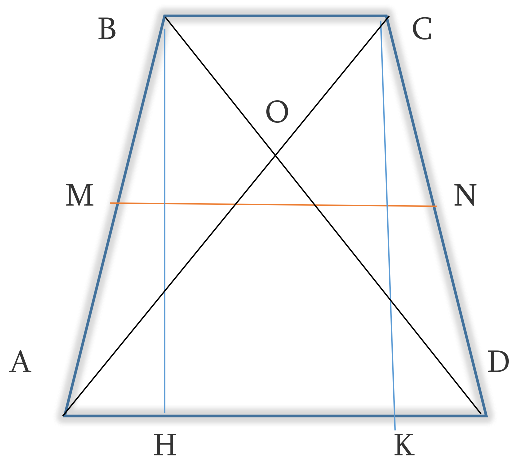
- Գրականության ուսումնասիրում և տեսական վերլուծություն
- Հետազոտական աշխատանքների փորձի ուսումնասիրում, վերլուծում
- Հետազոտման էմպիրիկ մեթոդներ՝ փաստաթղթային վկայություններ, դիտում, զրույց, հարցում, համեմատում, չափումներ:
- Ստացված տվյալների հավաքում, դասակարգում, վերլուծություն
- Հենքային գիտելիքների իմացության ապահովմամբ նշված թեմայի ուսուցում՝

Սահմանումներ—Հատկություններ—Տվյալներ—Եզրակացություն

Ս Ե Ղ Ա Ն Ի Ն Ա Ր Տ Ա Գ Ծ Ա Ծ Շ Ր Ջ Ա Ն Ա Գ Ի Ծ

Նախ ներկայացնեմ այն հենքային դրույթները, որոնց իմացությունը պարտադիր է նշված թեմայի խնդիրների լուծման համար

<u>ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ</u>



նկար 1

I. Այն քառանկյունը, որի երկու հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են (հիմքերը), մյուս երկուսը՝ ոչ (սրունքներ), կոչվում է սեղան:

II. Հավասար սրունքներ ունեցող սեղանը կոչվում է հավասարարուն

AB=CD

III. Սեղանի հիմքերի հեռավորությունը (BH -ը ուղղահայաց է AD-ին) կոչվում է սեղանի բարձրություն:

IV. Սեղանի սրունքների միջնակետերը միացնող հատվածը կոչվում է սեղանի միջին գիծ

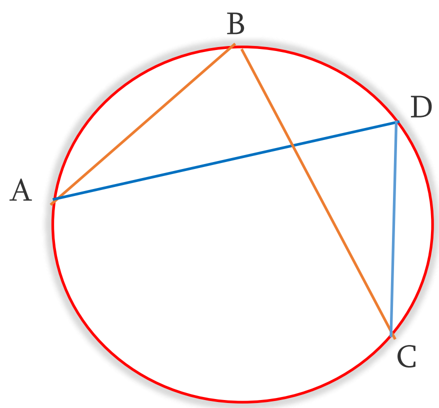
AM=MB, CN=ND, MN-ը միջին գիծ է

V. Սեղանը կոչվում է ներգծյալ, եթե նրա բոլոր գագաթները գտնվում են շրջանագծի վրա

VI. Արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը կարող է լինել ինչպես սեղանի ներքին տիրույթում, այնպես էլ դրանից դուրս

VII. Այն անկյունը, որի գագաթը գտնվում է շրջանագծի վրա, իսկ կողմերը լարեր են, կոչվում է ներգծյալ անկյուն

VIII. Այն անկյունը, որի գագաթը գտնվում է շրջանի կենտրոնում, իսկ կողմերը շառավիղներ են, կոչվում է կենտրոնային անկյուն



Նկար 2

Քանի որ ներգծյալ սեղանը հավասարաչափ է, ապա նշենք հավասարաչափ սեղանի հատկություններ.

<u>ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ</u>

I. Սեղանի միջին գիծը հավասար է հիմքերի կիսագումարին և զուգահեռ է նրանց

$$MN = \frac{\text{AD} + \text{BC}}{2}$$

II. Հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են (ուղիղ թեորեմ)

III. Եթե **սեղանի** հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են, ապա այն հավասարասրուն է (հակադարձ թեորեմ)

IV. Անկյունագծերը հավասար են (ուղիղ թեորեմ)

V. Եթե սեղանի անկյունագծերը հավասար են ապա այն հավասարասրուն է (հակադարձ թեորեմ)

VI. Սեղանի միջին գիծը կիսում է BC և AD հատվածների կետերը միացնող ցանկացած հատված

VII. Հավասարասրուն սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ (ուղիղ թեորեմ)

VIII. Եթե սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ապա այն հավասարասրուն է (հակադարձ թեորեմ)

IX. Արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է սեղանի կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետում

X. Սեղանը անկյունագծերով տրոհվում է չորս եռանկյան, որոնցից հիմքերն ընդգրկող եռանկյունները նման են

$$\Delta BOC \sim \Delta AOD$$

Իսկ սրունքներն ընդգրկող եռանկյունները հավասարամեծ են

$$S_{AOB}=S_{COD}$$

XI. Ներգծյալ սեղանի հանդիպակաց անկյունների գումարը 180^0 է (ուղիղ թեորեմ)

XII. Եթե սեղանի հանդիպակաց անկյունների գումարը 180^0 է, ապա այն ներգծյալ է

XIII. Ներգծյալ սեղանի համար տեղի ունի

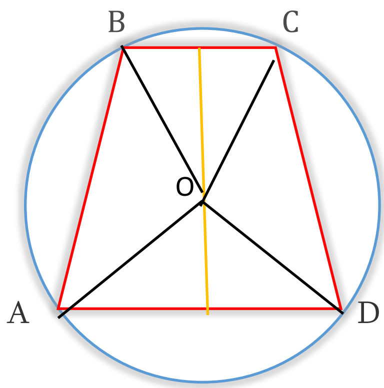
$$AK = \mathrm{HD} = \mathrm{MN} = \frac{\mathrm{AD} + \mathrm{BC}}{2}$$

$$AH = \mathrm{KD} = \frac{\mathrm{AD} - \mathrm{BC}}{2}$$

XIV. Ներգծյալ սեղանի անկյունագծերը հավասար անկյուններ են կազմում հիմքերի հետ

$$\angle CAD = \angle BDA$$

XV. Արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը հավասարահեռ է սեղանի գագաթներից, հետևաբար գտնվում է սեղանի հիմքերի միջնուղղահայացի վրա



AO=BO=CO=DO=R

նկար 3

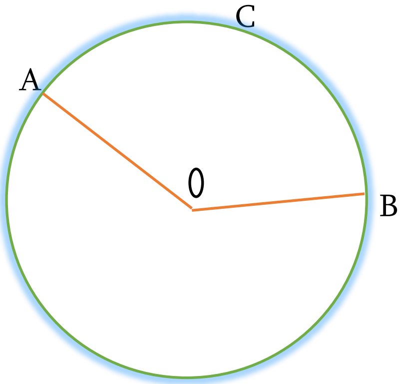
XVI. Ներգծյալ անկյունը չափվում է հենման աղեղի կեսով

$$\angle \mathbf{ABC} = \frac{\smile AC}{2}$$

XVII. Միևնույն աղեղին հենված ներգծյալ անկյունները հավասար են

$$\angle \mathbf{ABC} = \frac{\smile AC}{2} = \angle \mathbf{ADC}$$

XVIII. Կենտրոնային անկյունը չափվում է հենման աղեղով



$\angle AOB = \smile ACB$

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. **422 ա) Երկրաչափություն 8, Աթանասյան և մյուսներ**

Տրված է՝ BC=18, BH=9, $\angle A=45^0$, AB=CD

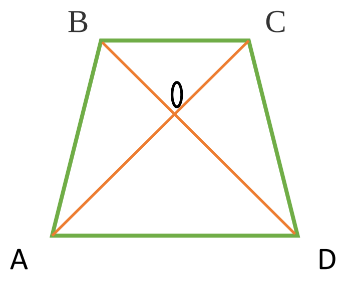
Գտնել սեղանի մակերեսը

Լուծում՝ ΔABH -ում $\angle A=45^0$, հետևում է, որ AH=BH=9, հետևում է, որ AD=18+2*9=36

$$SABCD = \frac{AD+BC}{2} * BH = \frac{36+18}{2} * 9 = 243$$

Պատ.՝ 243

2. **422 բ) Երկրաչափություն 8, Աթանասյան և մյուսներ**



Տրված է՝ AB=CD, $AC \perp BD$, BC=30, AD=36

Գտնել սեղանի մակերեսը

Լուծում՝ նշանակենք՝ BO=OC=x, AO=OD=y

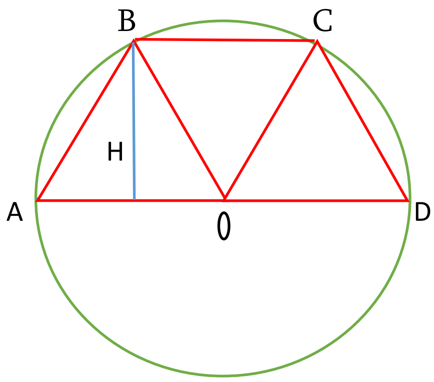
ΔBOC- ից $2x^2=30$, $x = \sqrt{15}$, AC=BD=$\sqrt{15} + \sqrt{18}$

ΔAOD- ից $2y^2=36$, $y = \sqrt{18}$

S=$\frac{AC*BD}{2}$=529

Պատ.՝ 529

3. Էջ 119, խնդիր 7,1, Երկրաչափություն 12, Ի Ֆ Շարիգին



Տրված է՝ BH ⊥ AO, BH=12, ∠COD=∠AOB=60^0,

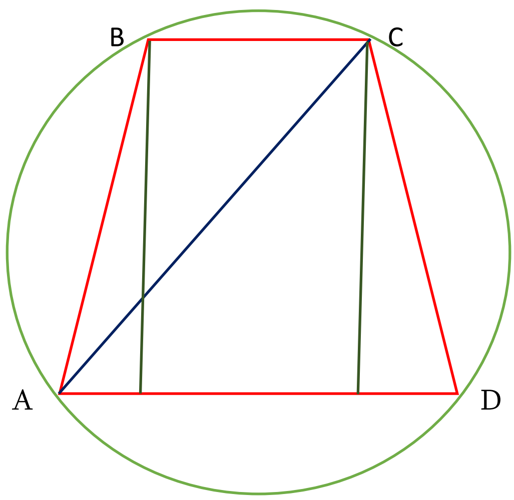
հետևում է ΔAOB-ն և ΔCOD-ն հավասարակողմ են և նրանց կողմերը հավասար են շրջանագծի շառավղին, հետևում է AO+OD=2R, այսինքն հավասար է շրջանագծի տրամագծին

ΔABH- ից, BH=12, ∠A=60^0, հետևաբար AB=R=$8\sqrt{3}$,

$$\text{SABCD} = \frac{AD+BC}{2} * BH = \frac{8\sqrt{3}+16\sqrt{3}}{2} * 12 = 144\sqrt{3}$$

Պատ՝ $144\sqrt{3}$

4. Էջ 119, խնդիր 7.2, Երկրաչափություն 12, Ի Ֆ Շարիգին



Տրված է՝ AD=14, BC=4, AB=CD=13, գտնել շրջանագծի շառավիղը

$$AH = \frac{AD-BC}{2} = \frac{14-4}{2} = 5$$

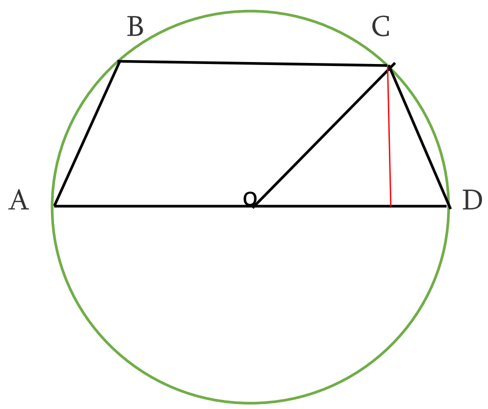
ΔABH- ից՝ ըստ Պյութագորասի թեորեմի, BH=CK=12, ΔACK- ից AC=12

ΔACK- ից՝ $\sin A = \frac{CK}{AC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

Ըստ Սինուսների թեորեմի, ΔACD- ից՝ $\frac{CD}{\sin A} = 2R$, R= $\frac{65}{8}$

Պատ՝ $\frac{65}{8}$

5. **Էջ 119, խնդիր 7,4** Երկրաչափություն 12, Ի Ֆ Շարիգին



Տրված է՝ AD=10, BC=6, շրջանագծի կենտրոնը հիմքի վրա է

AB=CD ?

Լուծում՝ AD=10, տրամագիծ է, ուրեմն

OD=OC=5

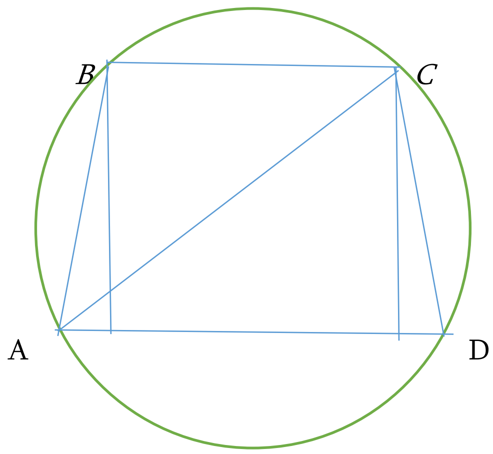
CK-ն բարձրություն է, ուրեմն

$$KD = \frac{AD-BC}{2} = \frac{10-6}{2} = 2$$

Ուրեմն OK=5-2=3, ΔOCK-ից, ըստ Պյութագորասի թեորեմի, CK=4, ΔCKD-ից, CD=$2\sqrt{5}$

Պատ՝ $2\sqrt{5}$

6. **Էջ 119 խնդիր 7,5** Երկրաչափություն 12, Ի Ֆ Շարիգին



Տրված է՝ AB=BC=CD, նշանակենք x, AD=2BC=2x

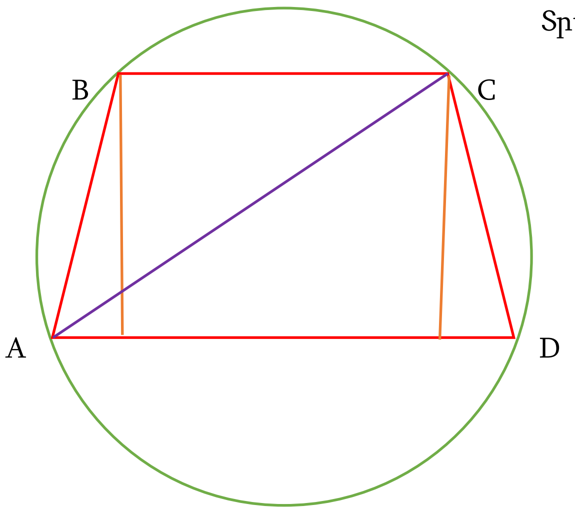
ուրեմն AH=KD=0.5x, ուրեմն ∠ABH=30^0, ∠BAH=60^0

ΔABH- ից՝ h=BH= $\frac{\sqrt{3}}{2}x$, AC=x$\sqrt{3}$, 2x=2R, x=R

S=$\frac{AD+BC}{2}BH = \frac{3x}{2} * \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$*$R^2$

Պատ՝ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$*R^2

7. Էջ 119, խնդիր 7,6, **Երկրաչափություն 12, Ի Ֆ Շարիգին**



Տրված է՝ AB=CD, BC:AD=5:12, նշանակենք BC=5x

AD=12x, HK=5x, AH=KD=$\frac{12x-5x}{2} = 3.5x$

AK=3.5x+5x=8.5x, ըստ խնդրի պայմանների,

Միջին գիծը հավասար է բարձրությանը (17)

8,5x=17, x=2, KD=3.5x=7

ΔCKD- ից՝ ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝

CD=$\sqrt{338}$,

ΔCAD- ից՝ CD=2Rsin A, R=13

Պատ՝ 13

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Ներգծված պատկերների մասին թեման հարթաչափության կարևորագույն մասերից է: Քանի որ թեման պարունակում է միանգամից 2 երկրաչափական պատկերների մասին գիտելիքներ, շատ կարևոր է որպեսզի սովորողի կողմից նախապես յուրացված լինեն դրանց վերաբերող բոլոր սահմանումներն ու թեորեմները:

Այսպիսով՝ վերը թվարկված և նմանատիպ այլ խնդիրների լուծման համար նախ հարկավոր է հիշել սահմանումները, տվյալ պատկերի հատկությունները, համակցել տվյալների հետ, կապ ստեղծել նրանց միջև և գալ եզրահանգման, որն էլ կլինի խնդրի լուծումը:

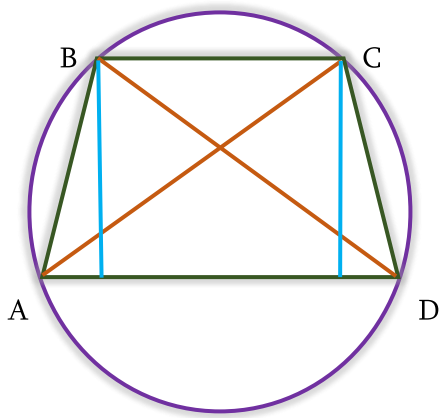
Թեման էլ ավելի հետաքրքիր դարձնելու համար կարելի է գծագրերը կատարել բազմագույն գրիչներով, ինչպես նաև պատրաստել դիտակտիկ նյութեր տարբեր գույների ստվարաթղթերից, որպեսզի սովորողները կարողանան տեսանելի ձևով համադրել պատկերները:

Թեմայի դասավանդման հետ կապված առաջարկում եմ

- ✓ Կիրառել նույն խնդրի լուծման համար միանգամից 2 մեթոդներ, ինչը թեման կդարձնի առավել հետաքրքիր և հնարավորություն կտա սովորողին կրկնել նախորդ թեմաները և սովորել համադրել դրանք:

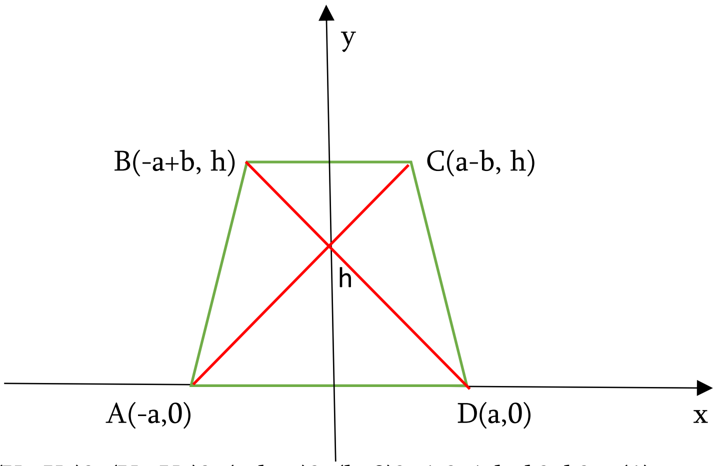
Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ խնդրի 2 լուծում

<u>Խնդիր</u> Ապացուցել, որ շրջանագծին ներգծյալ սեղանի անկյունագծերը հավասար են



Լուծում 1 Քանի որ շրջանագծին ներգծած սեղանը հավասարասրուն է, որի անյունագծերը հավասար անկյուններ են կազմում հիմքի հետ, դիտարկելով ΔABD-ի և ΔACD-ի հավասարությունը, կհանգնեք AC և BD անկյունագծերի հավասարությանը:

Լուծում 2 Կոորդինատների մեթոդ

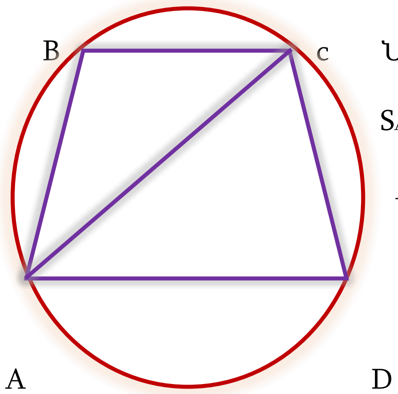


$AC^2=(X_C-X_A)^2+(Y_C-Y_A)^2=(a-b+a)^2+(h-0)^2=4a^2-4ab+b^2+h^2$ (1)

$BD^2=(X_B-X_D)^2+(Y_B-Y_D)^2=(-a+b-a)^2+(h-0)^2=4a^2-4ab+b^2+h^2$ (2)

(1)=(2) հետևաբար $AC^2= BD^2$ հետևաբար $AC= BD$

✓ Առաջարկում եմ նաև շրջանագծին ներգծած սեղանի մակերեսի հաշվման համար կիրառել հետևյալ բանաձևը, որի ապացույցը կներկայացնեմ ստորև

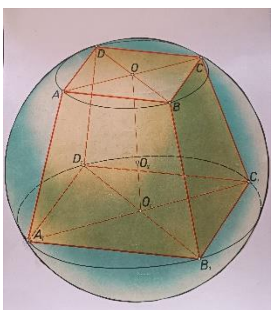


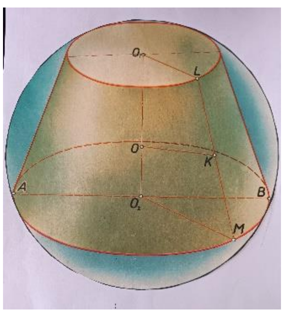
Նշանակենք՝ AB=CD=a, BC=b, AD=c, AC=d

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}=\frac{abd}{4R}+\frac{acd}{4R}=\frac{abd+acd}{4R}=\frac{ad(b+c)}{4R}=\frac{ad}{2R}\frac{b+c}{2}=\frac{adm}{2R}$$

Որտեղ m-ը սեղանի միջին գիծն է:

✓ Առաջարկում եմ, որպես թեմայի ամրապնդում և կիրառության կարևորության համար դիտարկել դրա տարածական տարբերակները՝ այսինքն գնդին ներգծած հատած բուրգի կամ հատած կոնի դեպքերը: Գծագրերը ներկայացված են ստորև:





ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Երկրաչափություն 7, Լ. Ս. Աթանասյան և ուրիշներ, Երևան, «Զանգակ-97», 2016թ.
2. Երկրաչափություն 8, Լ. Ս. Աթանասյան և ուրիշներ, Երևան, «Զանգակ-97», 2016թ.
3. Երկրաչափություն 9, Լ. Ս. Աթանասյան և ուրիշներ, Երևան, «Զանգակ-97», 2008թ.
4. Երկրաչափություն բնագիտական հոսք 11, Շարիգին, Երևան «Անտարես», 2010թ.
5. Երկրաչափություն բնագիտական հոսք 12, Շարիգին, Երևան «Անտարես», 2010թ.
6. Մաթեմատիկա Շտեմարան, մաս 1, մաս 2 Երևան «Բաբունի» ՍՊԸ 2014թ.,
7. Համացանց

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ
ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
«ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ.ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ
ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ»
ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ ՊՐՈԲԼԵՄԱՅԻՆ ՈՒՍՈՒՑՈՒՄ՝ ԵՌԱՆԿՅԱՆՆ ԱՐՏԱԳԾԱԾ ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ ՍՈՆՅԱ ՔԱՄԱԼՅԱՆ

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ ՄԵԼԻՍ ՍԱՔԱՆՅԱՆ

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ընդունելի չէ դասի շաբլոնը, նրա միօրինակ սխեման՝ հարցում, նոր նյութի հաղորդում, գիտելիքների ամրապնդում և տնային հանձնարարություն:

Այդպիսի ուսուցման ժամանակ աշակերտները լավագույն դեպքում սերտում են ուսուցչի հաղորդածը, վարժվում պատրաստի եզրահանգումներ հիշելուն և գնահատում, իսկ ուսուցումը գերազանցապես ծառայում է գիտելիքների կուտակմանը, զարգանում է սովորողների վերարտադրող, բայց ոչ ակտիվ, ստեղծագործական մտածողությունը:

Ժամանակակից դիդակտիկական ուսուցման առաջավոր եղանակներից մեկն է համարում պրոբլեմայինը, քանի որ այն ներառում է մանկավարժական բազմաթիվ արժեքավոր ձևերի ու հնարների օգտագործման հնարավորություններ, ենթադրում սովորողների ինքնուրույն մտածողության զարգացման լայն հեռանկարներ:

Դասին ներկայացվող այսօրվա պահանջներից է աշակերտների կարողունակությունների զարգացումը, սովորեցնել «սովորելու» ունակություններ, կիրառելու հմտություններ:

ԳԼՈՒԽ 1. ՊՐՈԲԼԵՄԱՅԻՆ ԻՐԱՎԻՃԱԿՆԵՐԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԺԱՄԵՐԻՆ

Պրոբլեմային ուսուցումը 20-րդ դարի երկրորդ կեսի գիտատեխնիկական հեղափոխության ծնունդնն է, նրա արդյունքը, որն արդիական է նաև 21-րդ դարում՝ այժմ: Այն որպես ուսուցման եղանակ, մանկավարժական, հասարակական, պատմական պահանջ է:

«Պրոբլեմ» բառը հունական ծագում ունի, որը նշանակում է խնդիր, առաջադրանք, տեսական կամ գործնական հարց, որը պահանջում է լուծում, ուսումնասիրում, հետազոտում:

«Պրոբլեմային ուսուցումը» այն իրադրությունն է, որն ստեղծվում է աշակերտի և իմացության օբյեկտի միջև ուսուցչի կողմից կազմակերպված փոխգործունեության միջոցով առաջացած իմացական հակասության շնորհիվ: Այսպիսի ուսուցման ընթացքում և'աշակերտը, և'ուսուցիչը յուրօրինակ « հայտնագործողներ» են, որոնողներ, հետազոտողներ:

Տարբերությունը սակայն այն է, որ ուսուցիչն ուսուցման պրոցեսի կառավարողն է, որը պետք է այնպիսին լինի, որ չվերածվի սովորողների ինքնուրույնությանը վնասող միջամտություն:

Այստեղ աշակերտը հետազոտում կամ որոնում է ոչ թե որպես հանձնարարված պատկանություն, այլ այն պատճառով, որ նրա գիտակցությանմեջ ծնվել է իրեն անհանգստացնող հարցը, և նա փնտրում է երևույթի բացատրությունը, հետաքրքրվում է իր համար կարևոր նշանակություն ունեցող խնդրով, և հաճույք է ստանում, երբ կարողանում է հաղթահարել դժվարություններն ու հասնել նպատակին:

Ցույց տալու համար, թե ինչ առավելություն ունի պրոբլեմային ուսուցումը ավանդականի նկատմամբ, կազմենք ուսուցման տարրերը պրոբլեմային և ոչ պրոբլեմային ուսուցման եղանակով՝

N	Պրոբլեմային ուսուցում	Ոչ պրոբլեմային ուսուցում
1	Աշակերտը դրվում է այնպիսի պայմաններում, որ զգա իր գիտելիքների անբավարար լինելը, տեսնի ներքին հակասություններ նրանց մեջ:	Ուսուցիչը կամ աշակերտը ընտրում են որևէ թեմա կամ նրա մի մասը, որը նախատեսված էուսումնական ծրագրով և անցնում են նրա յուրացմանը:
2	Աշակերտն ինքնուրույն ձևակրպում է պրոբլեմային իրավիճակը:	Ուսուցիչը հստակորեն ձևակերպում է խնդիրը, թեորեման, մաթեմատիկական առաջադրանքը:
3	Աշակերտն առանձնացնում է պրոբլեմային իրավիճակից ստացված խնդրի բաղադրիչները (բազմության տարրեր, հատկություններ, հարաբերություններ)	Ուսուցիչը հստակորեն ձևակերպում է խնդրի պահանջը:
4	Խնդիրը վերածում է մասնակի խնդիրների և լուծում դրանք. ա) պարզում է՝ խնդիրը լուծում ունի,, թե ոչ, բ) ցույց է տալիս խնդրի լուծման միարժեքությունը, գ) խնդիրը լուծելիս տեսնում է, որ իր գիտելիքներն անբավարար են այն լուծելու համար, առաջարկում և լուծում է նոր, միջանկյալ խնդիր դ) լուծման ընթացքում գլխավոր դերը պատկանում է աշակերտին, ուսուցիչը ղեկավարում է աշխատանքը, սահմանափակում նրա իմացական գործունեության «ազատությունը» հարցերով նպատակաուղղում նրան:	Անցնում են խնդրի լուծմանը, ընդ որում ա) խնդիրը նրանց մոտ միշտ պետք է ունենա լուծում, բ) գիտի, որ խնդրի լուծումը միակը պետք է լինի, գ) ուսուցիչն այնպես է նախապատրաստել աշակերտին, որ նրա գիտելիքները լիովին բավարար պետք է լինեն տվյալ խնդրի լուծման համար, դ) Լուծման ժամանակ հիմնական դերը պատկանում է ուսուցչին: ՆԱ հարցեր է տալիս աշակերտին, դրանք միացնում մեկ ամբողջության մեջ:

Ինչպես կառուցել մաթեմատիկայի դասը պրոբլեմային ուսուցման եղանակով:

Բերենք այդպիսի դասի կազմակերպման մոտավոր սխեմա.

1. Ուսումնական պրոբլեմային իրադրության ստեղծում:
2. Պրոբլեմի գրում և նրա ձևակերպում:
3. Պրոբլեմը բնութագրող պայմանների ուսումնասիրություն:
4. Դրված պրոբլեմի լուծում՝

ա) պրոբլեմի քննարկում և նրա լուծման նպատակահարմար ուղղությունների մշակում,

բ) պրոբլեմի լուծման համար անհրաժեշտ գիտելիքների ընտրություն և սիստեմավորում,

գ) լուծման նշված պլանի մանրամասնում

5. Ստացված լուծման ճշտության հիմնավորում

6. Պրոբլեմի լուծման ընթացքի և նրա արդյունքի հետազոտում և նրա գիտելիքի բացահայտում;

7. նոր գիտելիքների գործնական կիրառությունը հատուկ ընտրված խնդիրների լուծման ժամանակ:

8. Դրված պրոբլեմի հնարավոր ընդարձակման և ընդհանրացման հետազոտում:

9. Պրոբլեմի ստացված լուծման հետազոտում և այլ ավելի ձեռնտու լուծումների որոնում:

10. Կատարված աշխատանքի հանրագումարումը՝ վերջնարդյունքները:

Տանք մաթեմատիկական խնդրի լուծումը պրոբլեմային եղանակով նշված սխեմայի համաձայն:

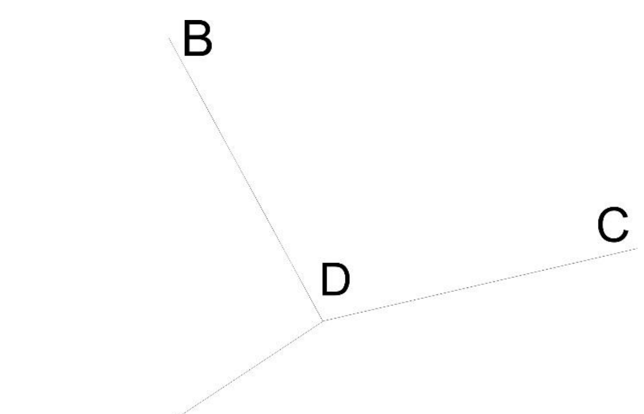
ԳԼՈՒԽ 2. ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ ԵՐԵՔ ՀԱՐԱԿԻՑ ԳՅՈՒՂԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԽԱՂԱՀՐԱՊԱՐԱԿԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՏԵՂԻ ՀԵՏ ԿԱՊՎԱԾ

Խնդիր- Որտեղ սկսել խաղահրապարակի (ստադիոնի) շինարարությունը, որ նա հարևան երեք գյուղերից ունենա հավասար հեռավորություն:

Այս խնդիրը կարելի է ձևակերպել « Եռանկյանը արտագծյալ շրջանագիծ» թեման անցնելիս (8-րդ դաս. երկրաչափությունից):

1. Խնդրի ձևակերպումը աշակերտի մոտ առաջացնում է հետաքրքրություն, գիտելիքների պակաս և նա անհրաժեշտություն է զգում լրացնել այդ պակասը, ընդունում է այս խնդրի պրոբլեմային բնույթը:
2. Պրոբլեային իրավիճակը դարձնում է մաթեմատիկական խնդիր: Տրված է միևնույն կետից հավասարահեռ կետերի բազմություն: Աշակերտը նկատում է, որ այդ կետերի երկրաչափական տեղը շրջանագիծ է, որի կենտրոնն անհայտ է:

Նկարում A,B,C կետերով նշված են գյուղերի, իսկ D կետով՝ ստադիոն, դիրքերը:



3. Տրված խնդիրը վերածում է մասնակի խնդիրների, երբ կետերի թիվը մեկն է, երկուսն է, երեքն է և այլն:
4. Լուծում է մասնակի խնդիրները:

ա) Մեկ կետով կարելի է տանել ցանկացած թվով շրջանագծեր, որոնց կենտրոնները կարող են գտնվել հարթության ցանկացած կետում:

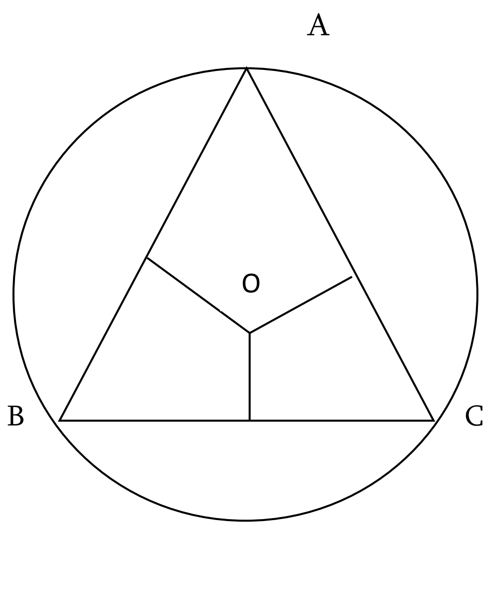
բ) Երկու կետով կարելի է տանել անթիվ բազմությամբ շրջանագծեր, նրանց կենտրոնները պետք է գտնվեն այդ կետերը միացնող հատվածի միջնուղղահայացի վրա:

գ) Մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերով կարելի է տանել շրջանագիծ, այն էլ միայն մեկը, որի կենտրոնը գտնվում է երեք կողմերի միջնուղղահայցների հատման կետում (հիմնավորել, որ դրանք հատվում են մի կետում), որն էլ կլինի ստադիոնի կառուցման վայրը:

Նոր պրոբլեմը եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնի տեղն է և արդյոք այս խնդիրը միշտ ունի լուծում:

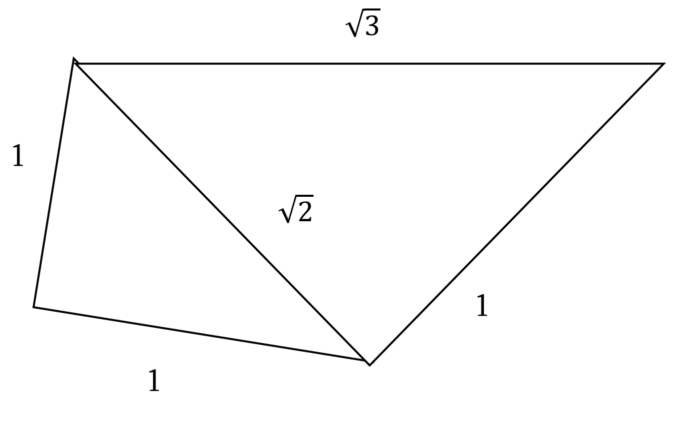
5. Այս պրոբլեմի լուծման ընթացքում ստացվում է շրջանագծին ներգծյալ եռանկյան կամ եռանկյանը արտագծյալ շրջանագծի թեորեմը:

   Աշակերտները հատվածներով միացնում են ABC կետերը, տանում կողմերի միջնուղղահայացները և հատման O կենտրոնով ու AO=BO=CO=R շառավղով գծում շրջանագիծ:



6. Ուսուցիչը նկատել է տալիս, որ սա թեորեմ է, որի ապացույցը բերվեց լուծման ընթացքում:
7. Սովորողներն ապացուցում են այս թեորեմի իրավացիությունը:
8. Վերադառնալով դրված կոնկրետ խնդրին, աշակերտները նկատում են, ր իրենք կարողանում են գտնել ստադիոնի կառուցման վայրը:
9. Սովորողներին կարելի է առաջարկել նաև դիտարկել ստացված եռանկյունիների հնարավոր տեսակները:
10. Կատարվառւմ է սովորածի հանրագումար, քննարկել վերջնարդյունքները, հանձնարարել ինքնուրույն աշխատանք:

Պրոբլեմային իրավիճակ կարելի է ստեղծել նաև եռանկյանը արտագծյալ շրջանագծի կառուցման խնդիրներում: «Համեմատական հատվածները ուղղանկյուն եռանկյան մեջ» թեման ուսուցանելու ժամանակ կարելի է առաջադրել հետևյալ խնդիրը.



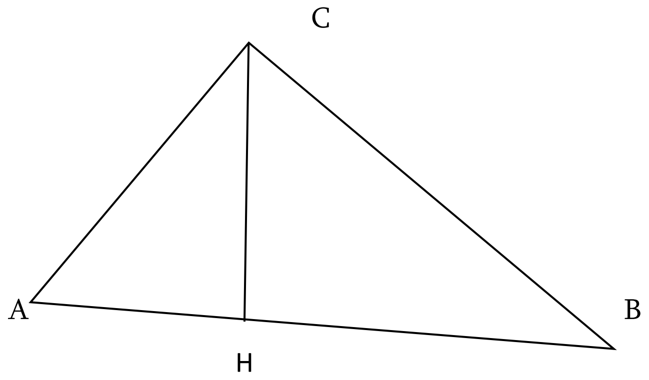
Կառուցել √24 կամ √56 երկարությամբ հատված»: Հնարավորինս պարզեցնելով խնդիրը, նախ կարելի է առաջադրել √2, √3 երկարությամբ հատվածների կառուցումը:

Աշակերտներից ոմանք հնարավոր է օգտագործեն Պյութագորասի թեորեմը և կառուցեն 1 և1 էջերով ուղղանկյուն եռանկյուն, որի ներքնաձիգը հավասար է √2: Այնուհետև √2 և 1 էջերով ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը հավասար կլինի √3: Սակայն այդպես շարունակական չեն կարող հասնել √56-ի կառուցմանը:

Ուստի գիտելիքի պակասը լրացնելու և հետաքրքրությունից դրդված կփորձեն լրացնել գիտելիքի պակասը:

Արդյունքում դասի ընթացքը կառավարելով՝ խնդիրը կլուծենք ըստ հետևյալ քայլերի.

1. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարած բարձրությունը միջին համեմատական է ներնաձիգի վրա առաջացած հատվածների:



CH=$\sqrt{AH \cdot HB}$

$\sqrt{56}$= $\sqrt{7 \cdot 8}$

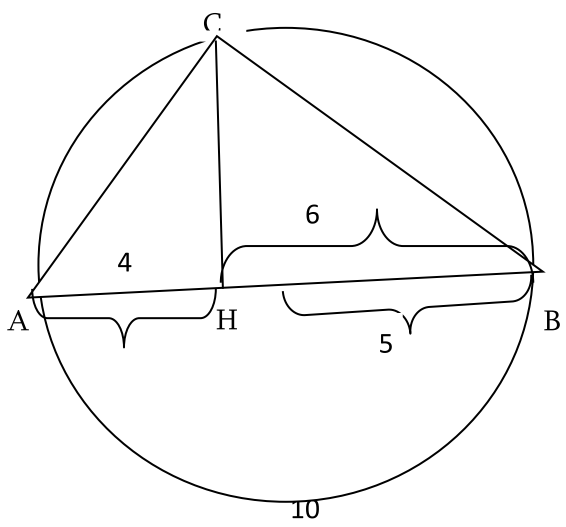
$\sqrt{24}$= $\sqrt{4 \cdot 6}$= $\sqrt{3 \cdot 8}$

2. Հարկավոր է կառուցել օրինակ

AH=4, BH=6 ներքնաձիգի (AB=4+6) վրա H կետում տարած HC ուղղահայացով ուղղանկյուն ΔACB:

3. Դրա համար պետք է կառուցել AH= 4 միավոր, HB= 6 միավոր ՝AB=4+6=10 միավոր, հատվածներ: Այնուհետև AB-ի միջակետը՝ O-ն է:

AO=OB=$\frac{10}{2}$=5



4. Կառուցել O կենտրոնով և OA=OB=OC շառավղով շրջանագիծ (R= 5 միավոր)

5. H կետում կառուցել AB- ի ն ուղղահայաց, որը շրջանագծին կհատի C կետում:

CH= $\sqrt{4 \cdot 6}$ =$\sqrt{24}$:

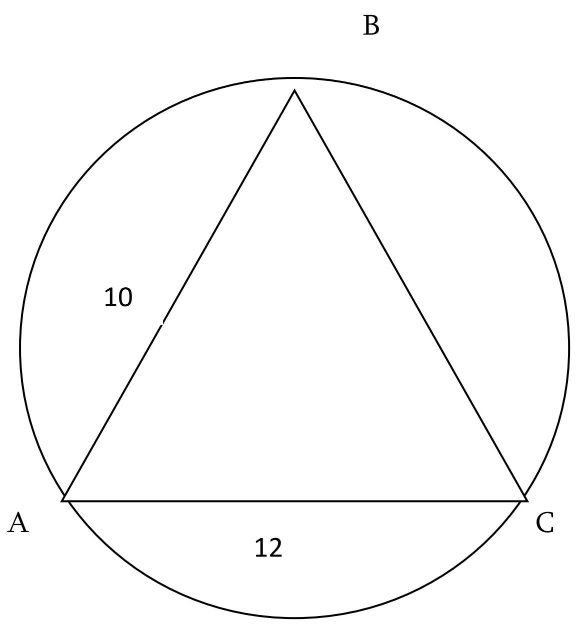
ԿԱռուցված է որոնելի $\sqrt{24}$ երկարությամբ հատվածը:

6. Հիմնավորել, որ CH=$\sqrt{24}$:

7. Բացատրություն. <ACB= $\frac{AB}{2}$= $\frac{180°}{2}$=90° (որպես կիսաշրջանագծի վրա հենված ներգծյալ անկյուն): Հետևաբար CH=$\sqrt{AH \cdot HB}$ միջին համեմատականի թեորեմը կիրառելի է այս խնդրում:

Այժմ որոշ խնդիրների լուծում, որոնք կապված են «Եռանկյանը արտագծյալ շրջանագիծ» թեմայի հետ:

Խնդիր 1. Եռանկյան երկու կողմերը 10 և 12 են, իսկ մակերեսը՝ 48: Գտնել եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը :



S∆= $\frac{AB \cdot AC \cdot sinA}{2}$ (եռանկյան մակերեսի բանաձև), որտեղից կգտնենք $sinA$-ն:

$sinA$= $\frac{2 \cdot S}{AB \cdot AC}$=$\frac{2 \cdot 48}{10 \cdot 12}$=$\frac{4}{5}$

$sin^2A + cos^2A$=1 նույնությունից գտնենք $cosA$-ն:

cos^2A=sin^2A

$cos^2A = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$$cosA = \pm\frac{3}{5}$$

Կիրառելով կոսինուսների թեորեմը՝ ΔABC-ից կգտնենք BC-ն:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cosA$

$BC^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12\frac{3}{5}$ կամ (1)

$BC^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12\left(-\frac{3}{5}\right)$ (2)

(1) $BC = 10$

(2) $BC = \sqrt{388}$

Ըստ սինուսների թեորեմի

$\frac{BC}{sinA} = 2R$

(1) $\frac{10}{\frac{4}{5}} = 2R \rightarrow R = \frac{25}{4}$

(2) $\frac{\sqrt{388}}{\frac{4}{5}} = 2R \rightarrow R = \frac{5\cdot\sqrt{388}}{8} = \frac{5\cdot\sqrt{4\cdot97}}{8} \rightarrow$

$\frac{5\cdot2\cdot\sqrt{97}}{8} = \frac{5\cdot\sqrt{97}}{4} = 12{,}25$

Պատասխան $\frac{25}{4}, \frac{5\cdot\sqrt{97}}{4}$

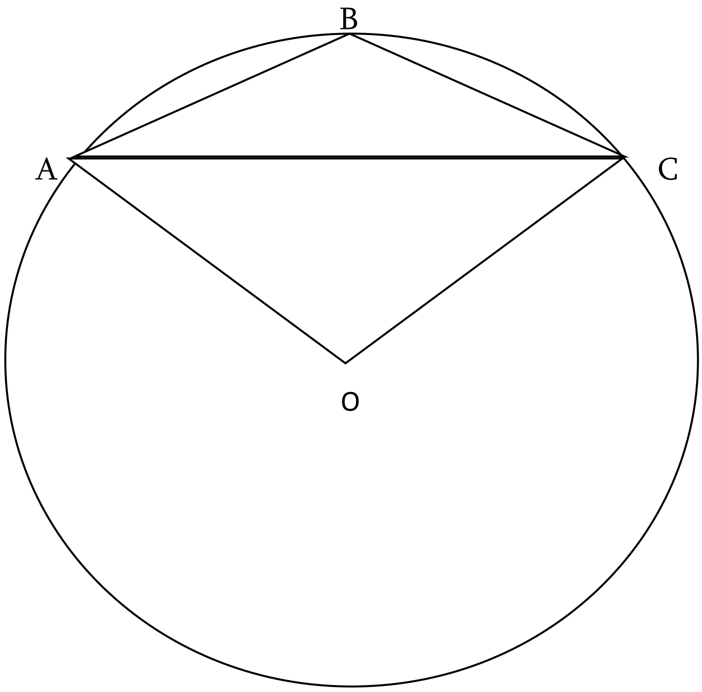
(1) Դեպքում ΔABC-ն սուրանկյուն եռանկյուն է, իսկ (2) դեպքում՝ բութանկյուն եռանկյուն:

Հնարավոր են խնդրի լուծման այլ տարբերակներ: (1) Դեպքում ΔABC-ն նաև հավասարասրուն է:

Ունենալով ΔABC-ի երեք կողմերը, նաև մակերեսը, կարելի էր կիրառել

$R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4S}$ բանաձևը:

Խնդիր 2. Բութանկյուն հավասարասրուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է եռանկյան հիմքին: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները



Ըստ խնդրի տվյալների AB=BC

AO=OC=AC=R

Պահանջվում է գտնել ΔABC-ի անկյունները

Լուծում

AO=OC=AC $\longrightarrow$, որ ΔABC-ն հավասարակողմ է, $\longrightarrow$ < O ==< CAO =

< OCA=$\frac{180°}{3}$=60°

< O = ∪ABC=60° (որպես կենտրոնական անկյուն)։ Քանի որ < BCA =< BAC (որպես AC հիմքին առընթեր անկյուններ) և AB=BC $\longrightarrow$, որ ∪AB =∪BC=$\frac{\cup ABC}{2}$=30°, ապա

< BAC=< BCA=$\frac{\cup BC}{2}$=$\frac{\cup AB}{2}$=15° (որպես ներգծյալ անկյուններ)։

< B=180°-2·15°=150° (եռանկյան անկյունների գումարի թեորեմից)։

ՊԱտասխան 15°, 15°,15°0

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Ամփոփելով հետազոտական աշխատանքը նշենք, որ <<Պրոբլեմային ուսուցումը>> ուսուցման պրոցեսը խթանող մեթոդ է, որը մղում է նաև աշակերտների ինքնաուսուցմանը, ինքնակատարելագործմանը:

Կատարված հետազոտության արդյունքները ցույց են տալիս, որ աշակերտները ակտիվ մասնակցում են խաղահրապարակի կառուցման տեղի որոշմամաբ, նպանատիպ պրակտիկ խնդիրների լուծումների որոնմանը:

Հետևաբար, աշակերտներին անհրաժեշտ է ավելի բարձր գիտելիքների իմացություն <<Երկրաչափություն >> առարկայից: Նաև ոչ շաբլոն դասերին աշակերտբներն ավելի հետաքրքրված են և ավելի հեշտ են յուրացում և մտապահում գիտելիքները, նոր նյութը:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Յու. Ամիրջանյան, Պ.Ն. Տոնոյան- «Պրոբլեմային մոտեցում մաթեմատիկայի ուսուցմանը»

2. Մ.Հ. Դանիելյան. «Պրոբլեմային ուսուցման տարբեր մեթոդները երկրաչափության դասավանդման ընթացքում», « ՄԱթեմատիկա և ֆիզիկա դպրոցում»2006թ.,N3, էջ 7-11

3. Ի. Ֆ. Շարիգին- դասագիրք «Երկրաչափություն» բնագիտամաթեմատիկական հոսք: 12-րդ դասարան

4. Լ.Ս. Աթանասյան, Վ.Ֆ. Բուռուզով, դասագիրք «Երկրաչափություն»9-րդ դասարան 2005թ.

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ
ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

«ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ.ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ» ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ **«Խնդիրներ եռանկյան անկյան կիսորդի մասին»**

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ **Վերիչկա Սարգսյան**

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ **Մ. Սաքանյան**

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

<<Մեծ գիտական հայտնագործությունը լուծում է
հիմնական խնդիրները,բայց ցանկացած խնդրի
լուծման մեջ կա բացահայտման մասնիկ>>:
Դ․ Պոյա

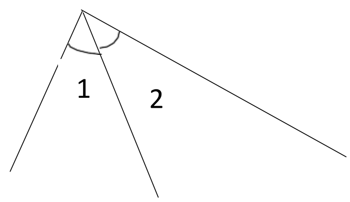
Հետաքրքիր և զարմանալի պատկեր է կիսորդը: Բացի այդ, երկրաչափության դպրոցական դասընթացում մենք գործ ենք ունենում եռանկյուն հասկացության հետ: Հիմնական երկրաչափական փաստերից է այն թեորեմը, որ կիսորդը եռանկյան կողմը բաժանում է կից կողմերին համեմատական մասերի: Այս փաստը առավել հայտնի թեորեմների կողքին մնաց ստվերում; առաջին հերթին այն պատճառով, որ գրքերի մեծ մասում այն գտնվում է խնդիրների շարքում: Բայց հանդիպում են խնդիրներ, որոնց լուծման ընթացքն ավելի հեշտանում է, եթե իմանան կիսորդի վերաբերյալ այս և այլ փաստեր: Օրինակ դեռ Արքիմեդը օգտվել է կիսորդի մասին թեորեմից, որը հիմքը բաժանում է կողմերին համեմատական մասերի, որպեսզի որոշի 12-անկյան, 24-անկյան կողմերի երկարությունների կեսը: Այս թեորեմը հետաքրքիր է նրանով, որ գրյություն ունեն նրա ապացուցման շատ ձևեր:

Այս աշխատանքում ցույց է տրված այս թեորեմի ապացուցման մի քանի եղանակներ, և նշված են կիսորդի մի քանի այլ հատկություններ: Բերված են կիսորդի երկարության հաշվման մի քանի բանաձևեր/ ըստ հայտնի տվյալների/:

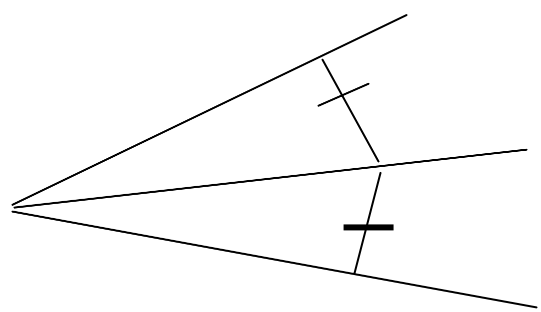
§1.ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿԻՍՈՐԴԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Նախ տանք անկյան կիսորդի սահմանումը և հատկությունները։

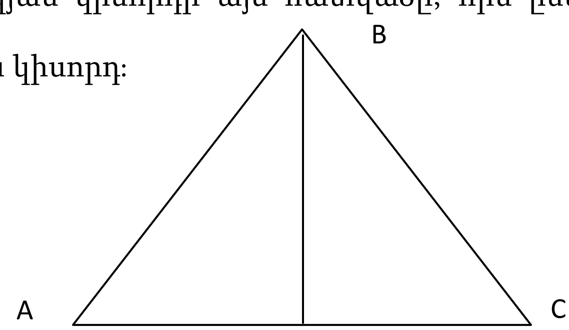
Սահմանում 1։ Անկյան գագաթից դուրս եկող ճառագայթը, որը անկյունը բաժանում է 2 հավասար մասերի,կոչվում է անկյան կիսորդ։



Թեորեմա։ Անկյան կիսորդի յուրաքանչյուր կետ հավասարահեռ է այդ անկյան կողմորից։ Հակադարձը՝ անկյան ներսում գտնվող և նրա կողմերից հավասարահեռ յուրաքանչյուր կետ գտնվում է այդ անկյան կիսորդի վրա։ (Ապացույցը տես [1]-ում)։

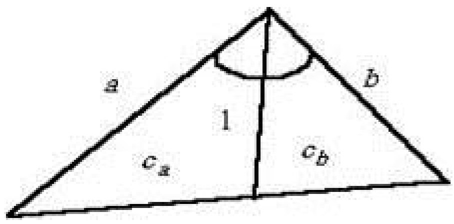


Սահմանում 2։ Եռանկյան անկյան կիսորդի այն հատվածը, որն ընկած է եռանկյան ներսում, կոչվում է եռանկյան կիսորդ։



Տանք եռանկյան կիսորդի հիմնական հատկությունը և նրա ապացուցման 17 եղանակ:

Թեորեմա 1: Եռանկյան անկյան կիսորդը հանդիպակաց կողմը տրոհում է 2 հատվածների, որոնք համեմատական են կից կողմերին: [1]

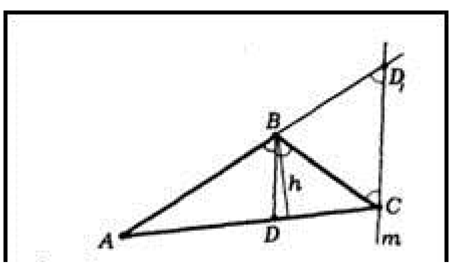


Հարմար է թեորեմը ձևակերպել այսպես,

ա) գոյություն ունի այնպիսի t, որ $c_a = at, \ c_b = bt$

բ) գոյություն ունի այնպիսի k, որ $a = k \cdot c_a, \ b = k \cdot c_b$

Թեորեմ 1′: ABC եռանկյան ներքին անկյան BD կիսորդը հանդիպաակաց կողմը տրոհում է 2 հատվածների, որոնք համեմատական են եռանկյան BC և BA կողմերին:



Գծ.1

Ապացույց 1: C կետով տանենք BD -ին զուգահեռ m ուղիղը: Ապա m∩AB=D_1 և $\Delta ABD \sim \Delta AD_1C$, քանի որ $\angle ABD = \angle CBD = \angle BCD_1 = \angle CD_1B$ կստանանք $BC = BD_1$, և $AD_1 \colon AB = AC \colon AD$: Այստեղից հաջորդաբար կստանանք. $(AB + BC) \colon AB = (AD + DC) \colon AD \to 1 + BC \colon AB = 1 + DC \colon AD$, որտեղից հետևում է, որ $BC \colon AB = DC \colon AD$, ինչը և պահանջում էր ապացուցել:

Ապացույց 2։Ունենք $S_{CBD}: S_{ABD} = (\frac{1}{2}CB\cdot DB\cdot \sin\frac{B}{2}):(\frac{1}{2}\cdot AB\cdot DB\cdot \sin\frac{B}{2}) = (\frac{1}{2}CD\cdot h):(\frac{1}{2}AD\cdot h)$,

որտեղ h-ը ABC եռանկյան B գագաթից տարված բարձրության երկարությունն է։

Այստեղից $BC: AB = DC: AD$։ Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել։

Ապացույց 3։ Ըստ սինուսների թեորեմի՝

$\sin\frac{B}{2}: CD = \sin C : BD$,

$\sin\frac{B}{2}: AD = \sin A : BD$, կամ

$\sin\frac{B}{2}:(CD\cdot \sin C) = 1: BD$ և

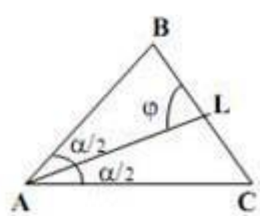
$\sin\frac{B}{2}:(AD\cdot \sin A) = 1: BD$։

Որտեղից՝

$\sin\frac{B}{2}:(CD\cdot \sin C) = \sin\frac{B}{2}(AD\cdot \sin A)$

Կամ $CD: AD = CB: AD$։ Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել։

Ապացույց 4: թող $\alpha = \angle BAC, \alpha = \angle BLA$



Գծ.2

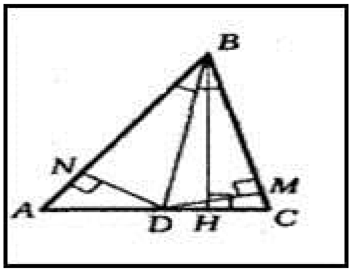
Ըստ սինուսների թեորեմի ABC եռանկյան մեջ $\frac{BL}{\sin\alpha/2} = \frac{AB}{\sin\alpha}$, իսկ ACL եռանկյան մեջ $LC/\sin\alpha/2 = AC/\sin(180^0-\alpha)$։ Քանի որ $\sin(180^0-\varphi) = \sin\varphi$ ։ կատարելով համապատասխան բաժանումներ կստանանք՝ $\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}$ ։ Ապացույցը ավարտված է։

Ապացույց 5։ Կիրառենք մակերեսների մեթոդը։ Հաշվենք ABL և ACL եռանկյունների մակերեսները 2 եղանակներով՝ $S_{ABL} = \frac{1}{2}AB\cdot AL\cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}BL_1\cdot AL_1\cdot \sin\varphi$

2-րդ եղանակ՝

$S_{ABL} = \frac{1}{2} AC \cdot AL \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot LA \cdot AL \cdot \sin\ (180^0 - \alpha)$, որտեղից $BL/CL = AB/AC$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել։

Ապացույց 6։ Հավասար բարձրություններով եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են ինչպես իրենց հիմքերը։



Գծ.3

Ըստ որի, S_{BDA}: S_{BDC}=AD:DC:

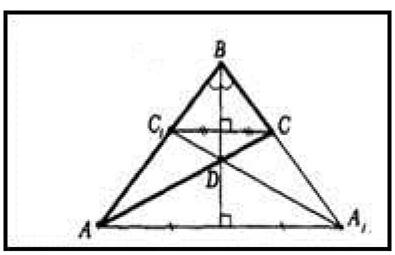
Մյուս կողմից, ըստ կիսորդների հատկության BDA և BDC եռանկյունների D_1 գագաթից իջեցված բարձրության քառակուսիները հավասար են։

Հետևաբար S_{BDA}:S_{BDC}=AB: CB:

Այսպիսով AD: $CD = AB$: $CB = S_{BDA}$: S_{BDC}

Այսպիսով AD: $CD = AB$: CB , ինչը և պահանջվում էր ապացուցել։

Ապացույց 7։

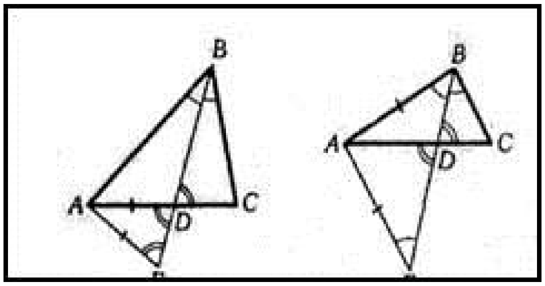


Գծ.4

Կատարելով եռանկյուն ABC-ի առանցքային համաչափությունը BD-ի նկատմամբ (գծ. 4), կստանանք S_{BD}(A)=A_1, S_{BD}(C)=C_1, S_{BD}=B:

Ապա $\Delta CDC_1 \sim \Delta ADA_1$ և $\Delta\ CC_1B \sim \Delta\ AA_1B$, որտեղից $AB = A^1B$: CD: $AD = CC^1$: $AA^1 = CB$: AB: Հետևաբար CD:AD=CB:AB, ինչը և պահանջվում է ապացուցել։

Ապացույց 8:



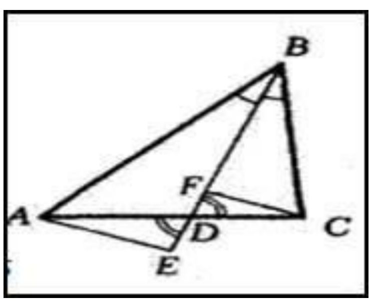
ա) Գծ.5 բ)

BD ճառագայթի վրա վերցնենք E կետ այնպիսին, որ $AE = AD$(գծ,5ա): Ապա $\angle AEB = \angle ADE = \angle BDC$: Հետևաբար ABE և CBD եռանկյունները նման են: Դա նշանակում է, որ AE: $CD = AB$: BC: Քանի որ AE=AD կստանանք AD: $CD = AB$: CB : Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ապացույց 9: BD ճառագայթի վրա վերցնենք այնպիսի E կետ,որ AE=AB(գծ,5բ): Ապա ∠AED=∠ABD այսինքն AED և CBD եռանկյունները նման են: Նմանությունից ունենք, որ AD:$CD = AE$:CB , քանի որ $AE = AB$,ապա AD:$CD = AB$:CB:

Ապացուցված է:

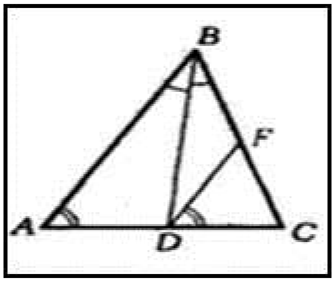
Ապացույց 10:



Գծ.6

A և C գագաթներից տանենք AE և CF ուղղահայացները BO -ին: (գծ,6):ADE և CDF ուղղանկյուն եռանկյունների նմանությունից կունենանք,որ AD:CD=AE:CF:Ստացված հարաբերություններում աջ մասերը հավասար են,հետևաբար հավասար են նաև ձախ մասերը,այսինքն AD:CD=AB:CB:

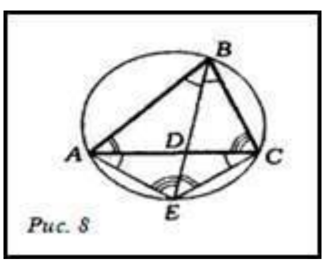
Ապացույց 11:



Գծ.7

D կետով տանենք AB-ին զուգահեռ ուղիղ: Ապա ըստ Թալեսի ընդհանրացված թեորեմի AD:CD=BF:FC: ACB և DCF եռանկյունների նմանությունից կունենանք, որ AB:BC=FD:FC,քանի որ ΔBFD-ն հավասարասրուն է($\angle BDF = \angle ABD$ որպես խաչադիր անկյուններ, DF և AB զուգահեռ ուղիղները BD-ով հատելիս,իսկ $\angle ABD = \angle DBF$, այստեղից $\angle BDF = \angle DBF$) և BF=FD ապա AB:CB=BF:FC: Հետևաբար AD:CD=AB:CB (երկու հարաբերություններն էլ հավասար են BF:FC): Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ապացույց 12:

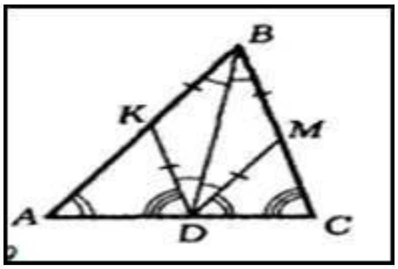


Գծ.8

ABC եռանկյանն արտագծենք շրջանագիծ, BD-ն շարունակենք մինչև շրջանագծի հետ հատվելը (E կետը,գծ.8) ABE և DBC եռանկյունների նմանությունից կստանանք AB:AE=BD:DC այսինքն AB·DC=AE·BD:

CBE և DBA եռանկյունների նմանությունից ունենք CB:CE=BD:AD, այսինքն CB ⋅ AD=CE ⋅ BD: Նկատելով, որ AE=CE, կստանանք AB ⋅ DC=CB ⋅ AD, որտեղից AD:CD=AB:CB: Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ապացույց 13:



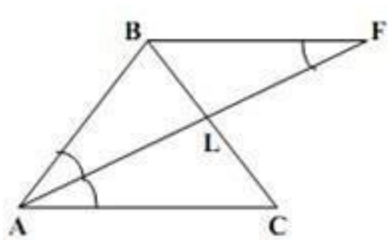
Գծ.9

D կետից տանենք 2 ուղիղներ, որոնցից մեկը զուգահեռ է AB կողմին և BC -ն հատում է M կետում, մյուսը զուգահեռ է BC-ին և AB-ն հատում է K կետում (գծ․9):

Հեշտ է ապացուցել, որ KMBD քառանկյունը շեղանկյուն է: AKD և DMC եռանկյունների նմանությունից ունենք AD:CD=DK:CM: Քանի որ DK=DM, ապա AD:CD=DM:CM:

Ստացված հարաբերությունում փոխարինելով DM:CM-ը իրեն հավասար AB:CB հարաբերությամբ ($\Delta ABC \sim \Delta DMC$), կստանանք AD:CD=AB:CB: Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ապացույց 14:



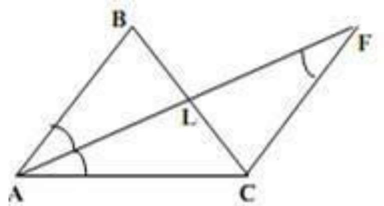
Գծ.10

Տրված է ABC եռանկյան AL կիսորդը:

Ապացուցել, որ $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$:

Թող F-ը AL կիսորդի և B գագաթից AC-ին զուգահեռ տարված ուղղի հատման կետն է: Ապա $\angle BFA = \angle FAC = \angle BAF$: Հետևաբար BAF-ը հավասարասրուն եռանկյուն է և BA=BF: ALC և FLB եռանկյունների նմանությունից կունենանք $\frac{BL}{LC} = \frac{BF}{AC}$,որտեղից $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$: Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ապացույց 15:

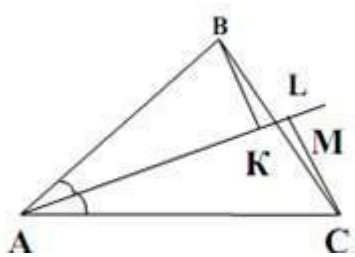


Գծ.11

Թող F-ը AL ուղղի և C կետով անցնող AB-ին զուգահեռ ուղղի հատման կետն է (տես գծ.11):Ապա կարելի է կրկնել դատողությունները, և խնդիրն ապացուցված է:

Ապացույց 16:

Գծ.11

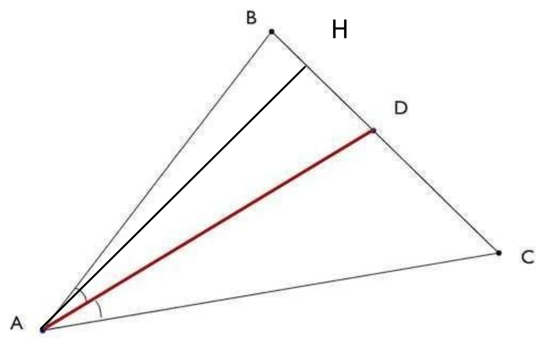


Գծ.12

Թող K և M-ը համապատասխանաբար B և C կետերից AL կիսորդին իջեցրած ուղղահայացների հիմքերն են (գծ . 12): ΔABK ~ ΔACM ըստ 2 եռանկյունների: Հետևաբար $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{CM}$: ΔBKL ~ ΔCML եռանկյունների նմանությունից ունենք $\frac{BK}{CM} = \frac{BL}{CL}$: Այստեղից $\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացույց 17:



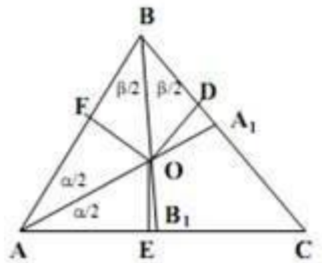
Գծ.13

Թող AD-ն լինի ABC եռանկյան կիսորդը: Ցույց տանք, որ BD:AB=CD:AC (Գծ.13): ABC և ACD եռանկյունները ունեն ընդհանուր AH բարձրությունը, ըստ որի $S_{ABD}\colon\ S_{ACD} = BD\colon\ CD$: Մյուս կողմից,այդ եռանկյունները ունեն հավասար անկյուններ ($\angle 1 = \angle 2$): Դրա համար էլ $S_{ABD}\colon\ S_{ACD} = (AB \cdot AD)\colon\ (AC \cdot AD) = AB\colon\ AC$:Եռանկյունների հարաբերության երկու հավասարություններից կստանանք . BD:CD=AB:AC կամ BD:AB=CD:AC: Թեորեմն ապացուցված է:

§2 ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿԻՍՈՐԴԻ ԱՅԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Թեորեմա 2: Եռանկյան կիսորդները հատվում են մեկ կետում:

Ապացույց:



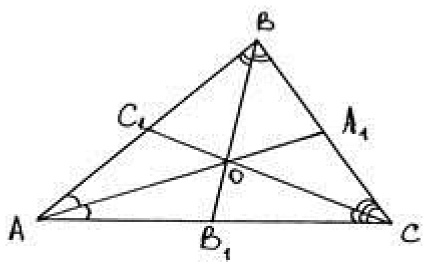
Գծ.14

Թող O-ն AA_1 և BB_1 կիսորդների հատման կետն է: D, E ,F կետերը O կետից համապատասխան AB< BC և AC կողմերին իջեցրած ուղղահայացների հիմքերը (տես գծ.14): ΔAOE=ΔAOF⟹ OE=OF: Համանման ձևով ΔBOF=ΔBOD, որտեղից կստանանք OF=OD: Հետևաբար OE=OD, նշանակում է ΔOCD=ΔOCE: Որտեղից հետևում է $\angle OCD = \angle OCE$, այսինքն CO-ն $\angle DCE$ -ի կիսորդն է, ինչը նշանակում է, որ երրորդ կիսորդը անցնում է մյուս երկու կիսորդների հատման կետով:

Դիտողություն: Կատարված ապացույցից հետևում է, որ կիսորդների հատման կետը հավասարապես է հեռացված եռանկյան բոլոր կողմերից, այսինքն այն հանդիսանում է եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը:

Շրջանագիծը, որը շոշոփում է եռանկյան մի կողմը և մյուս երկու կողմերի շարունակությունները, չի կոչվում ներգծված: Ճիշտ նույն դատողություններով կարելի է ապացուցել, որ եռանկյան մեկ ներքին անկյան կիսորդը և 2 արտաքին անկյունների կիսորդների հատան կետը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է:

Թեորեմա 3: Յուրաքանչյուր կիսորդ՝ կիսորդների հատման կետով բաժանվում է կողմերի գումարի և հանդիպակաց կողմի հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:



Գծ.15

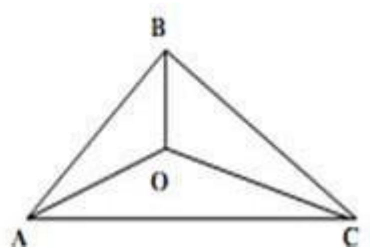
Թող O-ն լինի կիսորդների հատման կետը, AB=c, BC=a< AC=b: Ապա

$$\begin{cases} BA_1 + A_1C = a \\ \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{c}{a} \end{cases} \text{, որտեղից } BA_1 = \frac{ac}{a+b}, \ AC = \frac{ab}{b+c}$$

Քանի որ AO-ն BAC եռանկյան ներքին անկյան կիսորդն է, ապա $AO{:}\,OA_1 = AB_1{:}\,B_1C + AC_1{:}\,C_1B$: Ըստ Վան-Օբելի թեորեմի: Որտեղից կստանանք $AO{:}\,OA_1 = (c+b){:}\,a$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմա 4: Եթե O-ն ABC եռանկյան կիսորդների հատման կետն է և $\angle ABC = \beta$, ապա $\angle AOC = 90^0 + \frac{\beta}{2}$:



Գծ.16

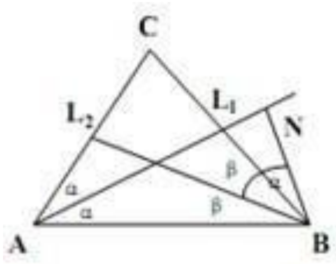
Ապացույց: Թող $\angle A = \alpha,\ \angle B = \beta,\ \angle C = \gamma$ (Գծ.16): $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$,

$0{,}5\alpha - 0{,}5\gamma = 180^0 - 0{,}5(180^0 - \beta) = 90^0 + 0{,}5\beta = 90^0 + \frac{\beta}{2}$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Տանք հավասարասրուն եռանկյան ևս մեկ հատկություն կամ Շտեյներ-Լեմուսի թեորեմը:

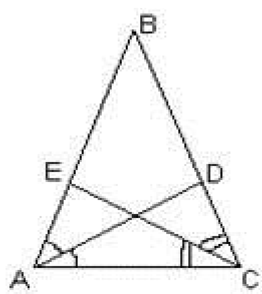
Թեորեմա 5: Եթե եռանկյան երկու կիսորդները հավասար են, ապա եռանկյունը հավասարաարուն է:



Գծ.17

Ապացույց 1: Թող $> \beta$, $AL_1 = BL_2$: Ապա $2\alpha > \alpha + \beta$: BL_2 ճառագայթով առանձնացնենք α անկյուն, N կետը AL_1 կիսորդի և այդ ճառագայթի հատման կետն է: Ապա AN> AL_1 ; AL_2L_1B քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Այնտեղ $\alpha + \beta < 2\alpha$, որտեղից հետևում է, որ AN<$BL_2 = AL_1$: Ստացվեց հակասություն:

Համանման ձևով կստանանք հակասություն, եթե ենթադրենք, որ $\alpha < \beta$: Մնում է ենթադրել,որ $\alpha = \beta \implies 2\alpha = 2\beta \implies \angle BAC = \angle ABC$: Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:



Գծ.18

Ապացույց 2: Թող ABC եռանկյան մեջ $l_a = l_c$, բայց a ≠ c: Դիտարկենք

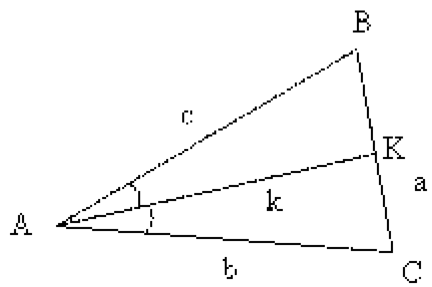
$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos 0{,}5\alpha}{b+c}$$ և $$l_c = \frac{2ab \cdot \cos 0{,}5\gamma}{a+b}$$: Առանց ընդհանրությունը փոխելու-

ենթադրենք a > c, այդ դեպքում α > γ ⇔

$0,5\alpha > 0,5\gamma \Rightarrow \cos 0,5\alpha < \cos 0,5\gamma$, քանի որ այդ անկյունները սուր են: Համեմատենք. $\frac{bc}{b+c} - \frac{ab}{a+b} = \frac{b^2(c-a)}{(b+c)(a+b)} < 0 \Rightarrow \frac{bc}{b+c} < \frac{ab}{a+b}$. Այսպիսով , ստացանք որ $l_a < l_c$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը: Հետևաբար a=c: Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

§ 3 ԿԻՍՈՐԴԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Թեորեմա 6: Եռանկյան կիսորդի երկարությունը հավասար է անկյունը կազմող կողմերի կրկնապատիկ արտադրյալի հարաբերությանը այդ եռանկյանը կազմող կողմերի գումարին և այդ գագաթի անկյան կեսի կասինուսի արտադրյալին:



Գծ.19

Ապացույց:

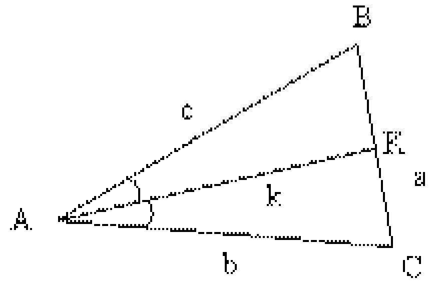
Տրված է ABC եռանկյուն, AK կիսորդը: Ապացուցել, որ k= $\frac{2bc}{b+c} * \cos\frac{A}{2}$:

Թող AB = c, BC = a, AC = b, AK = k. (գծ.19): $S_{\Delta\,\mathrm{ABC}} = S_{\Delta\,\mathrm{ABK}} + S_{\Delta\,\mathrm{AKC}}$,

$\frac{cb}{2} \cdot \sin A = \frac{ck}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} + \frac{bk}{2} \cdot \sin\frac{A}{2}$, քանի որ $\sin A = 2 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}$: Այստեղից կստանանք $cb \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} = \frac{ck}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} + \frac{bk}{2} \cdot \sin\frac{A}{2}$:

$2bc \cdot \cos\frac{A}{2} = k(c+b) \quad \Longrightarrow k = \frac{2bc}{b+c} * \cos\frac{A}{2}$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմա 7: Եռանկյան կիսորդի երկարության քառակուսին հավասար է այդ անկյունը կազմող կողմերի արտադրյալի և հանդիպակաց կողմի վրա առաջացած հատվածների արտադրյալի տարբերությանը:



Գծ.20

Ապացույց: Թող AB = c, BK = x, KC = y, AC = b, AK = k. Ըստ կոսինուսների թեորեմի

$cos\ \angle AKB = \dfrac{k^2+x^2-c^2}{2xk}$, $\cos \angle AKC = \dfrac{k^2+y^2-b^2}{2yk}$.

$\cos \angle AMB = -\cos \angle AMC \Rightarrow \dfrac{k^2+x^2-c^2}{2xk} = \dfrac{-k^2-y^2+b^2}{2yk}$

$k^2y + x^2y - c^2y = -k^2x - y^2x + b^2x \Rightarrow k^2y + k^2x = b^2x + c^2y - x^2y - y^2x$

$k^2 = \dfrac{b^2x+c^2y}{x+y} - \dfrac{xy(x+y)}{x+y}$, $k^2 = \dfrac{b^2x+c^2y}{x+y} - xy$ (*)

$\dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b} \Rightarrow c = \dfrac{xb}{y}$

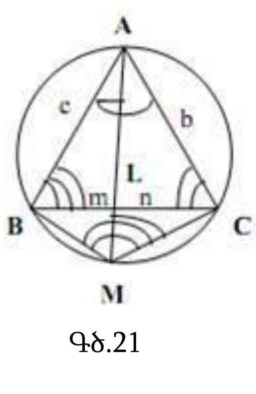
$$\frac{b^2x+c^2y}{x+y} = \frac{b^2x+\frac{b^2x^2y}{y^2}}{x+y} = \frac{b^2xy+b^2x^2}{y(x+y)} = \frac{b^2x(x+y)}{y(x+y)} = b\frac{bx}{y} = bc$$

Ստացված արժեքը տեղադրենք (*)-ում կստանանք՝ $k^2 = bc - xy$:

Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Թեորեմա 8: Թող a,b,c-ն եռանկյան կողմերն են , l_a -ն a կողմին տարված կիսորդը:

Ապա $l_a^2 = bc - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}$.



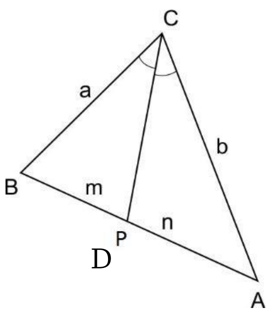
Գծ.21

Ապացույց: Թող m = BL, n = LC, k = LM. Ապա m · n = l · k $m = \dfrac{ac}{b+c}$, $n = \dfrac{ab}{b+c}$.

ABL և AMC եռանկյունների նմանությունից ունենք $\frac{l_a}{c} = \frac{b}{l_a + k}$. $l_a^2 = b \cdot c - l_a \cdot k$. Այստեղից

$l_a^2 = b \cdot c - m \cdot n$, $l_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$. Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմա 9: Կիսորդի երկարությունը նրա 2 կողմերով և նրանց կազմած անկյունով՝ $l = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$:



Գծ.22

Ապացույց: Ապացույցը տանք եռանկյան մակերեսի միջոցով:

$$S_{ABC} = \frac{2ab\sin\gamma}{2}$$

$$S_{ABC} = S_{BCD} + S_{DCA} = \frac{a\sin\frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{bl\sin\frac{\gamma}{2}}{2}$$

$$\frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{a\sin\frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{bl\sin\frac{\gamma}{2}}{2}$$

Հավասարությունը բազմապատկենք 2-ով,իսկ $\sin\gamma$ -ն փոխարինենք $2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$-ով: Եվ քանի որ $\sin\frac{\gamma}{2} \neq 0$,բաժանենք $\sin\frac{\gamma}{2}$-ի: Կստանանք՝

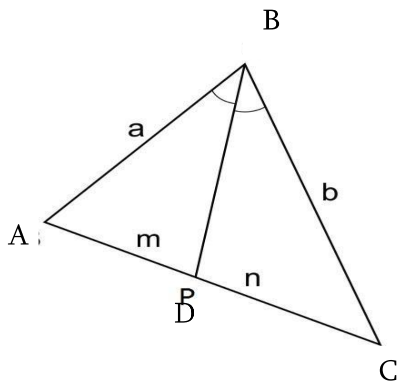
$$2ab\cos\frac{\gamma}{2} = l(a+b) \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: Ուղղանկյուն եռանկյան մեջ $\frac{\gamma}{2} = 45^0$, ինչի պատճառով ներքնաձիգին իջեցված կիսորդը $l = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$,որտեղ a և b-ն էջերն են:

Թեորեմա 10: Կիսորդի երկարությունը եռանկյան կողմերի միջոցով-

$$l = \frac{\sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)}}{a+b}$$



Գծ.23

Ապացույց: m-ը և n-ը արտահայտենք եռանկյան կողմերի միջոցով:Կստանանք

$$\begin{cases} m+n=c \\ \frac{a}{b}=\frac{m}{n} \end{cases}, \qquad n=\frac{bm}{a}, \quad m+\frac{bm}{a}=c$$

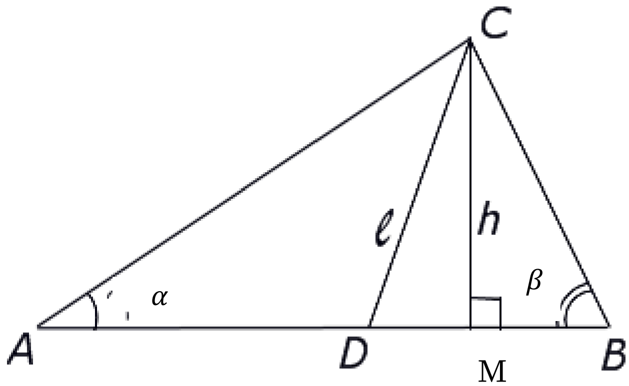
$$m\left(1+\frac{b}{a}\right)=c, \quad \frac{m(a+b)}{a}=c, \quad m=\frac{ca}{a+b}, \quad n=\frac{cb}{a+b}:$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով Թեորեմա 7-ի կիսորդի հաշվման բանաձևի մեջ կստանանք՝

$$l^2 = ab - mn = ab - \frac{c^2a}{(a+b)^2} = \frac{ab((a+b)^2-c^2)}{(a+b)^2},$$

$$l = \frac{\sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)}}{a+b} :$$ Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմա 11: Եռանկյան նույն գագաթից տարված բարձրության և կիսորդի կազմած անկյունը հավասար է $\frac{\beta-\alpha}{2}$:



Գծ.24

Ապացույց: Թող CM=h բարձրություն է, իսկ CD=l կիսորդը, որոնք տարված են նույն գագաթից: Գտնենք բարձրության և կիսորդի կազմած անկյունը:

$\Delta ABC-$ ում՝ $\angle BCD = \frac{180^0-(\alpha+\beta)}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^0 - \beta$:

$\Delta BCM-$ ում՝ $\angle M = 90^0$, $\angle BCM = \angle MCD = \angle BCD - \angle BCM =$

$$= 90^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - (90^0 - \beta) = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմա 12: Կիսորդի երկարությունը բարձրության միջոցով հավասար է՝

$$l = \frac{h}{cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Ապացույց: ΔCMD- ում՝ $\angle M = 90^0$, (Գծ. 24)

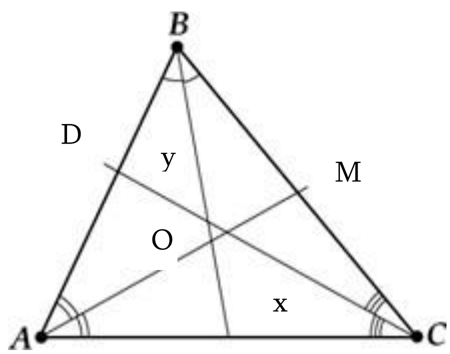
$$l = \frac{h}{cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

§4. Հարաբերություններ կապված կիսորդների հետ

1. Ինչ հարաբերությամբ են բաժանվում եռանկյան կիսորդները հատման կետով:

Ինչպես հայտնի է եռանկյան միջնագծերը հատման կետով բաժանվում են 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից: Գտնենք թե ինչ հարաբերությամբ են բաժանվում եռանկյան կիսորդները հատման կետով:



Գծ.25

Թող CD=x,OD=y:Գտնենք x/y հարաբերությունը:

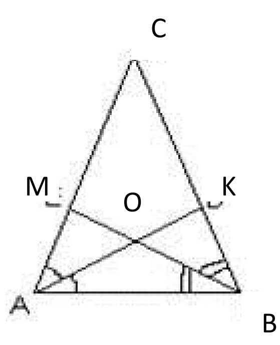
Եռանկյուն CDB-ից ըստ կիսորդի հատկության x/y=b/n: Ի նկատի ունենալով,որ n=bc/(a+b), կստանանք.

$$\frac{x}{y} = \frac{b(a+b)}{bc} = \frac{a+b}{c}$$

Ստացանք $\frac{x}{y} = \frac{a+b}{c}$ հարաբերությունը:

2. Գտնել եռանկյան կիսորդների կազմած անկյունը:

$$\angle BOA = 90^0 + \frac{\gamma}{2} \quad (Գծ.26)$$

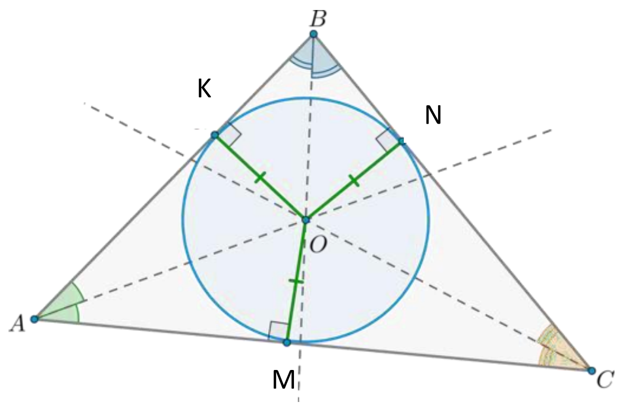


Գծ.26

ΔBOA-ից՝

$$\angle BOA = 180^0 - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = 180^0 - \frac{\alpha+\beta}{2} = 180^0 - \frac{180^0-\gamma}{2} = 180^0 - 90^0 + \frac{\gamma}{2} = 90^0 + \frac{\gamma}{2}$$

3․ Գտնել եռանկյան կողմերի և ներգծված եռանկյան շոշափողների հատվածների հարաբերությունը:



ΔABC-ին ներգծված է շրջանագիծ: Թող M,K,N - եռանկյանը ներգծված շրջանագծի և կողմերի հատման կետերն են (Գծ.27):

Մեկ գագաթից տարված շոշափողների հատկությունից կարող ենք գրել:

$$\begin{cases} x + y = b \\ y + z = a \\ x + z = c \end{cases}$$

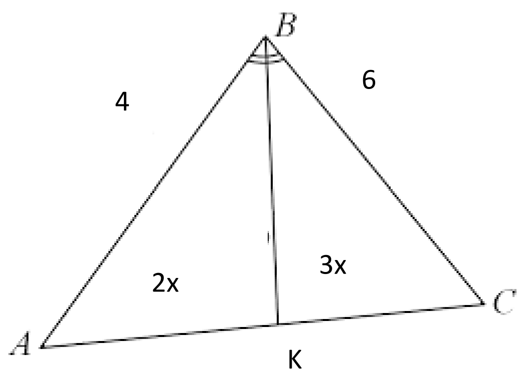
Որտեղից x+y+z=p ,որտեղ p-ն կիսապարագիծն է:

$$\begin{cases} z = p - b \\ x = p - a \\ y = p - c \end{cases}$$

Վերջին բանաձևերով շոշափողների հատվածները արտահայտվում են եռանկյան կողմերի միջոցով:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Խնդիր 1: Տրված է ABC եռանկյունը, որտեղ $\angle B = 30^0$: B անկյան կիսորդը AC կողմը հատում է D կետում: Որոշել ABC եռանկյան մակերեսը:



Գծ.28

Լուծում: Ըստ կիսորդի հատկության $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$

Թող AD=2x, DC=3x;

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot sinA = 4xsinA$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot sinA = 10xsinA$

Այստեղից

$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{2}{5}$, $S_{ABD} = \frac{2}{5} S_{ABC} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot sinABC\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{12}{5}$:

Պատ.` $\frac{12}{5}$:

Խնդիր 2: Եռանկյան կողմերն են 10սմ, 11սմ և 12սմ: Գտնել ինչ երկարությամբ հատվածների է կիսորդը տրոհում եռանկյան միջին գիծը:

Տրված է AC= 10սմ, BC=11սմ և AC=12սմ , AP-ն կիսորդ է, Գտնել CP և BP-ն:

Լուծում: Ըստ եռանկյան կիսորդի հատկության

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}, \quad \frac{12}{BP} = \frac{10}{CP}$$

Թող CP=x, ապա BP=11- x:

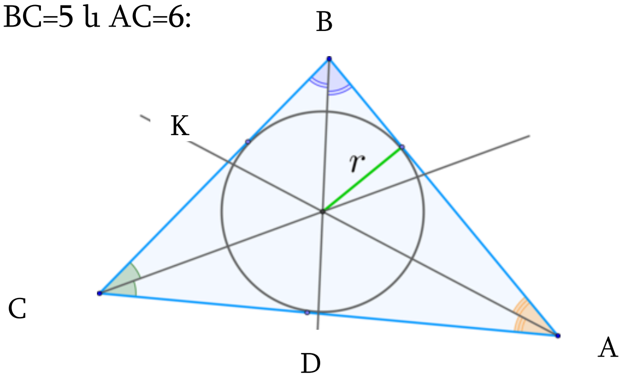
$$\frac{12}{11-x}=\frac{10}{x}$$

Որտեղից

$$12x=10(11-x)$$
$$x=5$$

Պատ.՝ 5սմ և 6սմ:

Խնդիր 3: Գտնել ABC եռանկյան B գագաթից տարված կիսորդը, և գտնել ինչ հարաբերությամբ է ներգծած շրջանագծի կենտրոնը բաժանում կիսորդը, եթե AB=4, BC=5 և AC=6:



Գծ.29

Թող BD–ն և AK-ն համապատասխանաբար B և A անկյունների կիսորդներն են, O-ն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը:

Քանի որ AB=4 և BC=5 , AD=4t , CD=5t, հետևաբար AC=6=4t+5t=9t, որտեղից t=$\frac{2}{3}$:

այդ դեպքում AD=$\frac{8}{3}$: $cos\angle A=\frac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot6\cdot4}=\frac{9}{16}$: $BD^2=4^2+(\frac{8}{3})^2-2\cdot4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{16}=\frac{100}{9}$: BD=$\frac{10}{3}$:

Վերջում BAD եռանկյան մեջ որոշենք կիսորդը, ինչ հարաբերությամբ է O կետը տրոհում հատվածը>

$$\frac{BO}{OD}=\frac{AB}{AD}=\frac{4}{8/_3}=\frac{3}{2}:$$

Պատ.՝ $\frac{10}{3}$ և $\frac{3}{2}$:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Այս աշխատանքում ցույց են տրված եռանկյան կիսորդի հիմնական հատկության ապացուցման տարբեր եղանակներ: Բերված են կիսորդի երկարության հաշվման տարբեր բանաձևեր, դիտարկված են խնդիրներ, որոնք եղել են միասնական քննություններում:

Աշխատանքում ստացել եմ այն հարաբերությունը, որով տրոհվում են կիսորդները՝ հատման կետով: Կիսորդի ապացուցված հատկությունների կիրառման միջոցով շատ խնդիրներ լուծվում են ավելի հեշտ:

Այս աշխատանքը կարող է ծառայել որպես նյութ ԲՈՒՀ-ի ընդունելության նախապատրաստվելու համար. ինչպես տեսական, այնպես էլ գործնական մասով:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Шарыгин Н.Ф. ''Учимся решать задачи по геометрии''-1989-№2.
2. Աթանասյան ‘Երկրաչափության’ դասագիրք:
3. Бисектриса треугольника (ինտերնետ ռեսուրս)ru.wikipedia.org/
4. Ինտերնետ ռեսուրս kvant.mccme.ru

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ

ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ.ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հերթական ատեստավորման ենթակա ուսուցիչների վերապատրաստման դասընթացներ

Մարգարիտ Անտոնյան

ԹԵՄԱ՝ Գործնական աշխատանքների արդյունավետությունը մաթեմատիկայի դասերին

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ Մելիս Սաքանյան

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

Բովանդակություն

Ներածություն

Ժամանակակից կրթական համակարգում տեղի ունեցող խոշոր փոփոխությունների, նոր ուսումնական փորձի և ծրագրերի ներդրման վերջնական նպատակն է բարենպաստ պայմանների ստեղծումը անձի զարգացման համար՝ հաշվի առնելով նրա հետաքրքրությունները և ընդունակությունները: Սկզբնական ընդհանուր կրթության աստիճանին մաթեմատիկան հանդիսանում է աշակերտների՝ ճանաչողական համընդհանուր գործունեության զարգացման հիմքը: Այդպիսի գործունեությունը ներառում է ընդհանուր ուսուցողական գործողություններ, տրամաբանական գործողություններ, խնդիրների առաջադրման և լուծման գործողություններ:Բացի յդ մաթեմատիկայի գործողություններ:Բացի այդ մաթեմատիկայի դասընթացն օժտված է մեծ զարգացնող պոտենցիալով:

Մաթեմատիկայի ուսուցման կիրառական ուղղվածությունն ապահովելու և կյանքի հետ կրթության բովանդակության կապը ցուցադրելու համար կանոր նշանակություն ունեն գործնական աշխատանքները: Անժխտելի է, որ ճանաչողության հիմքը պրակտիկան է: Գործնական աշխատանքների հիմնական նպատակն է զարգացնել սովորողների պատկերային ու տրամաբանական մտածողությունը, գիտելիքները տարբեր իրադրություններում կիրառելու կարողությունները: Գործնական աշխատանքների շնորհիվ ամրապնդվում է դասընթացի ուսումնկան նյութը: Ընդ որում կարևորվում է ոչ միայն բուն աշխատանքի կատարումը, այլև կատարած աշխատանքի և առանձին քայլերի պարզաբանումը, հիմնավորումը, մեկնաբանումը և ներկայացումը: Աշակերտը պետք է հասկանա, թե որքան կարևոր է ձեռք բերած տեսական գիտելիքները կյանքում հանդիպող առօրյա իրադրություններում կիրառել կարողանալը: Աշակերտների մեջ գործնական կարողության առկայությունը նրանց իսկ ուսումնառության հիմնական և գլխավոր ցուցանիշն է լինելու ողջ կյանքում: Շատ կարևոր է գործնական աշխատանքի դերը ոչ միայն որպես տեսական նյութի ամրապնդման միջոցի, այլև որպես սովորածը գործնականում կիրառելու հնարավորություն

ԳՈՐԾՆԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ԱՐԴՅՈՒՆԱՎԵՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴԱՍԵՐԻՆ

Ուսման բարենպաստ էմոցիոնալ մթնոլորտը պայմանավորվում է երկու կարևոր հանգամանքներով՝ ուսումնական գործունեության և աշակերտի շփումների որակի հետ:

Ներկայումս գոյություն ունեն բազմաթիվ մեթոդներ, որոնք հնարավորություն են տալիս ուսուցիչներին արդյունավետ կերպով ազդեցություն թողնել աշակերտների այս կամ այն ուսումնական որակների և հատկանիշների վրա: Օրինակ, համագործակցության սկզբունքների կիրառումը, խաղային միջոցները, ՏՀՏ միջոցների կիրառումը գործնական աշխատանքները,հարցադրումների մեթոդը և բազմաթիվ այլ միջոցներ: Տվյալ հետազոտական աշխատանքի նպատակն է ներկայացնել գործնական աշխատանքների արդյունավետությունը մաթեմատիկայի դասերին:

Գործնական աշխատանքները կարելի է կատարել ինչպես դասերի ժամանակ, այնպես էլ տնային առաջադրանքների միջոցով, էքսկուրսիաների, իրերի և նրանց մոդելների պատրաստումը, կենցաղային իրավիճակներում հաշվարկների կատարում, բնական որևէ երևույթի դիտում ու մեկնաբանում և այլն: Գործնական աշխատանքներն արդյունավետ իրականացնելու համար պետք է նախապատրաստական աշխատանք տարվի աշակերտների հետ, որպեսզի նրանք ոչ միայն իմանան տեսական այն նյութը, որի հիման վրա պետք է կատարեն գործնական աշխատանքը, այլև ծանոթ լինեն այն իրականացնելու հնարներին ու միջոցներին: Մաթեմատիկա և երկրաչափություն առարկաներում հանձնարարված գործնական աշխատանքները ներկայացնում եմ որպես նախագծային մեթոդ, դիդակտիկ նպատակին հասնելու մեթոդ, որը պետք է ավարտվի միանգամայն իրական, շոշափելի գործնական արդյունքով: այն սովորողների որոշակի գործողությունների հաջորդականությունների, հնարների համադրություն է, որոնք իրականացվում են տրված առաջադրանքը կատարելու նպատակով՝ յուրաքանչյուր սովորողի համար էական և որոշակի վերջնական արդյունքի տեսքով: Հետազոտման մեթոդի հիմնական նպատակն է սովորողներին տալ հնարավորություն գործնական խնդիրների կամ առաջադրանքների լուծման գործընթացում ինքնուրույն ձեռք բերել գիտելիքներ: Նախագծային մեթոդը հանդիսանում է հետազոտական, պրոբլեմային,

ստեղծագործական մեթոդների համադրություն: Մեթոդի հիմքում ընկած է սովորողի ճանաչողական հմտությունների, սեփական գիտելիքներն ինքնուրույն ձևակերպելու, տեղեկատվական կողմնորոշվելու, քննադատական և ստեղծագործական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումը:
Հետազոտումները կարող են լինել անհատական ու խմբային:

Ցանկացած հետազոտման հիմնական նպատակն է տարբեր կարողությունների ձևավորումը, որոնք ունեն առանձնահատկություններ: Գիտելիքների, հմտությունների, արժեքների փոխկապակցում, ինչպես նաև համապատասխան իրավիճակում կիրառելու պատրաստակամություն:
Հետազոտման մեթոդը ստեղծում է նպաստավոր պայմաններ հետևյալ կարողությունների ու հմտությունների ձևավորման ու զարգացման համար:

1. Որոնողական հետազոտական հմտություններ
2. Համագործակցային հմտություններ
3. Կառավարման կարողություններ, հմտություններ,
4. Ներկայացման հմտություններ:

Հետազոտման մեթոդը կարելի է առանձնացնել 5 փուլի՝

1. հիմնահարց
2. նախագծում
3. տեղեկատվության որոնում
4. նախապատրաստում
5. պրեզենտացիա

1- ին փուլ

Հիմնահարց - Ուսուցիչը ներկայացնում է նախագծի թեման առաջարկում է նախագծի հիմնական պրոբլեմը, ձևակերպում նպատակներն ու խնդիրները: Աշակերտները իրականացնում են պրոբլեմի ընկալումը, իրադրության մեջ հարմարվելը, կոնկրետացնում նպատակներն ու խնդիրները:

2- րդ փուլ

Նախագծում - Ուսուցիչը կազմակերպում է նախագծի գործունեությունը, առաջարկում է կազմավորել խմբեր, բաշխել աշակերտների դերերը խմբերում,պլանավորել նախագծի գործունեությունը և պրեզենտացիայի հնարավոր ձևերը: Աշակերտները իրականացնում են խմբերի բաժանումը, բաշխում են դերերը խմբում, պլանավորում աշխատանքը, ընտրում արդյունքների և պրեզենտացիայի ձևերն ու եղանակները:

3- րդ փուլ

Տեղեկատվության որոնում - Ուսուցիչը տեղեկատվության որոնման գործին չի մասնակցում: Նա խորհրդատվություն է տրամադրում, հսկում է խմբերի աշխատանքը, տալիս նոր գիտելիք, կատարում պրեզենտացիայի փորձեր:Աշակերտներն աշխատում են ինքնուրույն, ակտիվ,յուրաքանչյուրն իր դերով, խրհրդակցում են իրար հետ, որոնում և նախապատրաստում են նյութեր պրեզենտացիայի համար:

4- րդ փուլ

Նախապատրաստում -Ուսուցիչը կատարում է դիտումներ, անհրաժեշտության դեպքում աշակերտներին խորհուրդներ է տալիս, նախապատրաստում է նախագծի պաշտպանությանը: Աշակերտները կատարում են հետազոտություններ, վերլուծում են տեղեկությունները, աշխատում նախագծի վրա, փորձեր են անում,պատրաստվում նախագծի պաշտպանությանը:

5- րդ փուլ

Պրեզենտացիա - Ուսուցիչը լսում է, աշակերտներին հարցեր է ուղղում, անհրաժեշտության դեպքում ուղղորդում է, գնահատում է նրանց կատարած աշխատանքի որակը:

Աշակերտները ներկայացնում են ուսումնական նախագիծը, մասնակցում են խմբային վերլուծությանը, արդյունքների գնահատմանը:

Հետազոտական մեթոդը համարվում է ամենահաճախակի կիրառվող ժամանակակից մանկավարժական տեխնոլոգիաներից մեկը: Ուսուցման այս եղանակը հնարավորություն է տալիս աշակերտին ինքնուրույնաբար սովորելու ստեղծագործելու, դրսևորվելու, հետազոտություն կատարելու հմտություններ:Նախագծերը կարող են լինել անհատական, խմբային, թիմային: Խմբային և թիմային նախագծերի իրականացման ժամանակ ուսուցիչը բաշխում է պարտականությունները աշակերտների միջև և սահմանում յուրաքանչյուրի պատասխանատվությունը՝ ընդհանուր առմամբ նախագիծը կատարելու համար: Թիմային և խմբային նախագծի ընդհանուր գնահատական ձևավորվում է կատարողներից յուրաքանչյուրի գնահատականի ամփոփման վրա:Անհատական նախագծերն ընտրում են աշակերտները և հետազոտությունները կատարում կա՛մ ինքնուրույնաբար, կա՛մ ուսուցչի հետ համատեղ:Այս մեթոդը դիտարկվում է որպես աշակերտակենտրոն ուսուցման մի տարբերակ, որն էապես բարձրացնում է ուսուցման արդյունավետությունը և աշակերտների մոտիվացվածությունը: Գործնական առաջադրանքները կարող են լինելուսուցողական բնույթի որոնք կոչված են նպաստելոււ հենց դասի ընթացքումտեսական նյութի յուրացմանը: Դրանք առաջադրվում են դասարանի բոլորաշակերտներին և ուսուցչի կողմից պարտադիր ուղղորդման կարիք են զգում: Դրանքգնահատման ենթակա չեն.

- հաշվել պատկերի մակերեսը
- ստուգել հավասա՞ր են արդյոք, պատկերների մակերեսները:

Գործնական առաջադրանքները կարող են լինել տեսական գիտելիքը հիմնավորող և ամրապնդող: Այս խմբի մեջ կարելի է դասել բոլոր այն առաջադրանքները, որոնք կարող են նպաստել այս կամ այն տեսակի հմտության ձևավորմանը: 5-ից 6-րդ դասարաններում փորձում ենք իրականացնել ավելի պարզ տեսակի աշխատանքներ և աստիճանաբար անցում կատարել դեպի բարդերը:

Թվերի կիրառությունը առօրյայում.

Հետազոտական աշխատանքը կարելի է կազմակերպել որպես թեմատիկ խմբային աշխատանք՝ «Թվերն առօրյայում» խորագրով:

Դասարանը բաժանվում է 5 խմբի և յուրաքանչյուր խմբի առաջարկվում է որևէ թեմա (նախապես որոշ տվյալների շուրջ տեղեկություններ ստանալը կարելի է առաջարկել որպես տնային աշխատանք):

Թեմայի օրինակներ.

- թվերն առևտրում
- թվերը մոտավոր հաշվարկներում
- թվերը ընտանիքի կոմունալ ծախսերում
- թվերը դպրոցական ուսումնական տարվա նախապատրաստվելու համար անհրաժեշտ գնումներ կատարելիս (գրենական պիտույքներ, դասագրքեր և այլ անհրաժեշտ պարագաներ):

Հետազոտական բնույթի գործնական առաջադրանքները պահանջում են ինքնուրույն հետազոտության իրականացում, երևույթների կամ օբյեկտների հատկությունների, օրինաչափությունների, փոխադարձ կապերի բացահայտում և մաթեմատիկական հիմնավորում:

Շրջանագիծ և շրջան թեմային վերաբերող պարզագույն գործնական աշխատանք կարկինով և քանոնով:

Հանձնարարվում է կարկինով գծել ենթադրենք 5 սմ, 8 սմ, 10 սմ, 12 սմ, 6 սմ շառավիղներով շրջանագծեր և մկրատով առանձնացնել շրջանները, այնուհետև առաջարկվում է փոխանակել շրջանները (ցանկալի է կազմակերպել որպես խմբային աշխատանք) ու գտնել դրանց շառավիղներն ու գրանցել արդյունքը այսպիսի պարզ գործնական աշխատանքը գնահատման ենթակա չէ, բայց սովորողները կարող են հավաքել կուտակային միավորներ, որոնց շնորհիվ կարող են հաջորդ գործնական պարապմունքներին գնահատվել:

Հաջորդ գործնական աշխատանքը նախատեսված է կազմակերպել թեմայի դասավանդման ավարտին:

Ուղղանկյունաձև թուղթը ծալում են երկու առանցքների ուղղությամբ և ծալված մասերից մեկը ներկում որևէ գույնով: Այդ աշխատանքը կատարելուց հետո պատասխանում են ուսուցչի տրված հարցերին.

- ուղղանկյան ո՞ր մասն է ներկված
- ո՞ր մասն է մնացել չներկված :

Շրջանաձև թխվածքը երկու փոխուղղահայաց առանցքների օգնությամբ բաժանում են չորս հավասար մասերի և պատասխանում ուսուցչի հարցերին:

1. Քանի՞ մասի է բաժանվել թխվածքը:

2. Ո՞ր մասն է իմ ձեռքում (մասերը փոփոխել)

3. Գրառել արդյունքները տետրում:

4. Քանի՞ մասի պետք է բաժանել թխվածքը, որպեսզի յուրաքանչյուրին (թիվը փոփոխել) տրվի մեկ կտոր, երկու կտոր:

 Ուղղանկյունաձև թղթի վրա կարկինի հնարավոր ամենամեծ բացվածքով գծում են շրջանագիծ: Այն առանձնացնելուց հետո ուսուցիչը հանձնարարում է նախորդ օրինակի նմանությամբ անջատել առանձնացված շրջանի 1/4 մասը, տարբեր այլ մասերը և արդյունքները գրառել:

 Չափում են ուղղանկյունաձև թղթի երկարությունը և լայնությունը՝ արտահայտված բնական թվերով, հաշվում են մակերեսը:Ուսուցիչը պահանջում է ուղղանկյունաձև թղթից անջատել ուղղանկյուն, որի մակերեսը հավասար է ուղղանկյան մակերեսի 1/2 - ին, 3[1]4- ին : Կատարված աշխատանքի արդյունքները ստուգել չափումների միջոցով[2]

Ռ.Ս.Խաչատրյան, <Գործնական աշխատանքներ>, Զանգակ 2009, էջ 15-19

2

Անհրաժեշտ պարագաներ.

Բարակ ստվարաթուղթ (ցանկալի է տարբեր գույների), մկրատ, կպչուն ժապավեն) :

Ուսուցիչը հանձնարարում է խմբերին ստվարաթղթից առանձնացնել երեք-ական հավասար ուղղանկյուն կամ քառակուսի:

Ենթադրենք պետք է գումարել 1/3 և 1/2 կոտորակները: Երեք քառակուսիներից մեկը կտրատում ենք երկու, իսկ մյուսը՝ երեք մասի, երրորդ քառակուսին մատիտով բաժանում ենք վեց հավասար մասի: Առաջին քառակուսու 1/2 մասը և երկրորդի 1/3 մասը տեղադրում ենք երրորդ քառակուսու վրա և համոզվում, որ գումարը իրոք, հավասար է 5/6 : Քառակուսին և ուղղանկյունն ավելի հարմար են տարբեր հայտարարներով կոտորակները գումարելու համար, քանի որ դրանք հեշտ է տրոհել այդ կոտորակների հայտարարներին հավասար մասերի: Արդյունքում կարելի է գումարել օրինակ 3/4 և 5/6 կոտորակները (այդ դեպքում առաջին քառակուսուց կարելի է առանձնացնել 3/4 մասը, երկրորդից՝ 5/6 մասը , իսկ երրորդը տրոհել 12 հավասար մասերի):

Այս գործնական աշխատանքի ավելի դժվար տարբերակ կարող է համարվել այն դեպքը, երբ սովորողը նախ կատարում է կոտորակների գոմարում՝ այնուհետև գործնական աշխատանքով համոզվում կատարվածի ճշտության մեջ: Որպես ընդլայնված գործնական աշխատանք կարելի է համարել այս երկու տեսակների համադրումը: Երկու փուլերի արդյունքում սովորողներին կարելի է գնահատել 10 միավորային համակարգով:

Երկրաչափությունը հազարամյակների պատմություն ունի և այն որոշակի տեղեկություններ է կրում մարդկային մտքի ու մշակույթի պատմությանն մասին; Երկրաչափությունը ծագել է գործնական ու կիրառական խնդիրներից,իսկ այնուհետև աստիճանաբար ընդլայնել է կիրառության ոլորտները;
Որպես հետազոտական աշխատանք ընտրել երկրաչափական տարբեր պատկերներ

Ցանկալի է հանրահայտ կոնստրուկցիաների մոդելներ (օրինակ՝ Էյֆելյան աշտարակը , հայկական մշակույթի մանրակերտեր կամ դրանց նկարները, ազգային ճարտարապետության նկարագրով դպրոցական շենքը նույնպես կարող է ծառայել որպես ուսումնասիրման օբյեկտ) :

Ընթացքը.

Նախնական զրույց՝ տարբեր կոթողներում, արվեստի ստեղծագործություններում երկրաչափական պատկերների կիրառման և երկրաչափական բնույթի օրինաչափությունների պահպանման մասին:

Բոլոր ժամանակներում մարդիկ ձգտել են որոնել ներդաշնակը և կատարյալը: Հետաքրքրող հարցերից մեկը վերաբերում էր ամբողջի և նրա մասերի փոխհարաբերությանը. Ինչպիսի մասերի հատել ամբողջը, որպեսզի նրանց հարաբերությունն ընկալվի որպես գեղեցիկ: Խնդրի լուծումը ավելի հին պատմություն ունի և այն կապվում է Պյութագորասի անվան հետ: Հավանաբար առաջին անգամ հենց նա է բացահայտել, որ ամբողջի երկու անհավասար մասերի հատումը կլինի կատարյալ, եթե փոքր ու մեծ մասերը հարաբերեն այնպես, ինչպես մեծ մասն ու ամբողջը: Ամբողջ այդպիսի հատումը կոչվել է ներդաշնակ համամասնությամբ հատում: Ներդաշնակ համամասնության նկատմամբ մեծ հետաքրքրություն է ցուցաբերվել հատկապես վերածննդի դարաշրջանում (15-ից 17-րդ դարեր) Իտալացի մաթեմատիկոս՝ վանական Լյուկա Պաչոլին (1445 մոտ 1514 թթ.) մարդու ընկալման վրա ներդաշնակ համամասնությամբ հատումի թողած ազդեցությունը բնութագրում էայսպիսի բառերով՝ էական, անասելի , սքանչելի, անբացատրելի, անհանգչելի ,գերազանց, վեհացնող և անհասանելի: Վերածննդի դարաշրջանի արվեստի մեծագույն վարպետ, գիտնական ու գյուտարար Լեոնարդո Դա Վինչին (1452-1519թթ.) ներդաշնակ համամասնությամբ հատումն անվանել է ոսկե հատում:

Շատ կարևոր է անդրադառնալ նախագծի (ընտրված թեմայի) վերաբերյալ պատմակամ տեղեկություններին, ցույց տալ պատմության և արդիականությանկապը: Ոսկե հատումի բազմաթիվ օրինակներ կան մեզ շրջապատող բնության մեջ:Ուագրավ է այն փաստը,որ ոսկե հատումի համամասնությունն ընկած է նաև հենց մարդու մարմնի կազմության մեջ, և դեռևս անտիկ աշխարհում քանդակագործներն իրենց ստեղծագործություններում դա հաշվի են առել:Դասարանում սրվում է խմբային աշխատանք: Նկարի վրա պատկերված են մարդու մարմնի և գլխի տարբեր մասերի հարաբերություններն ըստ ոսկե հատումի:Ուսումնասիրել նկարը և փորձել ոսկե հատումով մի քանի համամասնություններ արտահայտել բառերով[3]

[3] Ռ.Է.Հակոբյան, <Երկրաչափություն10 > դասագիրք, Տիգրան մեծ 2009, էջ 42

Առանձին քննարկման թեմա է եռանկյուն պատկերը

Ուսուցիչը նախ անդրադառնում է եռանկյան կարևոր հատկությանը՝ այն կոշտ պատկեր է, իսկ մնացած բազմանկյունները կոշտ չեն, դա նշանակում է, որ եռանկյան ձևը կարելի է փոխել կոտրելով միայն նրա կողմերը: Մնացած բազմանկյուններն այդպիսին չեն, օրինակ՝ կարելի է պահպանելով քառանկյան կողմերի երկարությունները փոխել նրա տեսքը: Սովորողները կարող են մետաղալարով պատրաստել որևէ քառանկյուն և ստանալ այդ քառանկյան տարբեր տեսքեր, պահպանելով կողմերի երկարությունները: Այս նախապատրաստական զրույցից հետո ուսուցիչը տեղեկացնում է, որ եռանկյունաձև խորաքանդակներ, զարդաքանդակներ, զարդանախշեր հաճախ կարելի է հանդիպել տարբեր կոթողներում, իսկ հայտնի Էյֆելյան աշտարակի կոնստրուկցիայում դա կառուցվածքի հիմնական բաղադրիչներից մեկն է: Այս նախագծային աշխատանքը կարելի է կիրառել նաև էքսկուրսիաների միջոցով:

Դասարանում որպես դործնական աշխատանքի ձև, կարելի է ընտրել խմբային աշխատանքը.

Աշակերտները բաժանվում են խմբերի ,տրվում է առաջադրանքը՝լուցկու հատիկներով պետք է կազմել եռանկյուններ,յուրաքանրուր կողմը մեկ հատիկ:Առավելագույնը քանի եռանկյուն կարող են ստանալ օգտագործելով լուցկու 6 հատիկ,12 հատիկ,24 հատիկ[4]

[4] Ա.Է.Հակոբյան,<Երկրաչափություն 10> դասագիրք՝ Տիգրան մեծ՝2009,էջ36

Եզրակացություն

Հետազոտական մեթոդն ունի մի շարք առավելություններ: Այն սովորողների մոտ ավելի լավ է զարգացնում հետազոտական հմտությունները, իրականացվում է տեղեկատվության ինքնուրույն փնտրում: Այս մեթոդով աշխատելիս զարգանում են նաև այնպիսի կարողություններ, ինչպիսիք են ինքնագնահատման կարողությունը, փոխօգնության պատրաստակամությունը, բանավիճելու ունակությունը, սեփական կարծիք արտահայտելու հաստատակամությունն ու խոսքի ձևավորումը: Այն թույլ է տալիս նաև նախագծի կատարման մի քանի հնարավոր տարբերակներից առանձնացնել ամենաօպտիմալը, կատարել դրա հիմնավորումը: Հետազոտությունը կարող է բարելավել մարդկանց կենսապայմանը: Աշակերտին պետք է հասանելի դարձնել գործնական աշխատանքի կարևորության կիրառումը կյանքում: Գործնական աշխատանքները կազմակերպելիս չպետք է անտեսել աշակերտի անձնական փորձը: Մաթեմատիկայի գործնական աշխատանքները կարելի է հանձնարարել ինչպես թեմայի ուսուցումը սկսելուց առաջ, այնպես էլ ուսուցումը ավարտելուց հետո: Գործնական աշխատանքները նպաստում են ինքնուրուրույն հանգել հետևություններին:Ինչպես ասել է Լոբաչևսկին <Մաթեմատիկա պետք է դպրոցներում սովորեցնել նաև,այն նպատակով, որպեսզի տրված գիտելիքները բավարար լինեն կյանքի ցանկացաց պահանջմունքներում>:

Գրականություն

1. Ռ.Ս.Խաչատրյան, Գործնական աշխատանքներ , Զանգակ 2009թ.

2. Ս.Է. Հակոբյան, Երկրաչափություն 10-րդ դասարանի դասագիրք՝ Տիգրան մեծ՝ 2009թ:

3. Գործնական աշխատանքների անցկացումը և գնահատումը. www.aniedu.am. :

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հերթական ատեստավորման ենթակա ուսուցիչների վերապատրաստման դասընթացներ

ՆՈՐԱՅՐ ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Հետազոտական աշխատանք

Ղեկավար՝ Մելս Սաքանյան

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Բազմիցս հարկ է լինում առնչվել հանրահաշվական և տրանսցենդենտ հավասարումների արմատները գտնելու խնդրի հետ: Օրինակ, լույսի դիֆրակցիայի տեսության մեջ հաճախ է հանդիպում

$$x - \operatorname{tg} x = 0$$

հավասարումը: Մոլորակային ուղեծրերի հաշվարկի ժամանակ առաջանում է

$$x - \alpha \sin x = b$$

Կեպլերի հավասարման արմատների որոշման խնդիրը՝ a և b պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում:

Հազվադեպ է հաջողվում գտնել հավասարման արմատների ճշգրիտ արժեքները: Բացի դրանից, երբեմն հավասարումները պարունակում են պարամետրեր, որոնք տրված են լինում մոտավորապես: Այդ դեպքում հավասարման արմատների ճշգրիր որոշման խնդիրը դառնում է անիմաստ, ուստի, կարևոր նշանակություն են ստանում հավասարման արմատները գտնելու մոտավոր մեթոդները:

Դիտարկենք

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

ընդհանուր տեսքով տրված հավասարումը: Գիտենք, որ նշված հավասարման արմատ է կոչվում այն r թիվը, որի համար $f(r) = 0$:

Ենթադրենք, որ $f(x) = 0$ հավասարումն ունի միայն մեկուսացված արմատներ, այսինքն՝ յուրաքանչյուր արմատի համար գոյություն ունի շրջակայք, որն այդ հավասարման այլ արմատներ չի պարունակում: Որպես կանոն, (1) հավասարման մեկուսացված իրական արմատների մոտավոր հաշվումը բաղկացած է երկու փուլերից.

- արմատների տեղայնացումը, այսինքն՝ հավասարման միմիայն մեկ արմատ պարունակող հնարավորին չափ փոքր միջակայքերի որոշումը
- արմատների ճշգրտումը, այսինքն՝ դրանց հաշվումը տրված ճշգրտությամբ:

§ 1. ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՏԵՂԱՅՆԱՑՈՒՄԸ

Արմատների տեղայնացման համար հաճախ օգտվում են Բոլցանո-Կոշի թեորեմից.

Թեորեմ 1.1 : Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում և ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, այսինքն՝ $f(a)f(b) < 0$, ապա (a,b) միջակայքում գոյություն ունի $f(x) = 0$ հավասարման արմատ: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան (a,b) միջակայքում մոնոտոն է, ապա այդ արմատը կլինի միակը:

Սովորաբար արմատների տեղայնացման ընթացքը սկսվում է $[a,b]$ հատվածի ծայրակետերում $f(x)$ ֆունկցիայի նշանների որոշումից: Այնուհետև որոշվում են $f(x)$ ֆունկցիայի նշանները մի շարք c_1, c_2 … միջանկյալ կետերում, որոնք ընտրվում են ինչ-որ սկզբունքով: Եթե $f(c_k)f(c_{k+1}) < 0$, ապա, համաձայն Բոլցանո-Կոշի թեորեմի, (c_k, c_{k+1}) միջակայքում գոյություն ունի (1) հավասարման արմատ: Հարկ է պարզել այդ արմատը միակն է, թե ոչ:

Օրինակ 1.1: Տեղայնացնել

$$f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0 \tag{1.1}$$

հավասարման արմատները: Դրա համար կազմենք աղյուսակ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-	+	+	+	-	-	+

Քանի որ (1.1) հավասարումը չի կարող ունենալ երեքից ավելի իրական արմատներ, ապա այդ արմատներն ընկած են (-3, -2), (0, 1), և (2, 3) միջակայքերում:

Եթե $f'(x)$ ֆունկցիայի զրոները կարելի է հեշտությամբ գտնել, ապա նմանապես կարելի է նաև կարգավորել $f(x) = 0$ հավասարման արմատների տեղայնացման ընթացքը: Դրա համար բավական է որոշել $f(x)$ ֆունկցիայի նշանները միջակայքի ծայրակետերում և այն կետերում, որոնցում նրա ածանցյալը հավասար է զրոյի:

Օրինակ 1.2 : Տեղայնացնել

$$f(x) \equiv x^4 - 4x - 1 = 0 \tag{1.2}$$

հավասարման արմատները:

Քանի որ $f'(x) = 4(x^3 - 1)$, ապա $f(x) = 0$, երբ $x = 1$: Կազմենք հետևյալ աղյուսակը.

x	-1	1	2
$f(x)$	+	-	+

Սրանից հետևում է, որ $f(x) \equiv x^4 - 4x - 1 = 0$ հավասարումն |ունի միայն երկու իրական արմատներ, որոնցից մեկը գտնվում է (-1, 1), մյուսը՝ (1, 2) միջակայքում:

§ 2. ՆՅՈՒՏՈՆԻ ՄԵԹՈԴԻ ԱՐՏԱԾՈՒՄԸ

Ոչ գծային հավասարումների լուծման առավել տարածված մեթոդներից է Նյուտոնի մեթոդը:

Դիտարկենք

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

հավասարման r տեղայնացված արմատի բավականաչափ փոքր շրջակայք: Ենթադրենք, որ այդ շրջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան երկու անգամ անընդհատ ածանցելի է: Դիցուք ξ-ն r արմատի ինչ-որ մոտարկումն է նշված շրջակայքից և $h \equiv r - \xi$: Ըստ Թեյլորի բանաձևի՝ ունենք

$$0 = f(r) = f(\xi + h) = f(\xi) + hf'(\xi) + \frac{h^2}{2} f''(\alpha)\ ,$$

որտեղ $\alpha = \xi + \theta h$, $0 < \theta < 1$: Մի կողմ դնելով բանաձևի $0(h^2)$ անդամը կստանանք

$$f(\xi) + hf'(\xi)\ \approx 0$$

մոտավոր հավասարություն: Եթե $f'(\xi) \neq 0$, ապա

$$h \approx -\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$$

կամ

$$r \approx \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}\ :$$

Վերջինս նշանակում է, որ

$$\eta = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$$

մեծությունը կարելի է դիտարկել որպես որոնելի արմատի նոր մոտարկում:

Կատարված վերլուծության հիման վրա կառուցենք հետևյալ եղանակը. ընտրենք ինչ-որ x_0 սկզբնական մոտարկում, որից հետո հաջորդ մոտարկումները հաշվենք

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

բանաձևով: Հենց այս եղանակն էլ հայտնի է որպես Նյուտոնի մեթոդ կամ Նյուտոն-Ռաֆսոնի մեթոդ:

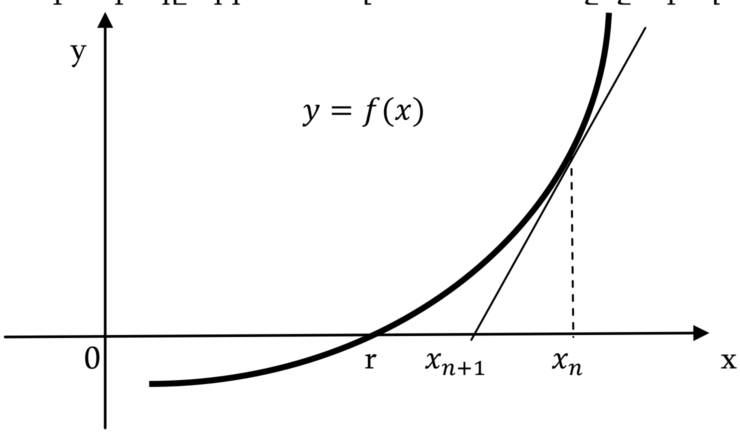
Այս մեթոդը կարելի է մեկնաբանել նաև երկրաչափորեն: Տանենք $(x_n, f(x_n))$ կետով անցնող $y = f(x)$ կորի շոշափողը և գտնենք այդ շոշափողի O_x առանցքի հետ հատման կետի աբցիսը (նկ. 2.1): Շոշափողի հավասարումն է՝

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)\ :$$

Այստեղից, հավասարեցնելով y-ը 0-ի, կստանանք

$$(x_{n+1} =) \quad x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ :$$

Այդ պատճառով Նյուտոնի մեթոդը երբեմն անվանում են նաև շոշափողների մեթոդ:

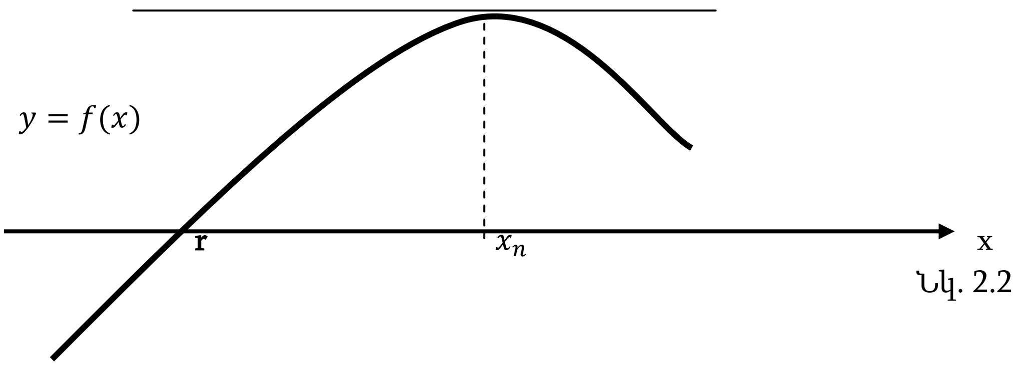


Նկ.2.1

Դիտողություն 2.1: Դժվար չէ նկատել, որ Նյուտոնի մեթոդը ըստ էության պարզ ինտերացիայի մեթոդի մի տարբերակ է, որտեղ

$$g(x) = x - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ :$$

Նյուտոնի մեթոդի օգտագործման ժամանակ կարող են ի հայտ գալ ինտերացիաների վատ վարքի տարբեր դեպքեր, ինչը կարող ենք պատկերել ֆունկցիաների տեսքով, օրինակ.



Նկ. 2.2

§ 3. ՆՅՈՒՏՈՆԻ ՄԵԹՈԴԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Քննարկենք այն դեպքը, երբ r-ը $f(x) = 0$ հավասարման պարզ արմատն է, այսինքն՝

$$f(r) = 0 \neq f'(r) \; : \tag{3.1}$$

Ենթադրենք՝ $f''(x)$ երկրորդ ածանցյալն անընդհատ է արմատի դիտարկվող շրջակայքում: Մեթոդի n-րդ քայլի սխալանքը նշանակենք e_n –ով՝ $e_n \equiv r - x_n$ ։

Հիմնվելով (2.2) բանաձևի վրա կստանանք՝

$$e_{n+1} = r - x_{n+1} = r - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(x_n)e_n + f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.2}$$

Բոլոր $n = 0, 1, 2, \ldots$ արժեքների համար: Թեյլորի բանաձևի համաձայն.

$$0 = f(r) = f(x_n| + e_n) = f(x_n) + f'(x_n)e_n + \frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2$$

որտեղ $\xi_n = x_n + \theta e_n$, $0 < \theta < 1$ ։ Ուստի

$$f'(x_n)e_n + f(x_n) = -\frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2 \; :$$

Հաշվի առնելով վերջին հավասարությունը՝ $e_{n+1} = r - x_{n+1} = r - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$ $= e_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(x_n)e_n + f(x_n)}{f'(x_n)}$ հավասարությունից կստանանք

$$e_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

առնչությունը: Ենթադրելով, որ x_n -ը գտնվում է որոնելի արմատի բավականաչափ փոքր շրջակայքում, կստանանք հետևյալը.

$$e_{n+1} \approx Ce_n^2\,, \quad \text{որտեղ } C \equiv -\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)} \;:$$

(3.4)

Այսպիսով, եթե մեթոդը զուգամետ է, ապա զուգամիտության կարգը հավասար է երկուսի:

Գնահատենք Նյուտոնի մեթոդում $\varepsilon > 0$ ճշտությամբ արմատի մոտավոր արժեքը ստանալու համար պահանջվող քայլերի քանակը: Դրա համար օգտվենք

$$|r - x_{n+1}| \le C_1|r - x_n|^2\,, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

(3.5)

բանաձևից, որտեղ $C_1 = const > 0$ ։ Նշված հավասարությունից հետևում է

$$|r - x_n| \le C_1^{2^n - 1}|r - x_0|^{2^n}$$

գնահատականը: Պահանջելով

$$C_1^{2^n - 1}|r - x_0|^{2^n} < \varepsilon\,,$$

կստանանք՝

$$n > \log_2\left(C^* \ln\frac{1}{C_1\varepsilon}\right)\,,$$

որտեղ $C^* \equiv -1/\ln(C_1\,|r - x\_0\,|)$ ։ Սա նշանակում է, որ ասիմպտոտորեն, երբ $\varepsilon \to 0$, Նյուտոնի մեթոդում քայլերի քանակը ավելի քիչ է պարզ իտերացիայի մեթոդում կատարվող քայլերի քանակից: Փաստորեն Նյուտոնի մեթոդը պարզ իտերացիայի մեթոդ է $x = g(x)$ հավասարման համար, որտեղ $g(x)$ ֆունկցիան որոշվում է

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

բանաձևով: Քանի որ $g'(r) = 0$ և $g''(r) = f''(r)/f'(r)$, ապա Նյուտոնի մեթոդի քառակուսային զուգամիտությունը պարզ արմատի դեպքում հետևում է նաև

$$g^{(k)}(r) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, s-1, \qquad g^{(s)}(r) \neq 0$$

բանաձևի պայմաններից:

Եթե r-ը $f(x) = 0$ հավասարման պատիկ արմատ է, այսինքն՝

$$f(r) = f'(r) = 0 \neq f''(r)\,, \tag{3.6}$$

ապա Նյուտոնի մեթոդի զուգամիտությունը գծային է: Իսկապես, եթե մենք ստացել ենք

$$e_{n+1} = e_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.7}$$

առնչությունը (3.2) և Թեյլորի բանաձևից ունենք

$$f(x_n) = f(r - e_n) = f(r) - f'(r)e_n + \frac{f''(r - \theta_1 e_n)}{2} e_n^2 \qquad (0 < \theta_1 < 1)$$

և

$$f'(x_n) = f'(r - e_n) = f'(r) - f''(r - \theta_2 e_n)e_n \qquad (0 < \theta_2 < 1)\,,$$

որտեղից էլ՝

$$f(x_n) \approx \frac{f''(r)}{2} e_n^2\,, \qquad f(x_n) \approx -f''(r)e_n\,,$$

ստացված առնչությունները տեղադրելով (3.7)-ում՝ կստանանք

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2} e_n \ :$$

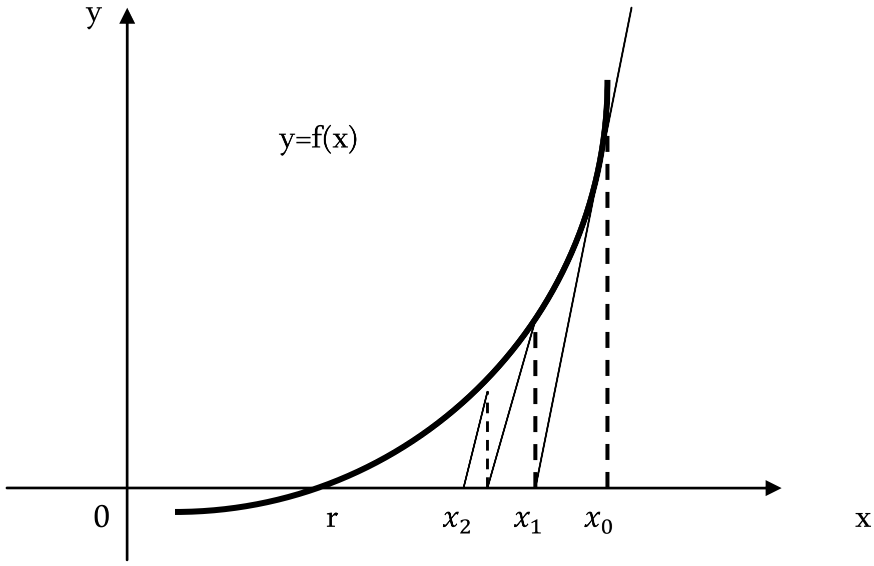
Ինչպես հետևում է վերոշարադրյալից, Նյուտոնի մեթոդը զուգամիտում է, եթե x_0 սկզբնական մոտարկումը ընտրված է բավականաչափ մոտ որոնելի արմատին:

§ 4. ՆՅՈՒՏՈՆԻ ՄԵԹՈԴԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

Եթե $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ բանաձևում $f'(x_n)$-ը փոխարինենք $f'(x_0)$-ով, ապա կստանանք այլ մեթոդ՝

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} , \qquad n = 0, 1, 2, \dots:$$

(4.1)



Նկ. 4.1 Նյուտոնի մեթոդի հաստատուն ածանցյալով տարբերակը

Երկրաչափորեն սա նշանակում է, որ $y = f(x)$ գրաֆիկին $(x_n, f(x_n))$ կետերում տարված շոշափողները փոխարինվում են $(x_0, f(x_0))$ կետով տարված շոշափողին զուգահեռ ուղիղներով(նկ. 4.1):

Նյուտոնի մեթոդը պատկանում է պարամետրերից կախված և քառակուսային զուգամիտություն ունեցող իտերացիոն մեթոդների ընտանիքի: Նշված պարամետրի ընտրության շնորհիվ կարելի է ոչ միայն զգալի չափով արագացնել մեթոդի զուգամիտությունը, այլև, որոշ դեպքերում, ընդլայնել սկզբնական մոտարկման ընտրության միջակայքը:

Դիտարկենք

$$f(x) = 0$$

(4.2)

հավասարումը: Մենք գիտենք, որ Նյուտոնի մեթոդն ըստ էության

$$x_{n+1} = g(x_n), \;\; n = 0, 1, \ldots$$

(4.3)

պարզ ինտերացիայի մեթոդ է, որտեղ

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \; :$$

(4.4)

Նյուտոնի մեթոդի յուրաքանչյուր քայլում հաշվվում են f ֆունկցիայի և դրա ածանցյալի արժեքները: Էապես չմեծացնելով հաշվողական աշխատանքի ծավալը, կարող ենք դիտարկել ավելի ընդհանուր ինտերացիոն մեթոդ՝ $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, որտեղ (3.3) ֆունկցիայի փոխարեն վերցվում է

$$g(x) = x - \frac{af(x) + bf'(x)}{cf(x)+df'(x)} \; :$$

(4.5)

Պարզենք թե ինչպես են ընտրվում a, b, c և d հաստատունները:

Դիցուք՝ r-ը $f(x) = 0$ հավասարման պարզ արմատն է: Ունենք

$$g(r) = r - \frac{af(r) + bf'(r)}{cf(r)+df'(r)} = r - \frac{b|}{d} \; ,$$

և $g(r) = r$ պայմանից կստանանք, որ $b = 0$: Այսպիսով $g(x)$ ֆունկցիան կգրվի

$$g(x) = x - \frac{af(x)}{cf(x)+df'(x)}$$

տեսքով: Քանի որ Նյուտոնի մեթոդի զուգամիտությունը քառակուսային է, բնական է պահանջել, որ $g'(r) = 0$: Հաշվենք $g(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$g'(x) = 1 - \frac{|ad((f'(x))^2 - f(x)f''(x))}{(cf(x)+df'(x))^2} \ :$$

Այստեղից՝

$$g'(r) = 1 - \frac{ad\big((f'(r))^2 - f(r)f''(r)\big)}{(cf(r)+df'(r))^2} = 1 - \frac{a}{d} \ :$$

Ելնելով $g'(r) = 0$ պահանջից՝ ստանում ենք՝ $a = d \neq 0$: Ուստի մեր ֆունկցիան կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$g(x) = x - \frac{af(x)}{cf(x)+af'(x)} \ :$$

Այն կարելի է ներկայացնել որպես մեկ պարամետրից կախված ֆունկցիա.

$$g(x) = |x - \frac{f(x)}{\lambda f(x)+f'(x)} \ ,$$

(4.6)

որտեղ $\lambda \equiv \frac{c}{a}$:

Հաշվի առնելով $g(x)$ ֆունկցիայի (3.5) տեսքը՝ $x_{n+1} = g(x_n),\ n = 0, 1, \ldots$ հավասարությունից հանգում ենք նոր ինտերացիոն մեթոդի.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\lambda f(x_n) + f'(x_n)} \ , \ n = 0, 1, \ldots:$$

(4.7)

Գրվածից երևում է, որ $\lambda = 0$ դեպքում մենք ստանում ենք Նյուտոնի մեթոդը: Այսինքն, (4.7) մեթոդը կարելի է դիտարկել որպես Նյուտոնի մեթոդի ընդհանրացում:

λ պարամետրի ներմուծումը կարող է լավացնել զուգամիտության ընթացքը:

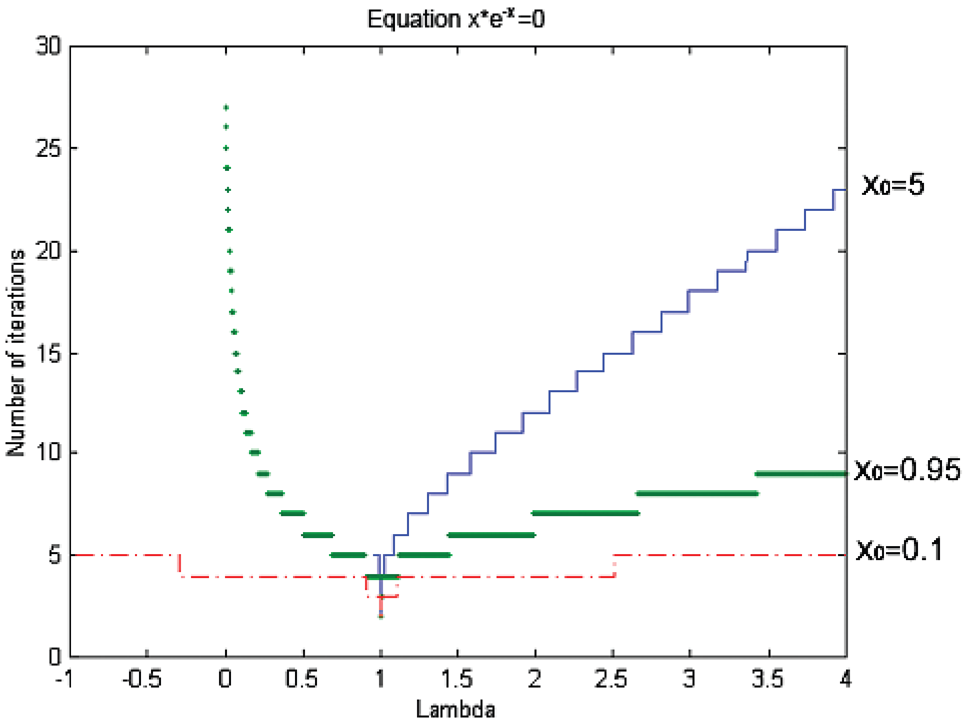
Օրինակ 4.1: Դիտարկենք

$$xe^{-x} = 0$$

(4.8)

հավասարումը, որի միակ արմատը $r = 0$ -ն է: Նյուտոնի մեթոդը այս հավասարման համար զուգամիտում է. եթե սկզբնական մոտարկումը բավարարում է $x_0 < 1$ պայմանին:

Եթե x_0 սկզբնական մոտարկման համար ընդունենք $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.95$, և $x_0 = 5$ արժեքները և տեղադրենք այդ արժեքները $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\lambda f(x_n)+f'(x_n)}$ բանաձևի մեջ, ապա կարող ենք պատկերել կատարված իտերացիաների թիվը 10^{-6} ճշգրտությամբ՝ կախված λ պարամետրի ընտրությունից:



կ. 4.1 Իտերացիաների թիվը՝ կախված λ-ի ընտրությունից

Նկարից պարզ երևում է, որ λ-ի օպտիմալ արժեքը մոտավորապես հավասար է 1-ի՝ սկզբնական մոտարկման բոլոր ընտրված արժեքների համար:

Փորձենք բարձրացնել Նյուտոնի մեթոդի զուգամիտության կարգը, որի համար քննարկում ենք $f(x) = 0$ հավասարման պարզ արմատի դեպքը: Ենթադրենք, որ

$f(x)$ ֆունկցիան երեք անգամ անընդհատ ածանցելի է արմատի շրջակայքում: Միաժամանակ, պարտադիր պայման է, որ $g''(r) = 0$: Ածանցելով

$$g(x) = |x - \frac{f(x)}{\lambda f(x)+f'(x)}$$

-ից կստանանք.

$$g''(x) = 2\frac{\lambda(f'(x))^3 - f(x)f''(x)(2\lambda f'(x) + f''(x))}{(\lambda f(x) + f'(x))^3} + \frac{f(x)f'''(x) + f'(x)f''(x)}{(\lambda f(x) + f'(x))^2} :$$

Այստեղից՝

$$g''(r) = 2\lambda + \frac{f''(r)}{f'(r)} : \tag{4.9}$$

Ելնելով $g''(r) = 0$ պահանջից՝ կստանանք λ պարամետրի օպտիմալ արժեքը.

$$\lambda_0 = -\frac{f''(r)}{2f'(r)} : \tag{4.10}$$

Վերը դիտարկված (4.1) օրինակում

$$f(x) = xe^{-x} :$$

Ունենք

$$f'(x) = (1 - x)e^{-x}, \; f''(x) = (x - 2)e^{-x}$$

Ըստ $\lambda_0 = -\frac{f''(r)}{2f'(r)}$ բանաձևի՝

$$\lambda_0 = -\frac{f''(0)}{2f'(0)} = 1 :$$

Այսպիսով, $f(x) = 0$ օրինակի հավասարման համար կատարված հաշվարկները լավ համաձայնեցվում են տեսական դատողությունների հետ:

Դիտողություն 4.1: Գործնականում, եթե հայտնի է r արմատի բավականաչափ լավ մոտարկումը՝ $\xi \approx r$, ապա λ պարամետրը կարելի է ընտրել հետևյալ կերպ.

$$\lambda_0 = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \ :$$

Որպես հիմք ընդունելով օպտիմալ պարամետրի համար ստացված (4.10) արժեքը՝ $g(x)$ ֆունկցիայի

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda f(x)+f'(x)}$$

արտահայտությունում λ-ի փոխարեն տեղադրենք

$$\frac{f''(x)}{2f'(x)}$$

կստանանք

$$g(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} \ : \tag{4.11}$$

Համապատասխանաբար, հանգում ենք

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \tag{4.12}$$

իտերացիոն մեթոդին, որը հայտնի է որպես Հալլեի մեթոդ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Հակոբյան Յու., Թվային մեթոդներ, Երևան ԵՊՀ հրատ. 2017, 462 էջ
2. Бахвалов Н., Корнев А., Чижонков Е., Численные методы. Решения задач и упражнения, 2-е изд., Москва 2016, 355 էջ
3. Фихтенгольц Г., Основы математического анализа, том 1, Москва 1968, 440 էջ

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

«ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ.ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ» ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ **Окружность ,вписанная в трапецию**

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ Վահանյան Նելլի

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ Սաքանյան Մելս

ՎԱՆԱՁՈՐ 2023

Содержание

Введение

Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и даёт нам возможность правильно мыслить и рассуждать.<<Не прав ли был Платон, требуя *от* своих учеников прежде всего основательного знакомства математикой?>>- Галилео Галилей.
Геометрия - бесконечная наука, на познание которой у многих великих ученых уходила вся . жизнь.
В своей работе я хочу остановиться на изучение такого четырехугольника, как трапеция.

Цель работы:

1.Расширить и систематизировать знания о трапеции ,
2 .Составить справочник с доказательством некоторых свойств.

Задачи, которые я ставила в процессе выполнения работы:
1) Вспомнить свойства

трапеции , которые излучались в школе.

2) Изучить новые факты трапеции , которые выходят
за рамки школьной программы

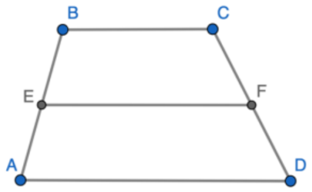
3) Рассмотреть методы решения задач.

4) Изучать дополнительные построения , используемые для решения задач с трапецией.

5) Составить справочник.

Общие факты о трапеции

I. Общие факты о трапеции



Трапеция - четырёхугольник, у которого 2 стороны (основания) параллельны, а 2 другие (боковые стороны) не параллельны.

Средняя линия - отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

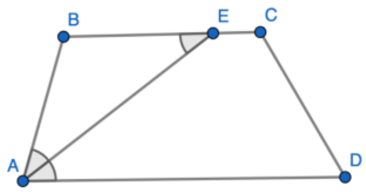
1) Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

EF - средняя линия

$BC \parallel EF \parallel AD$

$$EF = \frac{AD + BC}{2}$$

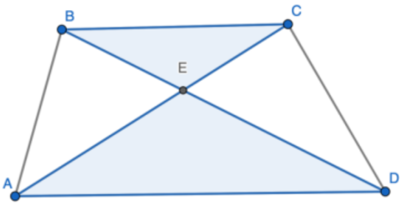
2) Биссектриса любого угла трапеции отсекает на её основании (или продолжении) отрезок, равный боковой стороне.



$\measuredangle ABE -$ равнобедренный

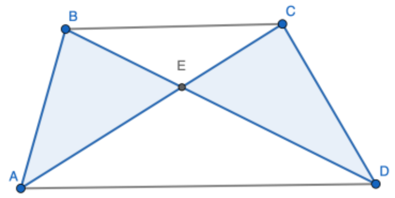
3) Треугольники BCE и DAE, образованные отрезками диагоналей и основаниями трапеции, подобны.

$\Delta BCE \sim \Delta DAE$ с коэффициентом k



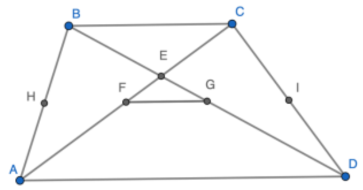
$$\frac{S_{BCE}}{S_{DAE}} = k^2$$

4) Треугольники ABE и CDE, образованные отрезками диагоналей и боковыми сторонами трапеции, имеют одинаковую площадь.



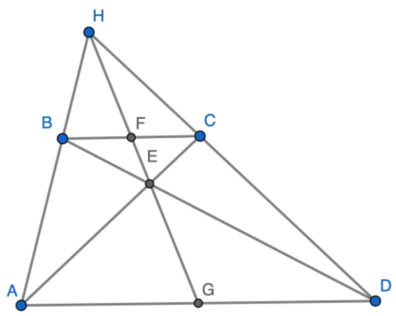
$$S_{BAE} = S_{CDE}$$

5) Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен полуразности оснований и лежит на средней линии.

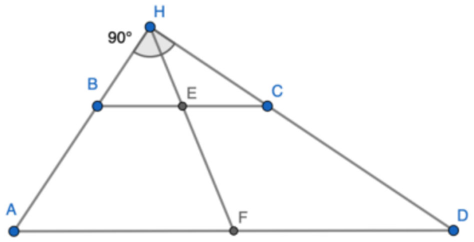


$$FG = \frac{AD - BC}{2}$$

6) Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений её боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

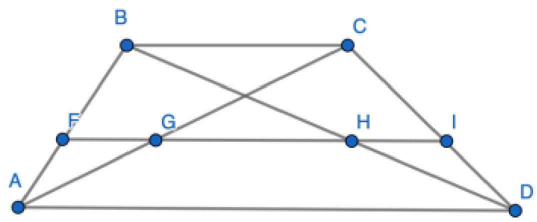


7) Если сумма углов при любом основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.



$$EF = \frac{AD - BC}{2}$$

8) Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции разбивается её диагоналями на 3 части. Отрезки,

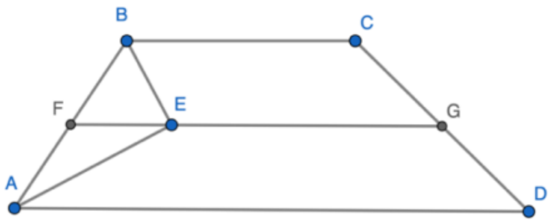


прилегающие к боковым сторонам трапеции, равны между собой.

$$FG = HI$$

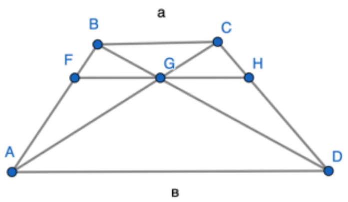
9) Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под углом 90 градусов. Точка пересечения этих биссектрис лежит на средней линии трапеции.

$$\angle AEB = 90°$$



FG - средняя линия

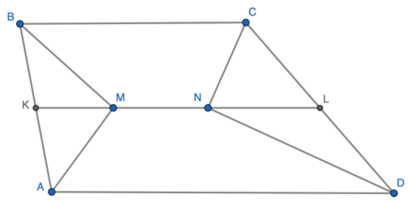
10) Отрезок, параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей



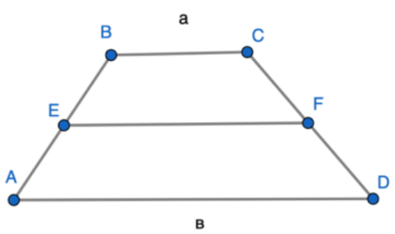
$$FH = \frac{2ab}{a+b}$$

11) Отрезок, соединяющий точки пересечения биссектрис углов, прилежащих к боковым сторонам трапеции, равен:

$$\frac{|a+b-c-d|}{2}$$

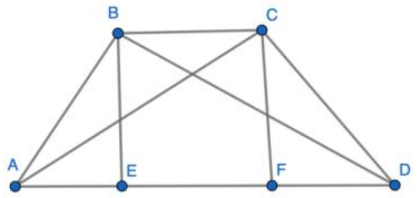


12 Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, на 2 равновеликие трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$



$$EF = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

13) В трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон плюс удвоенное произведение оснований.



$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD * BC$$

У равнобедренной трапеции боковые стороны равны.

1) Вокруг трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда трапеция равнобедренная.

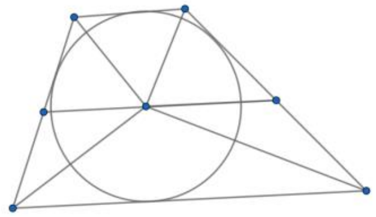
2) В равнобедренной трапеции диагонали равны.

3) Углы при любом из оснований равнобедренной трапеции равны.

4) Сумма противоположных углов трапеции равна 180°

5) Прямая, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, называется осью симметрии.

Трапеция ,описанная около окружности



1) Суммы противоположных сторон равны.

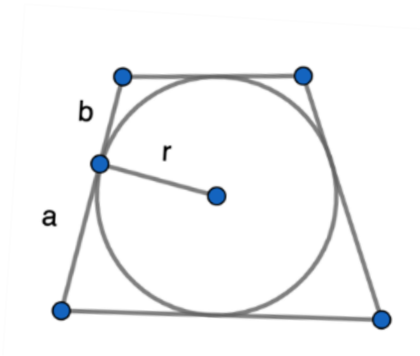
2) Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис углов трапеции.

3) Расстояния от вершины трапеции до точек касания трапеции с окружностью равны. Получается 4 пары равных отрезков

Это свойства отрезков касательных ,проведённых из одной точки к окружности .

4) Биссектрисы боковых углов трапеции пересекаются в точке центра вписанной окружности и образуют угол, равный 90°.

5) Если в трапецию вписана окружность радиусом r и она делит боковую сторону точкой касания на два отрезка - a и b, то $\boldsymbol{r = \sqrt{ab}}$



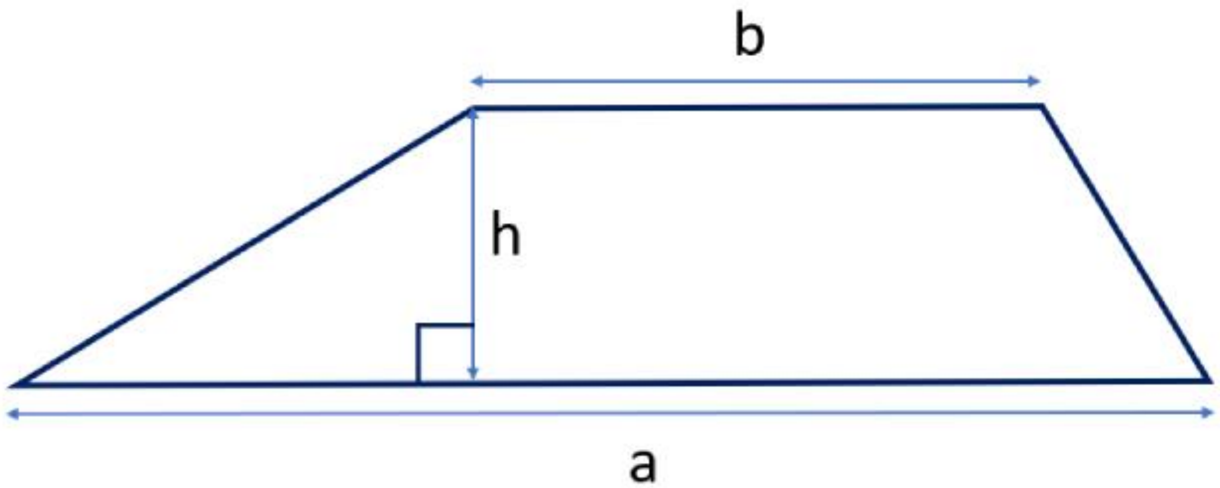
Формулы нахождения площади трапеции

Площадь трапеции через рисование единичных квадратов не всегда возможно вычислить. В этом случае легче воспользоваться формулами.

Через основания и высоту

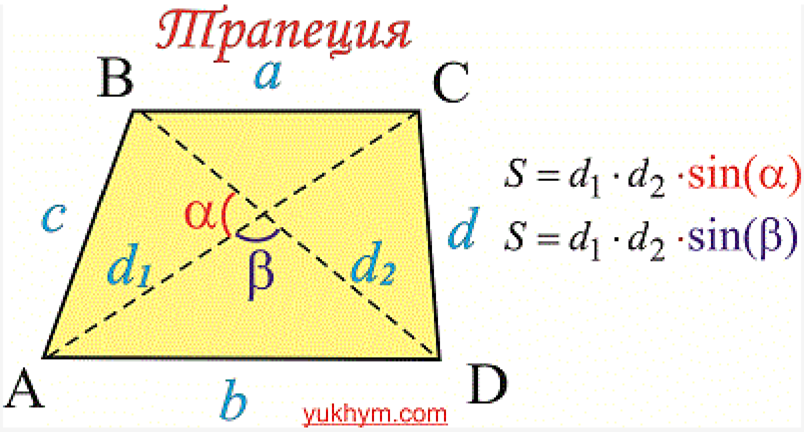
Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин оснований на длину ее высоты.

S=a+b2·hS=a+b2·h



Эта формула чаще всего используется при решении задач.

2) Если задано диагонали трапеции и угол между ними (смотрите рисунок)



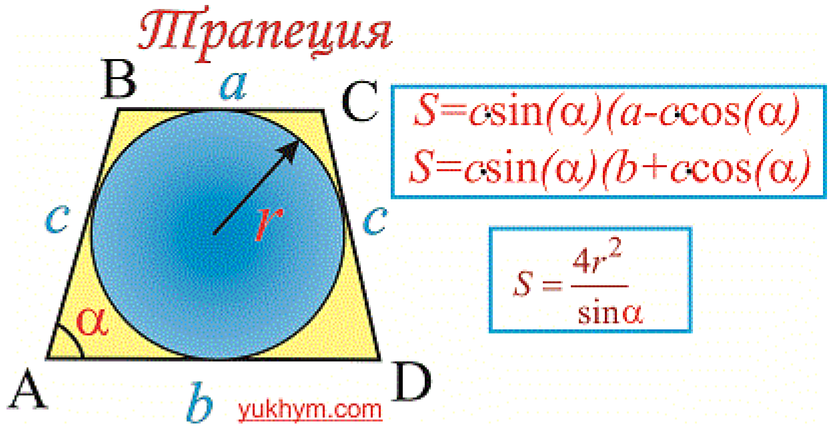
3) Бывают сложные примеры на трапецию когда задано все четыре ее стороны. В таких случаях используют первую формулу площади трапеции

$$S=\frac{1}{4}\frac{b+a}{b-a}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)}$$

или вторую

$$S=\frac{a+b}{2}\sqrt{c^2-\left(\frac{(b-a)^2+c^2-d^2}{2(b-a)}\right)^2}$$

4) Если в задании известно что *трапеция равнобедренная* (боковые стороны равны) то для того, чтобы найти площадь трапеции кроме выше приведенных формул используют следующие:



если задано основу, боковую сторону и угол между ними

5 Площадь трапеции через радиус вписанной окружности и основания $S=(a+b)\cdot r$

a и **b** - основания трапеции

r - радиус вписанной в трапецию окружности

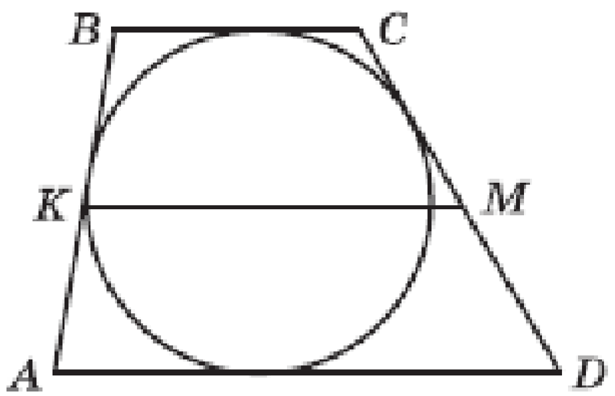
6 Площадь прямоугольной трапеции по высоте и средней линии

Для расчета площади потребуются данные о высоте трапеции и линии, проведенной посередине фигуры. Произведение этих величин и составит площадь.

$S=m*h$, где **S** – площадь фигуры, **m** – средняя линия, а **h** – высота, которую можно заменять на перпендикулярную основаниям сторону**b**.

Решение задач

1 Боковые стороны трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5/11. Найти основания трапеции



Пусть ABCD — данная трапеция, AB = 3 и CD = 5 — ее боковые стороны, точки K и M — середины сторон AB и CD соответственно. Пусть, для определенности, AD > BC, тогда площадь трапеции AKMD будет больше площади трапеции KBCM. Так как KM — средняя линия трапеции ABCD, то трапеции AKMD и KBCM имеют равные высоты. Поскольку площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, то верно следующее равенство:

SAKMD / SKBCM=AD+KMKM+BC=11/5

Далее, так как в трапецию ABCD можно вписать окружность, то AD + BC = AB + CD = 8. Тогда KM = 4 как средняя линия трапеции ABCD. Пусть BC = x, тогда AD = 8 – x. Имеем:

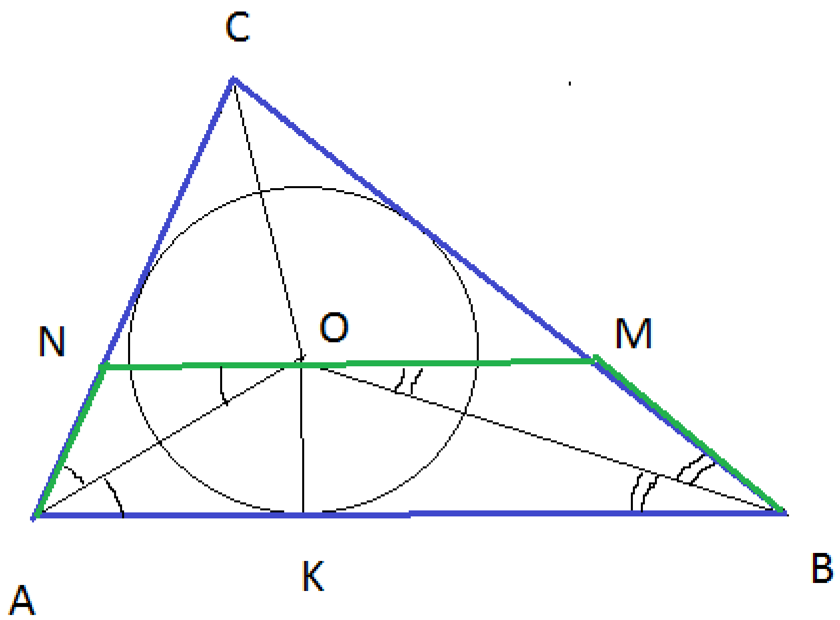
SAKMD / SKBCM=12−x / x+4=11/5⇔x=1

Значит, BC = 1 и AD = 7.

Ответ: 1 и 7.

2)

Прямая, параллельная стороне AB = 5 треугольника ABC и проходящая через центр вписанной в него окружности, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Найдите периметр четырехугольника ABMN , если MN = 3.



∠ OAK= ∠ OAN – (OA – биссектриса, делит угол пополам)

∠OAK = ∠NOA (внутренние накрест лежащие углы при параллельных AB и MN)

Значит, ∠ OAN = ∠NOA и треугольник ANO – равнобедренный

AN=NO

Аналогично,

∠OBM = ∠OBK (OB – биссектриса угла B)

∠OBK = ∠MOB

Значит, ∠MOB = ∠OBM и треугольник MBO – равнобедренный

OM=MB

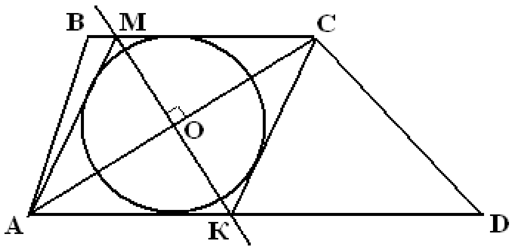
AN+MB=NO+OM=NM=3

P(ABMN)=AB+BM+MN+NA=AB+MN+3=5+3+3=11

О т в е т. 11

Решение задач на дополнительное построение
(олимпиадные задачи)

1. Через середину диагонали AC трапеции ABCD проведена прямая, перпендикулярная AC. Эта прямая пересекает основания AD и BC в точках К и М соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник АМСК, если AM = 10, AC = 16.



.

1) Пусть O – середина диагонали AC.

ΔMOC = ΔKOA по катету и острому углу (AO = OC, $<$OAK = $<$OCM, как накрест лежащие при параллельных BC и AD, и секущей AC).

Отсюда AK = MC.

2) MC||AK, MC=AK ⇒ AMCK – параллелограмм, значит AM = CK.

3) Окружность вписана в четырехугольник, поэтому MC + AK =AM + CK, отсюда AM = MC, AMCK – ромб.

4) Из ΔAOM – прямоугольного, по теореме Пифагора MO = $\sqrt{\mathrm{AM}^2 - \mathrm{AO}^2}$ = =$\sqrt{10^2 - 8^2}$ = 6, тогда MK = 12.

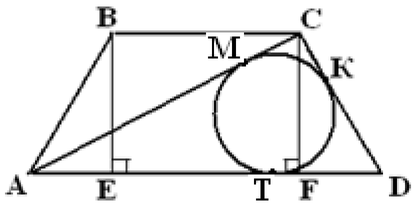
5) $S_{\mathrm{AMCK}} = \frac{1}{2}$ AC · MK = 96.

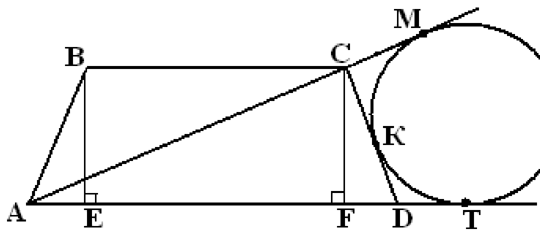
С другой стороны, так как в четырехугольник АМСК вписана окружность, то S_{AMCK} = pr, где p – полупериметр, p = 2AM = 20.

r = $\frac{S_{\text{АМСК}}}{\text{p}} = \frac{96}{20}$ = 4,8. Ответ: 4,8.

2 . Дана равнобедренная трапеция ABCD с основаниями BC и AD. Известно, что BC = 44, AD = 100 и AB = CD = 35. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Возможны два случая расположения окружности, заданной в условии.





Пусть точки M и T – точки касания с окружностью прямых AC и AD, тогда CK = CM, AM = AT, DT = DK, как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки.

Опустим из вершин B и C трапеции на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно.

Тогда AE = FD = $\frac{\text{AD}-\text{BC}}{2} = \frac{100-44}{2}$ = 28,

AF = AD – FD = 100 – 28 =72.

Из ΔABE по теореме Пифагора: BE = $\sqrt{\text{AB}^2-\text{AE}^2} = \sqrt{35^2-28^2}$ =21, CF = BE.

Из ΔACF по теореме Пифагора: AC = $\sqrt{\text{AF}^2+\text{CF}^2} = \sqrt{72^2+21^2}$ = 75.

1) Окружность вписана в треугольник ACD.

Пусть CM = CK = x, тогда DK = DT = CD – CK = 35 - x,

AM = AT =AC – MC = 75 – x.

По условию AD = 100, но AD = AT + TD, 35 – x + 75 – x = 100, x = 5, CK = 5.

2) Окружность является вневписанной для треугольника ACD.

Пусть CM = CK = x, тогда DK = DT = CD – CK = 35 - x,

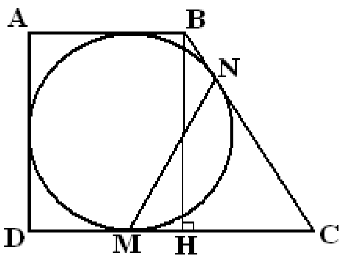
AM = AC + CM = 75 +x, AT = AD + DT = 100 + 35 – x.

Но   AM = AT,   75 +x = 100 + 35 – x, 2x = 60, x = 30, СК = 30.

Ответ: 5 или 30.

3. В трапеции ABCD боковая сторона AD перпендикулярна основаниям. Окружность, вписанная в эту трапецию, касается сторон CD и BC в точках M и N соответственно, причем MN = MC. Найдите среднюю линию трапеции, если радиус окружности равен $8\sqrt{3}$-12.

.



1) Пусть m – средняя линия трапеции, m = $\frac{1}{2}$ (AB+CD).
2) Так как трапеция описана, то   AD+BC = AB+DC.

Значит,   m = $\frac{1}{2}$ (AD+BC).

3) По свойству касательных, проведённых из одной точки, CN = CM, но по условию CM = MN, значит ΔMNC -равносторонний, $\angle C = 60^\circ$.
4) Построим высоту трапеции BH.

Из ΔBCH – прямоугольного, имеем   BC = $\frac{BH}{\sin 60^\circ}$, где BH = AD = 2r = $16\sqrt{3}$-24.

BC = $\frac{(16\sqrt{3}-24)\cdot 2}{\sqrt{3}}$ = 32 - $16\sqrt{3}$.

m = $\frac{1}{2}$ ($16\sqrt{3}$-24 + 32 - $16\sqrt{3}$) = 4. Ответ: 4.

Заключение

В ходе работы:

1) был создан справочник с формулами и фактами о трапеции, в том числе утверждениями, выходящими за рамки школьных учебников;
2) был разработан практикум с задачами, в которых используются ключевые задачи с трапециями, также рассмотрен метод дополнительных построений, без которого решение определённого типа задач невозможно;
3) в практикуме разобраны задачи, которые входят в сборники по подготовке к ЕГЭ и находятся в заключительных этапах перечневых олимпиад 1 и 2 уровня.

В ходе проведённой работы появилось понимание того, что геометрический метод решения задач хоть и затрагивает большее количество теорем и свойств, чем алгебраический, но зато не требует сложных вычислений.

Можно сделать вывод о том, что сначала стоит решать задачу геометрическим способом. Если решить задачу этим методом не получается, стоит попробовать решить задачу алгебраическим способом. Также стоит обратить внимание, что алгебраический способ требует большой внимательности и громоздких вычислений.

В результате выполнения данной работы у меня появилось полное понимание такого четырёхугольника как трапеция и полноценное представление способов решения задач с этим четырёхугольником.

Список используемой литературы

1. Р. К. Гордин/Теоремы и задачи школьной геометрии/Базовый и профильный уровни; 5 издание, стереотип. – М.: МЦНМО, 2020. – 96 стр.

2. https://egemaximum.ru/trapeciya-svojstva-trapecii.

3. В. А. Гусев, А. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. Практикум по элементарной математике: Геометрия. М.: Просвещение, 1992.

4. https://math-ege.sdamgia.ru/

5. https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
«ՎԱՆԱՁՈՐԻ Հ.ԹՈՒՄԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ» ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՊԱՐՏԱԴԻՐ ԱՏԵ ՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐ ԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝

Բաժանելիության հայտանիշներ

ԿԱՏԱՐՈՂ՝

Տիգրան Առուշանյան

ՂԵԿԱՎԱՐ՝

Մելս Սաքանյան

Ներածություն

Բաժանելիության հայտանիշներն իմանալը, իհարկե, ամենևին էլ պարտադիր չէ: Բայց եթե գիտեք և գիտեք, թե ինչպես օգտագործել այն, դա լավ է:

Բաժանելիության հայտանիշները տալիս են միայն այն հարցի պատասխանը՝ թիվը բաժանվո՞ւմ է ամբողջ թվի, թե՞ ոչ: Ավելին, սա կարելի է շատ արագ հաշվարկել՝ առանց բաժանելու: Օրինակ՝ խանութից ապրանքների բավականին բարդ հավաքածու գնելիս, օրինակ՝ 93 դրամ արժողությամբ մի տուփ կաթ, 84 դրամ արժողությամբ մի տուփ կաթնաշոռ, 6 տորթ և 3 կիլոգրամ շաքարավազ, երբ գանձապահը տպում է 493 դրամի անդորրագիր, գնորդը կարող է հեշտությամբ ստուգել հաշվարկը և ուղղել սխալը:

Բաժանելիության հայտանիշներն օգնում են լուծել օլիմպիադայի բնույթի բարդ մաթեմատիկական խնդիրներ:

Նպատակը. զարգացնել ձեր գիտելիքները թվերի բաժանելիության հայտանիշների մասին:

Առաջադրանքներ.

Բացահայտեք բաժանելիության հայտանիշները դպրոցական ուսումնական ծրագրից դուրս:
Ինքնուրույն ապացուցեք 11-ի և 7-ի բաժանելիության հայտանիշները:
Գտեք բաժանելիության հայտանիշների կիրառությունը:

Բաժանելիության հայտանիշների պատմությունից
Բաժանելիության հայտանիշը մի կանոն է, որով առանց բաժանում կատարելու կարող եք որոշել՝ արդյոք մի բնական թիվը բաժանվում է մյուսի վրա: Բաժանելիության հայտանիշները միշտ հետաքրքրել են տարբեր երկրների և ժամանակների գիտնականներին:

2-ի, 3-ի, 5-ի, 9-ի, 10-ի բաժանելիության հայտանիշները հայտնի են դեռևս հին ժամանակներից: 2-ի բաժանելիության հայտանիշը հին եգիպտացիներին հայտնի է եղել մ.թ.ա 2 հազար տարի, իսկ 2-ի, 3-ի, 5-ի բաժանելիության հայտանիշները մանրամասն նկարագրել է իտալացի մաթեմատիկոս Լեոնարդո Ֆիբոնաչի (1170-1228 թթ.):

Բլեզ Պասկալը (1623-1662) մեծ ներդրում է ունեցել թվերի բաժանելիության հայտանիշների ուսումնասիրության գործում: Երիտասարդ Բլեզը շատ վաղ ցույց տվեց մաթեմատիկական ակնառու ունակություններ՝ սովորելով հաշվել նախքան կարդալը: Նա գրել է իր առաջին մաթեմատիկական տրակտատը՝ «Փորձ կոնաձեւ հատվածների տեսության մեջ», 24 տարեկանում: Մոտավորապես նույն ժամանակ նա նախագծեց մեխանիկական գումարող մեքենա՝ հաշվողական մեքենայի նախատիպը:

Իր աշխատանքի վաղ շրջանում (1640-1650) բազմակողմանի գիտնականը գտավ ալգորիթմ ցանկացած ամբողջ թվի ցանկացած այլ ամբողջ թվի վրա բաժանելիության հայտանիշները գտնելու համար, որից բխում են բոլոր մասնավոր հայտանիշները: Նրա հայտանիշը հետևյալն է. a բնական թիվը կբաժանվի մեկ b բնական թվի վրա միայն այն դեպքում, եթե a-ի թվանշանների և կարգային միավորները b-ի բաժանելիս ստացված մնացորդների արտադրյալների գումարը բաժանվում է b-ի վրա: թիվ.

Օրինակ 1. Արդյո՞ք 2814 թիվը բաժանվում է 7-ի:

10, 100, 1000 կարգային միավորները բաժանենք 7-ի և գտնենք մնացորդները:

4.

1000-ը 7-ի բաժանման մնացորդը-6

100-ը 7-ի բաժանելու մնացորդը-2
10-ը 7-ի բաժանելու մնացորդը-3
2814-ը բաժանվում է 7-ի, քանի որ 2·6 + 8·2 +1·3 +4 = 35, 35:7=5 [1]:

Թվերի գումարի և տարբերության բաժանելիության հայտանիշներ

Թվերի տեսության մեջ կան թվերի գումարի և տարբերության բաժանելիության հայտանիշներ [2]:
Հատկություն 1.
Եթե a և b թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է k թվի վրա, ապա a+b գումարը նույնպես բաժանվում է k թվի վրա:

Ապացույց:
Քանի որ a-ն բաժանվում է k թվի վրա, ուրեմն a=k*m1: Քանի որ b-ն բաժանվում է k թվի վրա, ապա b = k*m2: Այս արտահայտությունները փոխարինենք a+b գումարով.
a + b = k*m1+ k*m2=k*(m1+m2): Սա նշանակում է, որ a+b-ն բաժանվում է k-ի:

Հատկություն 2.
Եթե մի գումարելիներից մեկը բաժանվում է որոշակի թվի, և գումարը բաժանվում է նույն թվի, ապա մյուս գումարելին նույնպես բաժանվում է այս թվի վրա, այսինքն՝ եթե a-ն բաժանվում է b-ի, իսկ (a+c)-ն բաժանվում է b-ի, ապա. c-ն բաժանվում է b-ի:

Ապացույց:
Քանի որ a-ն ամբողջությամբ բաժանվում է b-ի, ապա a=b*m1 և քանի որ a+c-ն ամբողջությամբ բաժանվում է b-ի, ապա a+c=b*m2:
Այնուհետեւ b*m1 + c = b*m1 + c, c=b*m2 - b*m1=b*(m2-m1): Այսպիսով, c-ն բաժանվում է b-ի:

5.

Գործնական մաս

Կան բաժանելիության շատ տարբեր հայտանիշներ: Մենք դասերին ուսումնասիրեցինք 2-ի, 5-ի, 10-ի, 3-ի, 9-ի բաժանելիության հայտանիշները, բայց որոշեցի լրացուցիչ դիտարկել որոշ այլ հայտանիշներ, օրինակ՝ 11-ի և 7-ի բաժանելիության հայտանիշները (տե՛ս նկ. 1):

11 -ի բաժանելիության հայտանիշը

Որպեսզի թիվը բաժանվի 11-ի, անհրաժեշտ և բավարար է, թվանշանների հանրահաշվական գումարը վերցված + նշանով, եթե թվանշանները կենտ տեղերում են (սկսած միավորների թվանշանից) և վերցված մինուս նշանով, եթե թվանշանները զույգ տեղերում են, բաժանվի 11-ի կամ հավասար լինի 0-ի:

Ապացույց 1

Տրված է.

a թիվը բաժանվում է 11-ի:

Ապացուցել.

որ a թվի թվանշանների հանրահաշվական գումարը վերցված + նշանով, եթե թվանշանները կենտ տեղերում են (սկսած միավորների թվանշանից) և վերցված մինուս նշանով, եթե թվանշանները զույգ տեղերում են, բաժանվում է 11-ի:

Ապացույց:

Պատկերացնենք a թիվը կարգային գումարելիների գումարի տեսքով.

*a5a4a3a2a1 = 10000*a5 + 1000*a4+ 100*a3+ 10*a2+ 1*a1.*

Բացենք փակագծերը և խմբավորենք անդամները հետևյալ կերպ.

(9999*a5+1001*a4+99*a3+11*a2) + ((a5 + a3 + a1) - (a4 +a2)):

Քանի որ a թիվը և նրա գումարելիներից՝ (9999*a5+1001*a4+99*a3+11*a2) բաժանվում է 11-ի, ապա երկրորդ գումարելին՝ ((a5 + a3 + a1) - (a4 +a2)) ևս բաժանվում է 11-ի (հատկություն 2):

Այսպիսով ա թվի թվանշանների գումարը վերցված + նշանով եթե կենտ տեղում են և - նշանով եթեզույգ տեղում են բաժանվում է 11-ի:

Ապացույց 2

Տրված է. a թվի թվանշանների հանրահաշվական գումարը վերցված + նշանով, եթե թվանշանները կենտ տեղերում են (սկսած միավորների թվանշանից) և վերցված մինուս նշանով, եթե թվանշանները զույգ տեղերում են, բաժանվում է 11-ի:
Ապացուցել. a թիվը բաժանվում է 11-ի:

Ապացուցում

Ինչպես նախկինում նկարագրվեց, a թիվը կարող է ներկայացվել հետևյալ կերպ.

$a_5a_4a_3a_2a_1 = (9999*a_5+1001*a_4+99*a_3+11*a_2) + ((a_5 + a_3 + a_1) - (a_4 + a_2))$:

Քանի որ փակագծում $(9999*a_5+1001*a_4+99*a_3+11*a_2)$ բոլոր անդամները, հետևաբար և ամբողջ գումարը, բաժանվում են 11-ի, իսկ $((a_5 + a_3 + a_1) - (a_4 + \text{ա}_2))$ ըստ տրվածի բաժանվում է 11-ի, ապա a թիվը կբաժանվի 11-ի (հատկություն 1):

Բաժանելիության հայտանիշների կիրառությունը

1. Բաժանելիության հայտանիշներն օգնում են լուծել կյանքի խնդիրները:

Վերադառնանք ներածությունում քննարկված խնդրին:

Գնորդը խանութից վերցրել է 93 դրամ արժողությամբ մի փաթեթ կաթ, 84 դրամ արժողությամբ մի տուփ կաթնաշոռ, 6 տորթ և 3 կիլոգրամ շաքարավազ: Երբ գանձապահը 493 դրամի չափով անդորրագիր է տպել, գնորդը պահանջել է ստուգել հաշվարկը և ուղղել սխալը: Ինչպե՞ս գնորդը պարզեց, որ հաշիվ-ապրանքագիրը սխալ է:

Լուծում:

Յուրաքանչյուր տեսակի գնված ապրանքի արժեքը արտահայտվում է 3-ի բազմապատիկ թվով (կաթի և կաթնաշոռի համար գինը 3-ի բազմապատիկ է, մյուս ապրանքների գինը անհայտ է, բայց դրանց քանակը 3-ի բազմապատիկ է): . Եթե անդամներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 3-ի, ապա գումարը պետք է բաժանվի 3-ի: Հիշենք 3-ի բաժանելիության հայտանիշը. Միայն այն թվերն են բաժանվում 3-ի, որոնց թվանշանների գումարը առանց մնացորդի բաժանվում է 3-ի:

493 թիվը (4+9+3=16) չի բաժանվում 3-ի, հետևաբար հաշվարկը սխալ է:

2. Բաժանելիության հայտանիշներն օգնում են լուծել օլիմպիադայի խնդիրներ:

Լուծենք դրանցից մեկը՝ Գրի՛ր մի քանի իննանիշ թիվ, որը չունի կրկնվող թվեր և առանց մնացորդի բաժանվում է 11-ի:Գրի՛ր այդ թվերից ամենամեծն ու փոքրը [3]:

Փորձենք գտնել ամենամեծ թիվը:

Առաջին 5 դիրքերում ամենամեծ թվերը կդասավորենք նվազման կարգով՝ 98765abcd:

Կենտ տեղերում թվանշանների գումարը՝ 9 + 7 + 5 = 21:

Զույգ տեղերում թվերի գումարը՝ 8 + 6= 14

Տարբերությունը՝ 21 – 14 = 7:

1, 2, 3, 4 թվերը մնացին չօգտագործված, որոնցից ո՞րը պետք է գումարել կենտ տեղերում թվանշանների գումարին, որը՝ զույգ, որպեսզի տարբերությունը բաժանվի 11-ի: Պարզ է, որ դա այն զույգերն են, որոնց գումարների տարբերությունը հավասար է 4-ի՝ (3 + 4) – (1 +2) = 4. Ամենամեծ թվի պայմանից ստանում ենք՝ 987652413:

Փորձենք գտնել նվազագույն թիվը:

Առաջին հինգ դիրքերի համար մենք կդասավորենք ամենափոքր թվերն աճման կարգով՝ 10234abcd:

Կենտ տեղերում թվանշանների գումարը՝ 1 + 2 + 4 = 7:

Զույգ տեղերում թվանշանների գումարը՝ 0 + 3 = 3:

Տարբերությունը՝ 7 – 3 = 4:

5, 6, 7, 8 մնացին չօգտագործված, դրանք բաժանելով 5, 6 և 7, 8 զույգերի և ստանալով 11 և 15 գումարները, կենտ տեղերում թվերին ավելացնեքն 5 և 6, իսկ զույգ տեղերում՝ 7 և 8, այնպես որ մենք հավասարեցնենք գումարները: Ուշադիր ենք լինում, որ փոքր թիվը մեծից առաջ դնել, ստանում ենք 102347586 թիվը:

Եզրակացություն

Ծանոթանալով թվերի բաժանելիության նոր հայտանիշներին՝ հավատում եմ, որ կարող եմ ձեռք բերած գիտելիքները օգտագործել մաթեմատիկայի դասերին և ինքնուրույն կիրառել այս կամ այն հայտանիշը կոնկրետ խնդրի վրա: Դա ինձ թույլ կտա զգալիորեն արագացնել բազմաթիվ խնդիրների լուծումը, ինչպես նաև կիրառել սովորած հայտանիշները կյանքի տարբեր իրավիճակներում:

ՎԱՆԱՁՈՐԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Խումբ՝	Մաթեմատիկա
Թեմա՝	ՖԻԲՈՆԱՉԻԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՈՍԿԵ ՀԱՏՈՒՄԸ
Ուսուցիչ՝	Աիդա Այվազյան
	Վանաձորի թիվ 24 միջնակարգ դպրոց
Ղեկավար՝	Մելիս Սաքանյան

Վանաձոր 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Արդիականություն. Մաթեմատիկան մեր շրջապատող աշխարհը ճանաչելու հիմնաքարն է: Նրա գաղափարները, դատողությունները և խորհրդանիշները ծառայում են որպես լեզու, որով գրում, խոսում և մտածում են մյուս գիտությունները: Այն բացատրում է դժվարին երևույթների օրինաչափությունները, կանխագուշակում և մեծ ճշգրտությամբ նախօրոք նկարագրում է երևույթների ընթացքը:

Մաթեմատիկան այն գիտությունն է, որը զարգացնում է վերացական մտածողությունը, մտքի արագությունը, բարդ իրավիճակներում ճիշտ կողմնորոշվելու հմտությունը, բոլոր հնարավոր հետևանքների հաշվարկումը: Մաթեմատիկան մեծ խթան է հանդիսանում երեխայի մտավոր զարգացման գործում: Այն մարզում է ուղեղը, լավացնում հիշողությունը, զարգացնում տրամաբանությունը: Մեթեմատիկան օգնում է գիտակցել սեփական սխալները, ուղղել դրանք և շարժվել առաջ: Պատահական չէ, որ իրավաբանական ֆակուլտետներում ուսումնասիրում են մաթեմատիկա, քանի որ այն օգնում է ճիշտ համադրել դեպքերը, կատարել հետևություններ, ընտրել ճիշտ պաշտպանական տակտիկա, հաշվարկել հնարավոր հետագա զարգացումները:

Այսօր առանց մաթեմատիկայի հնարավոր չէ մարդկության առաջընթացը, տեխնոլոգիական զարգացումը: Առանց մաթեմատիկական հաշվարկների անհնար կլիներ տիեզերանավերի ու ինքնաթիռների թռիչքը, մեքենաների ստեղծումը, բժշկական սարքերի օգտագործումը, դեղերիու բուժման բաշխումը, եղանակի կանխատեսումը, բիզնես-ծրագրերի հաջողությունը, հրաշակերտ շենքերի կառուցումը:

Ժամանակակից աշխարհը շատ արագ է զարգանում, և մենք նույնպես պետք է քայլենք ժամանակին համընթաց՝ տալով աշակերտներին իրենց ժամանակակից պահանջմունքները բավարարող կրթություն, այնպիսի գիտելիք, որը մրցունակ լինի աշխարհում:

Այս նկատառումներից ելնելով՝ ուսուցիչը ունի շատ կարևոր խնդիր. խթանել մաթեմատիկայի հանդեպ աշակերտների հետաքրքրությունը, նպատակաուղղված մանկավարժական աշխատանք կատարել նրանց հետ՝ ընդգծելու համար նրանց մաթեմատիկական ընդունակությունները, նպաստել այնպիսի իրավիճակների ստեղծմանը դասի ժամանակ, որոնցում աշակերտները հետաքրքրություն և ստեղծագործականություն կցուցաբերեն:

Հետազատության նպատակ. Հենց այս նկատառումով եմ առաջնորդվել տվյալ հետազոտական աշխատանքն իրականացնելիս, որի նպատակն է ուսումնասիրել Ֆիբոնաչիի հաջորդականությունն ու ոսկե հատումը բնության մեջ, մարդու մարմնակազմության մեջ արվեստում, ճարտարապետության մեջ և մարդու կյանքում: Միաժամանակ աշակերտների մոտ կխթանվի մաթեմատիկա առարկայի նկատմամբ հետաքրքրությունը:

Հետազոտության խնդիրներ. Աշակերտներն ուսումնասիրելու են բույսերի և կենդանիների կառուցվածքը, մարդու մարմնակազմությունը, առօրյա կյանքում օգտագործվող իրերու սարքավորումներ, արվեստի և ճարտարապետության տարբեր գործեր՝ իմանալու համար, թե ինչպես են դրանցում արտահայտվում ոսկե հատումն ու Ֆիբոնաչիի հաջորդականությունը:

Հետազոտության ընթացքում կիրառվել են այնպիսի մանկավարժական մեթոդներ և գործիքներ, ինչպիսիք են աշակերտների հետ գործնական աշխատանքի իրականացումը, աշակերտների թեստավորումը, ինչպես նաև վերլուծական մոտեցումներ, որոնք թույլ են տվել ընդհանրացնել ստացված տեղեկատվությունը և համապատասխան եզրահանգումներ կատարել ուսումնասիրվող խնդրի շուրջ:

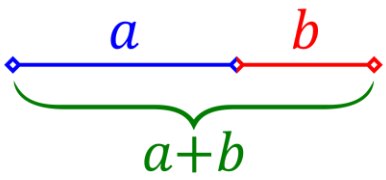
ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՄԱՍ

Ավանդակա մանկավարժության մեջ գոյություն ունի մի դրույթ, ըստ որի՝ «ուսուցչի մահացու մեղքն է ձանձրալի լինելը»: Այս պնդումը կարելի է մեկնաբանել որպես ուսուցչի մանկավարժական գործունեության բնորոշում: ՌԻսուցիչը պետք է կարողանա բավականին գրավիչ և հետաքրքիր եղանակով աշակերտներին մատուցել ուսուցանվող նյութը՝ նրանցից համապատասխան արձագանքի արժանանալու համար (Актуальные вопросы формирования интереса в обучении / Подред. Г. И. Щукиной. М.: Просвещение, 1984, էջ 36):

Բ.Կուզնեցովը ասել է. «Յուրաքանչյուր անձի բնորոշ է ցանկությունը՝ ուսման մեջ լինել ավելի խելացի և ավելի առաջադեմ» (Кузнецов Б.Н. Воспитание интереса к изучению математики в школе. Иркутск, 1989): Հենց այս ձգտման շնորհիվ է, որ աշակերտները ձգտում են նոր բարձունքների: Նաև՝ հետաքրքրասիրության խթանման օգնությամբ աշակերտների մոտ ձևավորվում է նոր գիտելիքների ձեռքբերման պահանջմունք, որը բավարարելու համար նրանք փորձելու են լրացուցիչ գիտելիք և ինֆորմացիա ստանալ համացանցից, ինչն էլ, իր հերթին, կխթանի մեդիագրագիտության կոմպետենցիայի զարգացումը:

Աշակերտները նյութի ուսումնասիրության համար օգտագործել են և՛ համացանցից գտած տեղեկատվությունը, և՛ տարբեր դասագրքեր: Նրանք պետք է հասկանան և տարբերեն ինֆորմացիայի վստահելի աղբյուրը և կարողանան որոնել ու գտնել իրենց անհրաժեշտ ինֆորմացիան վստահելի աղբյուրներից:

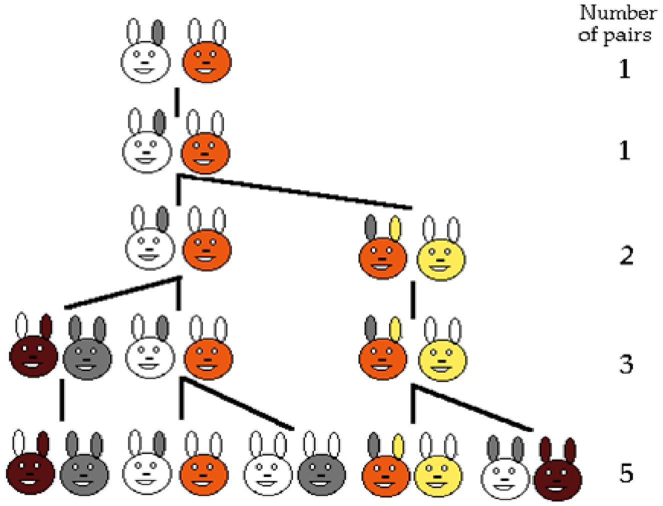
Բոլոր ժամանակներում մարդիկ ձգտել են որոնել ներդաշնակը և կատարյալը: Այդ ուղղությամբ լուրջ բացահայտումներ են կատարել Հին հույն մտածողները: Նրանք այն համոզմունքին էին, որ աշխարհը կառուցված է ներդաշնակության հիման վրա, և դրա ճանաչողության բանալին տալիս է երկրաչափությունը: Հետաքրքրող հարցերից մեկը վերաբերում էր ամբողջի ու նրա մասերի փոխհարաբերությանը. ինչպիսի՞ մասերի հատել ամբողջը, որպեսզի նրանց հարաբերությունն ընկալվի գեղեցիկ: Այս խնդրի բնորոշումն ու բազմաթիվ վերլուծություններ են ամփոփված Պլատոնի «Տիմեոս» տրամախոսության մեջ: Ընդունված է կարծել, որ ոսկե հատում հասկացությունը գիտության մեջ է ներմուծել Պյութագորասը: Հավանաբար, առաջին անգամ հենց նա է բացահայտել, որ ամբողջի՝ երկու անհավասար մասերի հատումը կլինի կատարյալ, եթե փոքր ու մեծ մասերը հարաբերեն այնպես, ինչպես մեծ մասն ու ամբողջը:



Ամբողջի այդպիսի հատումը կոչվել է ներդաշնակ համամասնության հատում: Կա ենթադրություն, որ Պյութագորասը իր այդ գիտելիքը վերցրել է եգիպտացիներից և բաբելոնցիներից: Իսկապես, Քեոփսի բուրգի, եգիպտական տաճարների, խորաքանդակների, զարդերի և կենցաղային իրերի համամասնությունները ցույց են տալիս, որ եգիպտական վարպետներն օգտագործում էին ոսկե հատման չափանիշները դրանց ստեղծման ժամանակ: Ոսկե համամասնությամբ են կառուցվել նաև մեքսիկական բուրգերը: Ներդաշնակ համամասնության նկատմամբ մեծ հետաքրքրասիրություն է ցուցաբերվել հատկապես Վերածննդի դարաշրջանում: Իտալացի մաթեմատիկոս, վանական Լուկա Պաչոլինին «Աստվածային համամասնության մասին» վերնագրով գիրքն ամբողջությամբ նվիրել է դրան: Այդ գրքում մարդու ընկալման վրա ներդաշնակ համամասնությամբ հատման թողած ազդեցությունը բնութագրվում է այսպիսի բառերով՝ էական, անասելի, սքանչելի, անբացատրելի, անհանգչելի, գերազանց, վեհացնող և անհասանելի: Գրքի պատկերազարդումը կատարել է Վերածննդի դարաշրջանի արվեստի մեծագույն վարպետ, գիտնական և գյուտարար Լեոնարդո դա Վինչին: Հենց նա էլ ներդաշնակ համամասնությամբ հատումն անվանել է ոսկե հատում, և մինչև օրս շրջանառվում է այդ անվանումը:

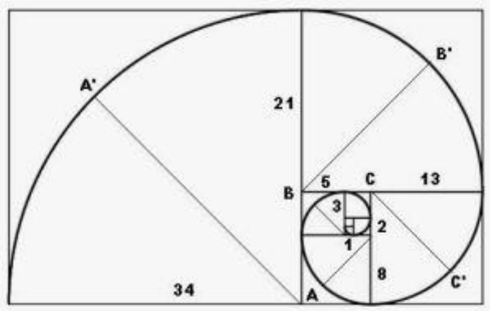
Գործնականում կիրառվում է մոտավոր ոսկե հատումը՝ արտահայտված 2/3, 3/5, 5/8, 8/13..... կոտորակներով, որտեղ 2, 3, 5, 8, 13 Ֆիբոնաչիի թվերն են (յուրաքանչյուր անդամը, սկսած երրորդից, հավասար է նախորդ երկուսի գումարին)։ Ոսկե հատման, հատկապես Ֆիբոնաչիի շարքի հարաբերությունները մեծապես կիրառվել են հայկական միջնադարյան ճարտարապետական ստեղծագործություններում (Ոսկեպար, Մաստարա, Թալինի Կաթողիկե, Գառնիհովիտ և այլն)։

Աշակերտներն ուսունասիրեցին ճագարների մասին հայտնի խնդիրը։



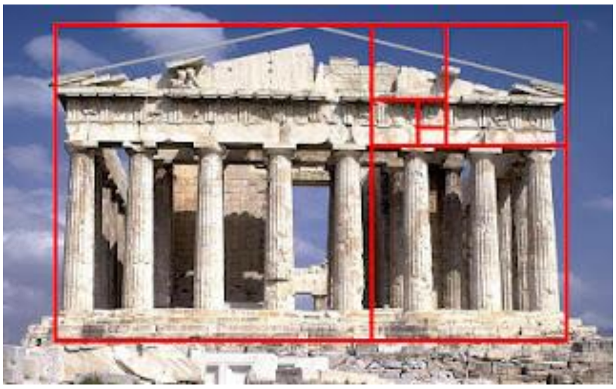
Եթե վերցնենք Ֆիբոնաչիի շարքի որևէ հաջորդական զույգ և բաժանենք մեծ թիվը փոքրի, ապա մեր արդյունքը կմոտենա ոսկե հատմանը։ Ֆիբոնաչիի հաջորդականության հայտնագործումից հետո բնության մեջ հայտնաբերվեցին երևույթներ՝ խիստ հիշեցնող Ֆիբոնաչիի շարքի հաջորդականությունը։ Դրանցից մեկը կոչվում է *ֆիլլոտակսիս* (տերևադասավորություն), համաձայն որի դասավորված են, օրինակ, արևածաղկի սերմերը ծաղկի մեջ, արքայախնձորի կառուցվածքը, որոնք ևս աշակերտներն ուսումնասիրեցին։

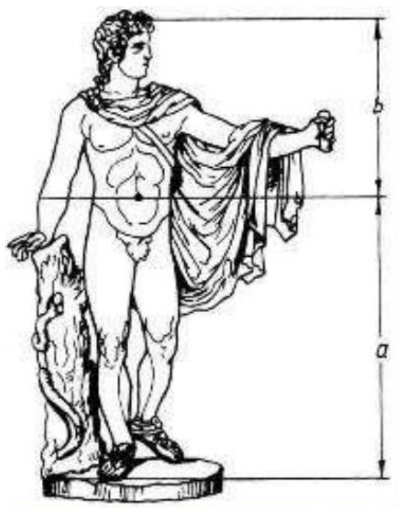
Ոսկե ուղղանկյունը բաժանվում է քառակուսու և մեկ այլ փոքր ոսկե ուղղանկյան, որը ևս բաժանվում է քառակուսու և այլ ոսկե ուղղանկյան: Այս բաժանումը կարող է անվերջ շարունակվել: Եթե անցկացնենք կոր մեր քառակուսիների անկյուններով, ապա կստանանք Արքիմեդի պարույրը:



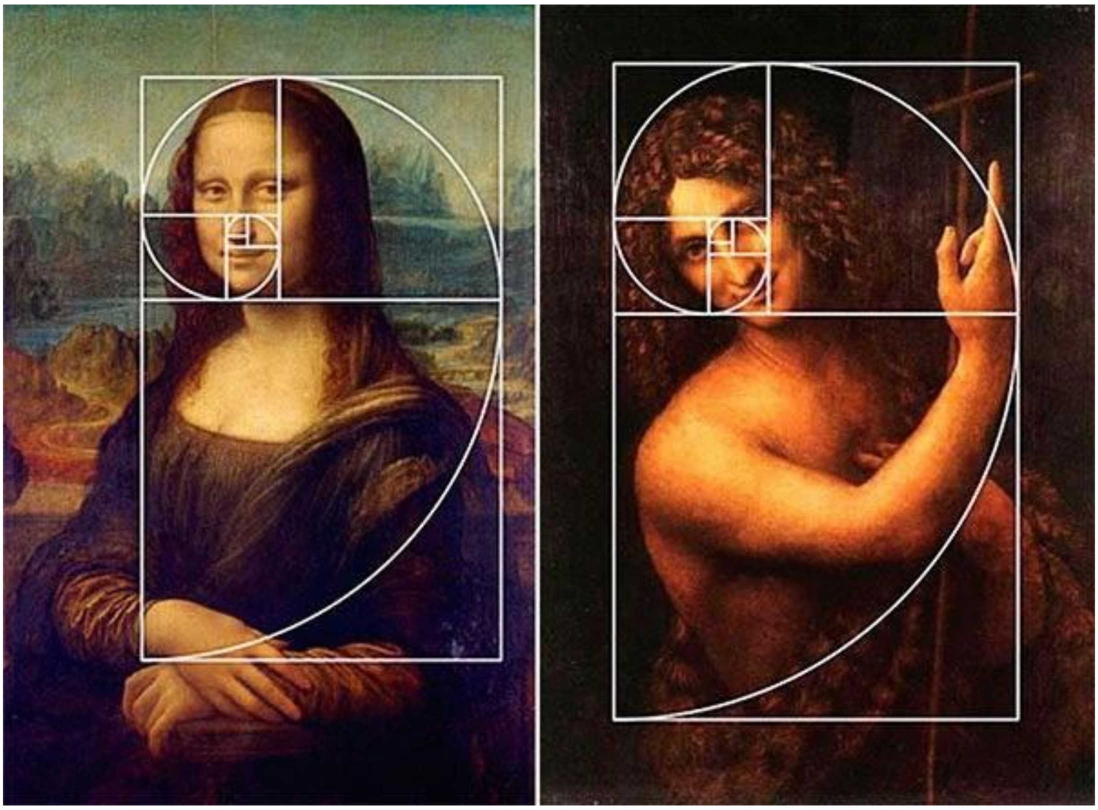
Ծիր Կաթինը, ուր գտնվում են Արեգակնային համաստեղությունը և Երկիրը, նույնպես կառուցված է ոսկե հատման սկզբունքով:

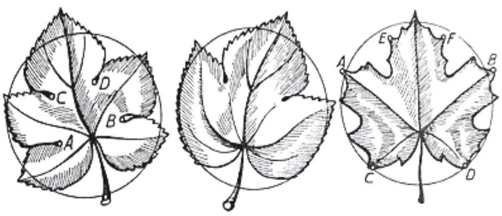
Շատ ուսումնասիրողների կարծիքով՝ հենց ոսկե հատումը կիրառելու շնորհիվ են ձեռք բերում կերպարվեստի, ճարտարապետական, երաժշտական ստեղծագործությունների գեղարվեստական տպավորչությունը և գրավչությունը: Հին հունական ճարտարապետության ամենագեղեցիկ աշխատանքներից մեկը Պարթենոնի տաճարն է, որի կառուցման ժամանակ կիրառվել է ոսկե հատումը: Ոսկե հատումն իր քանդակներում օգտագործում էր հայտնի քանդակագործ Ֆիդիասը:

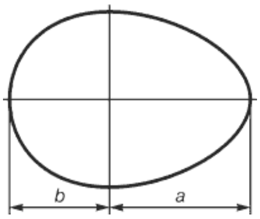


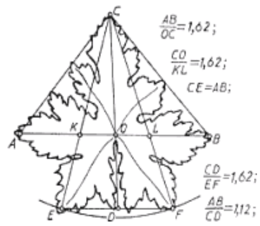


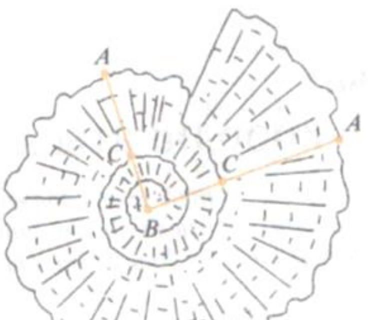
Անդրադառնալով գեղանկարչության ոսկե հատման օրինակներին՝ մենք չենք կարող անտեսել Լեոնարդո դա Վինչիի աշխատանքները: Ուշադիր նայենք Մոնա Լիզայի դիմանկարին: Կտավի կոմպոզիցիան կառուցված է ոսկե եռանկյուններով:

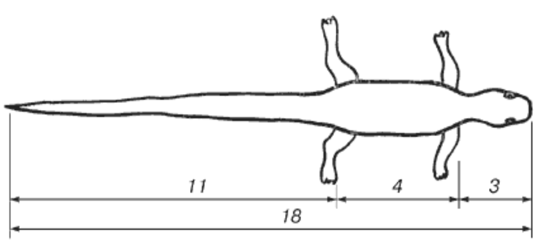


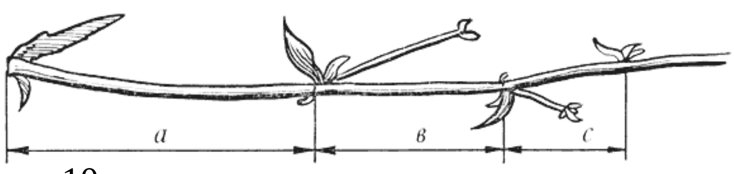












ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Աշակերտներն ուսումնասիրել էին նաև ոսկե հատումը մարդու մարմնակազմության մեջ՝ չափելով իրենց թևերի ու ձեռքերի և նրանց մասերի երկարությունները, հաշվելով դրանց հարաբերությունները:

Ուսումնասիրեցին նաև ջութակի կառուցվածքը, համացանցում գտան Ֆիբոնաչիի թվերով ստեղծված երաժշտական ստեղծագործություն:

Ուսումնասիրելով առօրյայում օգտագործվող իրերն ու սարքավորումները՝ պարզեցին, որ շատերի տներում պահարանների և սառնարանների կառուցվածքում դրանց մասերը պատրաստված են ոսկե հատմամբ:

Ընդհանուր առմամբ՝ եկան այն եզրակացության, որ ոսկե հատմամբ պատրաստված իրերը, արվեստի և մշակույթի գործերն ավելի հաճելի են մարդու աչքի համար, մեզ դրանք թվում են ավելի գեղեցիկ: Նույնը վերաբերում է նաև մարդկանց մարմնակազմությանը:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Актуальные вопросы формирования интереса в обучении /Подред. Г. И. Щукиной. М.: Просвещение, 1984
2. Воспитание интереса к изучению математики в школе /Кузнецов Б. Н.: Иркутск, 1989
3. Մաթեմատիկա 6, հեղինակներ՝ Բ. Նահապետյան, Ա. Աբրահամյան, Երևան, Մանմար, 2016
4. Երկրաչափություն 10, հեղինակ՝ Ս. Է. Հակոբյան, Երևան, Տիգրան Մեծ, 2009
5. https://www.youtube.com/watch?v=xjo_l4tKR_Q
6. https://www.youtube.com/watch?v=NqDT6jk20pw&t=5s
7. Մասնակցային մշակույթ և կոմպետենցիաների վրա հիմնված ուսուցում, հեղինակային կազմ՝ Միշա Թադևոսյան, Սերոբ Խաչատրյան, Վահրամ Սողոմոնյան, Գրիգորի Հովհաննիսյան, Նարեկ Մեյրոյան, Մարգարիտա Մաթևոսյան, Բուրքհարդ Շմիտ, Դորեն Մոդել, 2020