«ԻՆՏԵՐԱԿՏԻՎ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄ»
ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2023

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ	Մաթեմատիկական մոդելավորումը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում
ԱՌԱՐԿԱ	Մաթեմատիկա
ՀԵՂԻՆԱԿ	Քեռյան Ռուզաննա
ՄԱՐԶ	Երևան
ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ	«Շ. Շահամիրյան» Կրթահամալիր

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Կիրառական շատ խնդիրներ լուծելու համար անհրաժեշտ է դրանք ձևակերպել մաթեմատիկական լեզվով՝ այսինքն խնդիրները բերել մաթեմատիկական խնդրի:

Այդ գործընթացը կոչվում է խնդրի **մաթեմատիկական մոդելավորում**: Մաթեմատիկական մոդելավորումը նպատակաուղղված է մաթեմատիկական լեզվի միջոցով բնության երևույթների գրառմանը, նրա առարկաների պատկերմանը և մաթեմատիկական ապարատի միջոցով դրանց հետագա ուսումնասիրության իրականացմանը:

Մաթեմատիկական մոդելների և դրանց կառուցման եղանակների հետ դպրոցականները ծանոթանում են մաթեմատիկայի դասաժամերին, սկսած տարրական դպրոցից՝ տեքստային խնդիրների լուծման ընթացքում:

Մաթեմատիկական մոդելավորումը հիմնարար դեր է կատարում բնագիտության ոլորտում՝ հատկապես ժամանակակից մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական ֆիզիկայի բնագավառներում: Այն կարևոր դեր է կատարում նաև հասարակական գիտություններում՝ սոցիոլոգիա, լեզվաբանություն և այլն:

Մաթեմատիկական մոդելների կառուցման ձևերն ու եղանակները կարևոր են նաև մաթեմատիկայի ուսուցման հարցերում՝ մաթեմատիկայի դպրոցական խնդիրներում: Այս հարցերի վերաբերյալ հրատարակվել և հրատարակվում են գիտական և մեթոդական բազմաթիվ հոդվածներ: Դրանցով է պայմանավորված թեմայի **արդիականությունը:**

Մաթեմատիկական մոդելավորման մեթոդը գիտական ուսումնասիրություննե-րում և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում իրականացվում է չորս փուլերով: [1]

Առաջին փուլ: Դիտարկվող առարկայի, երևույթի, կիրառական խնդրի խորը ուսումնասիրությունն և նրա մաթեմատիկական մոդելի կառուցում:

Յուրաքանչյուր խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կառուցելու համար պետք է սովորել թարգմանել խնդրի պայմանը՝ սովորական լեզվից մաթեմատիկական լեզվի:

[1] Գիտամեթոդական ամսագիր <<Մաթեմատիկան դպրոցում>> թիվ 5, 2017թ.

Երկրորդ փուլ: Կառուցած մաթեմատիկական մոդելի հետազոտումը, ինչն հանգում է մոդելի՝ որպես մաթեմատիկական բանաձևի կամ խնդրի լուծման:

Երրորդ փուլ: Ստացված մաթեմատիկական խնդրի լուծման արդյունքների օգնությամբ դիտարկվող կիրառական խնդրի լուծում:

Չորրորդ փուլ: Կիրառական խնդրի ուսումնասիրություն նրա մոդելի միջոցով. մաթեմատիկական լուծման արդյունքների, ստացված բանաձևերի, պատասխանի դիտարկման միջոցով կիրառական խնդրի հետագա ընդհանրացումների կամ սահմանափակումների և այլ հարցերի պարզաբանում:

Հարկ է նկատել, որ մաթեմատիկայի ուսուցիչների մեծ մասը երկրորդ փուլով ավարտված է համարում կիրառական խնդրի լուծման գործընթացը: Մինչդեռ, այս վերջին փուլերը հնարավորություն են տալիս քննարկել և խորացնել կիրառական ոլորտի հետ մաթեմատիկայի կապը, ցույց տալ, որ սովորողը լուծում է ոչ թե մաթեմատիկական, այլ կիրառական ոլորտի խնդիր:

Մաթեմատիկական մոդելների դերը մեծ է ուսուցման գործընթացի այնպիսի կարևոր հարցերում, ինչպիսիք են մաթեմատիկական հասկացությունների և թեորեմների ուսուցումը:

Հասկացությունների պարագայում խոսքը գնում է կիրառական ոլորտի այն առարկաների և երևույթների ուսուցման անհրաժեշտության մասին, որոնց մաթեմատիկական մոդելներն են հանդիսանում այդ հասկացությունները: Սա առաջին հերթին վերաբերում է հանրահաշվի և մաթեմատիկական անալիզի հասկացություններին:

Երկրաչափական նյութի ուսուցումը նման մեկնաբանությունների կարիք չունի. Քեոփսի բուրգի մաթեմատիկական մոդելը բուրգն է, և սա աշակերտին հասկացնելու համար ուսուցչից հատուկ ջանքեր չեն պահանջվում:

Իսկ ահա ի՞նչ գործառույթներ են իրականացնում հանրահաշվական գործողությունները, ֆունկցիան, լոգարիթմը կամ ածանցյալը մաթեմատիկայի կիրառական ոլորտում, ինչպիսի՞ լեզվական արտահայտություններ ունեն դրանք և նմանատիպ այլ հարցեր հիմնարար բացատրության կարիք ունեն: Նկատենք, որ հաճախ աշակերտը կիրառական խնդիրը չի կարողանում լուծել նրանում առկա կիրառական ոլորտի հասկացությունների մաթեմատիկական մոդելները չիմանալու պատճառով:

Նույնը վերաբերում է նաև թեորեմների ուսուցման մեթոդիկային: Այստեղ էլ թեորեմի նկատմամբ հետաքրքրությունը մեծացնելու, նրա ուսուցումը ավելի մատչելի դարձնելու համար, ուսուցիչը պետք է նախապես նկարագրի և լուծի կիրառական այնպիսի խնդիր, որի մաթեմատիկական մոդելը հանգում է տվյալ թեորեմին: [2]

Այս աշխատանքում անդրադառնալու ենք մաթեմատիկայի դասընթացի մոդելավորման հետևյալ կարևոր խնդիրներին՝

- տեքստային խնդիրներ,
- մեծությունների մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոշման խնդիրներ:

Հետազոտական աշխատանքի նպատակն է `

- Բացահայտել մաթեմատիկական մոդելավորման դերը և կարևորությունը մաթեմատիկայի ուսուցման հարցերում, ինչպես նաև այլ առարկաների հետ դրանց կապի ուսումնասիրությունը:
- Ուսումնասիրել կիրառական որոշ խնդիրների մաթեմատիկական մոդելների կառուցման եղանակները:
- Զարգացնել մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում այդ մոդելների ուսուցման մեթոդիկա:

ԳԼՈՒԽ 1

[2] Գիտամեթոդական ամսագիր <<Մաթեմատիկան դպրոցում>> թիվ 5, 2017թ.

ՏԵՔՍՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՈՒՄԸ

Դպրոցական մաթեմատիկական կրթության կարևոր նպատակներից մեկը աշակերտների մոտ պարզագույն իրական գործընթացների մաթեմատիկական մոդելների կառուցման, ըստ մաթեմատիկական մոդելների այդ գործընթացների ուսումնասիրության, միևնույն մաթեմատիկական մոդելով նկարագրվող գործընթացներում ընդհանուրը տեսնելու ունակությունների ձևավորումն է:

Միևնույն ժամանակ կարևոր են աշակերտների գործունեության ինչպես ալգորիթմային, այնպես էլ էվրիստիկ բաղադրիչները, նրանց ստեղծագործական ներուժի բացահայտումը: Հասկանալի է, որ նշված նպատակների իրագործման մեջ կարևոր դերը պատկանում է տեքստային խնդիրներին:

Ինչպիսի մոդել էլ կիրառվի տեքստային խնդիրների լուծումներում՝ թվաբանական արտահայտություն, հավասարություն, անհավասարություն կամ դրանց համակարգը, գրաֆիկ և այլն, աշակերտը մոդելը կազմելիս պետք է ցուցաբերի ելակետային իրավիճակի ընկալում, հնարամտություն, առկա գիտելիքների և պատկերացումների համակարգավորման, իր կողմից կուտակած փորձի նպատակաուղղված կիրառման ունակություն:

Ուսումնասիրելով դպրոցական դասընթացում առկա տեքստային խնդիրները, դրանք կարելի է բաժանել մի քանի խմբերի՝

- Մարմնի արագության,անցած ճանապարհի,ծախսած ժամանակի վերաբերյալ խնդիրներ
- Համաձուլվածքների վերաբերյալ խնդիրներ
- Համատեղ աշխատանքի վերաբերյալ խնդիրներ:

Քննարկենք տեքստային մի շարք խնդիրներ և ուսումնասիրենք այդ խնդիրների մաթեմատիկական մոդելավորման հարցը, ինչպես նաև այդ մոդելավորումից առաջացած մաթեմատիկական խնդիրների լուծումները:

Համատեղ աշխատանքի վերաբերյալ խնդիրներ:

Խնդիր 1: Երեք բրիգադ միասին աշխատելով ճանապարհը կարող են նորոգել 8 օրում: Այդ նույն աշխատանքը կատարելու համար երկրորդ բրիգադին անհրաժեշտ է

8 օր ավելի ժամանակ, քան առաջինին, և երկու անգամ քիչ՝ քան երրորդին: Քանի՞ օրում կնորոգի ճանապարհը բրիգադներից յուրաքանչյուրը: [3]

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար կատարենք նշանակում:

Ենթադրենք երկրորդ բրիգադը աշխատանքը կատարում է x օրում: Նրա արտադրողականությունը՝ այսինքն 1 օրում կատարած աշխատանքը, կլինի $\frac{1}{x}$:

Առաջին բրիգադը այդ նույն աշխատանքը կկատարի $x-8$ օրում, իսկ արտադրողականությունը կլինի՝ $\frac{1}{x-8}$:

Երրորդ բրիգադը այդ նույն աշխատանքը կկատարի $2x$ օրում, իսկ արտադրողականությունը կլինի՝ $\frac{1}{2x}$:

Ըստ պայմանի նրանք միասին աշխատելով այդ աշխատանքը կատարում են 8 օրում, և նրանց արտադրողականությունը կլինի՝ $\frac{1}{8}$:

Կազմենք հավասարումը ըստ արտադրողականության:

$$\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{8}\frac{2x+2x-16+x-8}{2x(x-8)}=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow 2x(x-8)=8(5x-24)$$

$$\Rightarrow 2x^2-56x+192=0 \Leftrightarrow x^2-28x+96=0$$

Այն պարզեցնելուց հետո ստանում ենք մեկ անհայտով քառակուսային հավասարում: Լուծենք այն:

$$D=b^2-4ac=784-384=400=20^2 x_1=\frac{28+20}{2}=24, \quad x_2=\frac{28-20}{2}=4$$

Մենք ստացանք երկու լուծում, դրանցից մեկը՝ $x_2=4$, չի բավարարում խնդրի պայմաններին:

Եվ անցնելով նշանակմանը, ստանում ենք, որ երկրորդ բրիգադը աշխատանքը կատարում է 24 օրում, առաջին բրիգադը՝ 24-8=16 օրում, իսկ երրորդ բրիգադը՝ $2\cdot 24=48$օրում:

[3] Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 10-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2009թ., 208 էջ:

Խնդիր 2: Պատշարների առաջին և երկրորդ բրիգադները միասին տան պատերը շարում են 50 օրում: Առաջին և երրորդ բրիգադները տան պատերը շարում են նույնպես 50 օրում, իսկ երկրորդ և երրորդ բրիգադները՝ 100 օրում: Քանի՞ օրում կշարեն պատերը 3 բրիգադը միասին: [4]

<u>Լուծում</u>: Խնդիրը լուծելու համար կատարենք նշանակում:

Ենթադրենք առաջին բրիգադը տան պատերը շարում է x օրում: Նրա արտադրողականությունը՝ այսինքն 1 օրում կատարած աշխատանքը, կլինի՝ $\frac{1}{x}$:

Երկրորդ բրիգադը այդ նույն պատերը կշարի y օրում, իսկ արտադրողականությունը կլինի՝ $\frac{1}{y}$:

Երրորդ բրիգադը՝ կշարի z օրում, իսկ արտադրողականությունը կլինի՝ $\frac{1}{z}$:

Ըստ պայմանի առաջին և երկրորդ բրիգադները միասին տան պատերը շարում են 50 օրում, այսինքն նրանց արտադրողականությունների գումարը կլինի $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{50}$:

Առաջին և երրորդ բրիգադները նույնպես շարում են 50 օրում, հետևաբար $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{50}$: Իսկ երկրորդ և երրորդ բրիգադները տան պատերը շարում են 100 օրում, այսինքն՝ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{100}$:

Այսպիսով՝ $\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{50} : \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{50}\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{100}$ /1/

Ստացանք երեք անհայտով հավասարումների համակարգ:

Այն լուծելու համար սկզբից համակարգի առաջին տողից հանենք երկրորդ տողը և կստանանք՝

$$\{\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{50}\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{100} \quad /2/$$

Առաջին հավասարումից կստանանք, որ $\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ և տեղադրելով այն երրորդ հավասարման մեջ կստանանք՝

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{2}{y}=\frac{1}{100} \quad \Rightarrow y=200 \ \Rightarrow \ z=200$$

Տեղադրենք ստացվածը /2/ համակարգի մեջ երկրորդ հավասարման մեջ կստանանք՝

[4] Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 12-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2011թ., 208 էջ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{200}=\frac{1}{50}\quad\frac{1}{x}=\frac{1}{50}-\frac{1}{200}\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}=\frac{3}{200}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{200}{3}$$

Երեք օրում միասին նրանց արտադրողականությունների գումարը կլինի՝

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\quad\frac{1}{a}=\frac{3}{200}+\frac{1}{200}+\frac{1}{200}\quad\frac{1}{a}=\frac{1}{40}\quad\Rightarrow a=40$$

Ստացանք, որ երեք բրիգադները միասին տան պատերը կշարեն 40 օրում:

Համատեղ աշխատանքի վերաբերյալ տեքստային խնդիրներ լուծելիս պետք է իմանալ հետևյալ մեծությունների միջև կապը՝ արտադրողականություն, աշխատանք և ժամանակ: Իսկ այդ կապը իմանալու համար պետք է հասկանա <<արտադրողականություն>> գաղափարը: Ուսուցիչը աշակերտին պետք է բացատրի որ արտադրողականությունը միավոր ժամանակում կատարած աշխատանքն է:

Ճանապարհ, ժամանակ արագության վերաբերյալ խնդիրներ:

Խնդիր 3: *Հ*եծանվորդի ճանապարհորդությունը A-ից B տևեց 2 ժամ: B-ից A վերադառնալիս առաջին 8 կմ անցնելով նույն արագությամբ, իսկ մնացած մասում արագությունը մեծացնելով 2կմ/ժ-ով, հեծանվորդը ծախսեց 10 րոպե քիչ ժամանակ, քան A-ից B գնալիս: Գտնել A-ից B հեռավորությունը: [5]

Լուծում: Այս խնդիրը նախ ներկայացնենք մաթեմատիկական լեզվով: Դրա համար նախ կատարենք նշանակումներ:

Նշանակենք հեծանվորդի արագությունը v-ով, իսկ A-ից B հեռավորությունը s-ով

A-ից B գնալիս հեծանվորդը ծախսել է 2 ժամ, այսինքն՝ $s=2v\ \ \Rightarrow\ \ v=\frac{s}{2}$:

B-ից A վերադառնալիս առաջին 8կմ-ը նա անցել է նույն v արագությամբ, հետևաբար ծախսել է $\frac{8}{v}$ ժամանակ: Մնացած ճանապարհը՝ $s-8$ նա անցել է $v+2$ արագությամբ և ծախսել է $\frac{s-8}{v+2}$ ժամանակ:

A-ից B գնալիս հեծանվորդը ծախսել է 2 ժամ, իսկ B-ից A գնալիս 10 րոպե քիչ, այսինքն $\frac{1}{6}$ ժամ քիչ՝ $2-\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$:

[5] Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 11-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2010թ., 128 էջ

Կազմենք հավասարումը ըստ ժամանակի՝

$$\frac{8}{v}+\frac{s-8}{v+2}=\frac{11}{6}$$

Տեղադրենք $v=\frac{s}{2}$: Կստանանք $\frac{16}{s}+\frac{2s-16}{s+4}=\frac{11}{6}$ Ձևափոխելով այն կստանանք քառակուսային հավասարում:

$$\frac{64+2s^2}{s(s+4)}=\frac{11}{6}384+12s^2=11s^2+44ss^2-44s+384=0D=1936-1536=400$$
$$=20^2x_1=\frac{44+20}{2}=32x_2=\frac{44-20}{2}=12$$

Արդյունքում ստացանք երկու լուծում, որոնցից յուրաքանչյուրը բավարարում է խնդրի պայմաններին: Այսինքն A-ից B հեռավորությունը կամ 32կմ է, կամ 12 կմ:

Խնդիր 4: Ճանապարհորդը ճանապարհի 5/8-ն անցավ ավտոմեքենայով , իսկ մնացած մասը՝ մոտորանավակով: Մոտորանավակի արագությունը 20կմ/ժ-ով փոքր է ավտոմեքենայի արագությունից: Ավտոմեքենայով ճանապարհին անցավ 15րոպեով ավելի, քան մոտորանավակով: Գտնել ավտոմեքենայի և մոտորանավակի արագությունները, եթե ամբողջ ճանապարհը 160 կմ է: [6]

Լուծում: Կատարենք նշանակում:

Ավտոմեքենայի արագությունը նշանակենք v_1-ով, իսկ մոտորանավակի արագությունը՝ v_2-ով:

Ճանապարհորդը ճանապարհի 5/8-ն անցավ ավտոմեքենայով, այսինքն $160\cdot\frac{5}{8}=$ 100կմ-ը, իսկ մոտորանավակով անցել է $160-100=60$կմ:

Բացի այդ մոտորանավակի արագությունը 20կմ/ժ-ով փոքր է ավտոմեքենայի արագությունից, այսինքն՝ $v_2+20=v_1$:

Ավտոմեքենայով ճանապարհին անցավ 15րոպեով ավելի, քան մոտորանավակով: Այսինքն՝ $\frac{100}{v_1}-\frac{15}{60}=\frac{60}{v_2}$:

Այսպիսով՝

Ստանում ենք խնդրի լուծման երկու տարբերակ:

[6] Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 12-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2011թ., 208 էջ

1) Ավտոմեքենայի արագությունը 80կմ/ժ է, իսկ մոտորանավակինը՝ 60կմ/ժ:
2) Ավտոմեքենայի արագությունը 100կմ/ժ է, իսկ մոտորանավակինը՝ 80կմ/ժ:

Այս տիպի խնդիրներ լուծելիս աշակերտները պետք է նախ վերլուծեն խնդիրը, այնուհետև պատասխանեն հետևյալ հարցերին՝

- ✔ Որպեսզի կարողանանք պատասխանել խնդրի հարցին, ինչպիսի մեծություններ պետք է հայտնի լինի:
- ✔ Մեծություններից ո՞րն է հայտնի և ո՞րն է անհայտ:
- ✔ Ինչ պետք է իմանալ, որպեսզի գտնենք այդ մեծությունը:
- ✔ Ինչպե՞ս այն գտնել, ելնելով խնդրի պայմաններից:

Ու աշակերտը պետք է լավ իմանա <<ճանապարհ>>, <<արագություն>> և <<ժամանակ>> մեծությունների կապը:

Համաձուլվածքների վերաբերյալ խնդիրներ:

Խնդիր 5: Համաձուլվածքներից մեկը պարունակում է 20% պղինձ, իսկ մյուսը 30%: Որքա՞ն պետք է վերցնել յուրաքանչյուր համաձուլվածքից 27% պղինձ պարունակող 10կգ համաձուլվածք ձուլելու համար: [7]

Լուծում: Ենթադրենք առաջին համաձուլվածքից վերցնում ենք Aկգ, իսկ երկրորդ համաձուլվածքից Bկգ: Քանի որ առաջին համաձուլվածքը պարունակում է 20% պղինձ, հետևաբար պղնձի զանգվածը այդ համաձուլվածքում կլինի $20 \cdot \frac{A}{100} = \frac{A}{5}$: Երկրորդ համաձուլվածքը պարունակում է 30% պղինձ, պղնձի զանգվածը կլինի՝ $30 \cdot \frac{B}{100} = \frac{3B}{10}$:

Քանի որ պետք է ստանանք 10կգ զանգվածով համաձուլվածք հետևաբար $A + B = 10$: Որպեսզի ստանանք 27% պղինձ պարունակող 10կգ համաձուլվածք, պետք է այն պարունակի $10 \cdot \frac{27}{100} = 2.7$կգ պղինձ: Այսինքն՝ $\frac{A}{5} + \frac{3B}{10} = 2.7$:

Այսպիսով՝ $\{A + B = 10 \ \frac{A}{5} + \frac{3B}{10} = 2.7$

Ստացանք երկու անհայտով հավասարումների համակարգ: Լուծենք այն տեղադրման եղանակով:

[7] Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 12-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2011թ., 208 էջ

$$\begin{cases} A = 10 - B \\ 2A + 3B = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 10 - B \\ 20 + B = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 7 \end{cases}$$

Այսպիսով, ստացանք, որ առաջին համաձուլվածքից պետք է վերցնել 3կգ, իսկ երկրորդից՝ 7կգ:

Խնդիր 6: Երբ աղի լուծույթին ավելացրեցին 200գրամ ջուր, աղի խտությունն ընկավ 1,5 անգամ: Գտնել լուծույթի սկզբնական քաշը: [8]

Լուծում: Խտություն ասելով հասկանում ենք զանգվածի հարաբերությունը ծավալին: Այս խնդրում ենթադրվում է, որ աղի լուծույթը զբաղեցնում է միավոր ծավալ:

Ենթադրենք, որ սկզբում կար mգ լուծույթ, և աղի խտությունը կլինի՝ $\rho = m$:

Երբ լուծույթին ավելացնենք 200գրամ ջուր ապա զանգվածը կլինի $m + 200$գ, իսկ խտությունը կլինի՝ $\rho_1 = m + 200$: Քանի որ սկզբնական խտությունը ընկել է 1,5 անգամ հետևաբար՝

$$1.5\rho = \rho_1 \quad 1.5m = m + 200 \quad 0.5m = 200 \quad m = 400$$

Այսպիսով սկզբում եղել էր 400 գրամ աղի լուծույթ:

Համաձուլվածքների վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս պետք է ուշադրություն դարձնել <<տոկոսներ>>, <<մասեր>> գաղափարներին: Ինչպես նաև աշակերտները պետք է վերհիշեն թե որ մեծություններն են ուղիղ համեմատական, որոնք հակադարձ:

Այժմ գրենք այսպես ասած <<կանոններ>>, որոնք կօգնեն սովորողներին լուծել տեքստային խնդիրները: [9]

- Ուշադիր ուսումնասիրիր խնդրի պայմանները, եթե անհրաժեշտ է կատարիր գծագիր:
- Պարզիր, թե ինչպիսի մեծությունների մասին է խոսվում տվյալ խնդրում:
- Պարզիր թե այդ մեծություններից որոնք են հայտնի, և որոնք՝ ոչ: Ներմուծիր փոփոխական:
- Կազմիր հավասարումը:

[8] Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 12-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2011թ., 208 էջ
[9] https://studopedia.ru/view_mathematica.php?id=18

- Լուծիր այն։
- Կատարիր վերլուծություն։

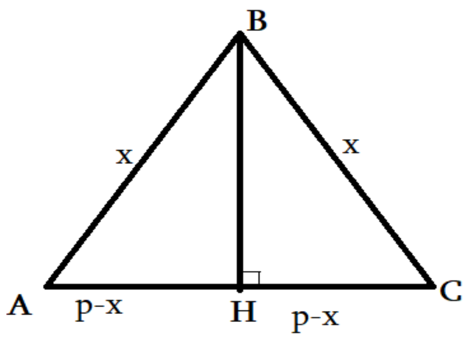
ԳԼՈՒԽ 2

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ, ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՎ ԱՅԼ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ և ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ և ԴՐԱՆՑ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՈՒՄԸ

Այս գլխում ուսումնասիրելու ենք դպրոցական դասընթացից երկրաչափական խնդիրներ, որոնք հանգում են մի փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումների /մեծագույն և փոքրագույն արժեքների/ որոշման խնդիրներին: [10]

Խնդիր 1: Գտնել $2p$ պարագիծ ունեցող այն հավասարասրուն եռանկյան սրունքը, որն ունի ամենամեծ մակերես: [11]

Լուծում: Նախ կատարենք նշանակում: Եռանկյան սրունքը նշանակենք x-ով: Այստեղից բխում է, որ $AC = 2p - 2AB = 2p - 2x = 2(p - x)$: Տանենք եռանկյան BH բարձրությունը:



ΔABH-ից ըստ Պյութագորասի թեորեմի կստանանք բարձրությունը՝ $BH = h = \sqrt{x^2 - (p - x)^2} = \sqrt{2px - p^2}$

Հաշվենք եռանկյան մակերեսը՝

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2(p - x) \cdot \sqrt{2px - p^2}\, S(x) = (p - x)\sqrt{2px - p^2}$$

Այսպիսով ստանում ենք x-ից կախված ֆունկցիա, որի որոշման տիրույթն է $x \in (\frac{p}{2}; p)$: Այս ֆունկցիան էլ հանդիսանում է մեր խնդրի մաթեմատիկական մոդելը:

---

[10] https://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/DIFFERENTSIALNIE_URAVNENIYA.html

[11] Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 12-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2011թ., 208 էջ

Դիտարկենք $y = f(x)$ *ֆունկցիա, որը որոշված է* $(a; b)$ *միջակայքում:*

Ենթադրենք այդ միջակայքում ֆունկցիան անընդհատ է և ունի անընդհատ ածանցյալ: Որպեսզի որոշենք ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը $(a; b)$ *միջակայքում, պետք է գտնենք ֆունկցիայի բոլոր կրիտիկական կետերը, հաշվենք ֆունկցիայի արժեքները այդ կետերում և համեմատենք այդ արժեքները միջակայքի ծայրակետերի ֆունկցիայի ընդունած արժեքների հետ: Դրանցից մեծագույնը կլինի ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը* $(a; b)$ *միջակայքում, իսկ փոքրագույնը ՝փոքրագույն արժեքը* $(a; b)$ *միջակայքում:* [12]

Պետք է գտնել այս ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը:Նախ հաշվենք ֆունկցիայի ածանցյալը:

$$S'(x) = -\sqrt{2px - p^2} + \frac{1}{\sqrt{2px - p^2}} \cdot p(p - x) = \frac{-2px + p^2 + p^2 - px}{\sqrt{2px - p^2}} = \frac{2p^2 - 3px}{\sqrt{2px - p^2}} S'(x)$$

$$= 0 \Rightarrow \frac{2p^2 - 3px}{\sqrt{2px - p^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}p \in \left(\frac{p}{2}; p\right)$$

Հաշվենք ֆունկցիայի արժեքը կիտիկական կետերում: $S(p) = S(\frac{p}{2}) = 0$, $S\left(\frac{2}{3}p\right) = \frac{\sqrt{3}p^3}{9} > 0$

Այսպիսով, ստացանք որ $2p$ պարագիծ ունեցող հավասարասրուն եռանկյունը կունենա ամենամեծ մակերես, եթե նա սրունքը հավասար լինի՝ $x = \frac{2}{3}p$:

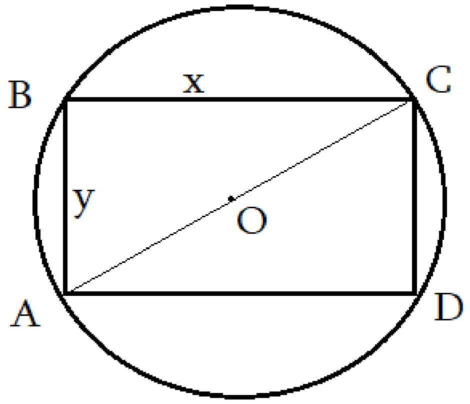
Խնդիր 2: Գտնել R շառավղով շրջանին ներգծած այն ուղղանկյան չափերը, որն ունի ամենամեծ մակերեսը: [13]

Լուծում: Նախ կատարենք նշանակում՝ ուղղանկյան երկարությունը x-ով, իսկ լայնությունը՝ y-ով: Նախ գտնենք ուղղանկյան երկարության, լայնության և արտագծած շրջանագծի շառավիղի միջև կապը: Դրա համար դիտարկենք ուղղանկյուն եռանկյուն ΔABC: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝

$x^2 + y^2 = AC^2$, քանի որ $AC = 2R \Rightarrow \; x^2 + y^2 = 4R^2 \quad \Rightarrow y = \sqrt{4R^2 - x^2}$

[12] Ֆիխտենգոլց Գ.Մ. <<Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ>> ուս. ձեռնարկ / Թարգմ.՝ Վ.Վ. Սաղաթելյան, Ց.Ա. Արաջյան, Հ.Ջ. Խաչատրյան/, Երևան 1970 թ.

[13] Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 11-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2010թ., 128 էջ



Հաշվելով ուղղանկյան մակերեսը, կստանանք մի փոփոխականի ֆունկցիա, որն էլ կլինի այս խնդրի մաթեմատիկական մոդելը: Եվ այս օրինակում ևս պետք է գտնենք ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը:

$$S_{ABCD} = xy = x\sqrt{4R^2 - x^2}S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2} \qquad x \in (0; 2R)S'(x)$$

$$= \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}S'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 4R^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow \ x = \pm\sqrt{2}R, \ \ \sqrt{2}R \in (0; 2R),$$

$$-\sqrt{2}R \notin (0; 2R)S(0) = S(\sqrt{2}R) = 0,$$

$$S(\sqrt{2}R) = 2R^2 \ \Rightarrow \ x = \sqrt{2}R, y = \sqrt{2}R$$

Այսպիսով ամենամեծ մակերես ունեցող ուղղանկյունը պետք է ունենա վերոնշյալ չափերը:

Խնդիր 3: S մակերես ունեցող $ABCD$ զուգահեռագծի C գագաթով տարված ուղիղը AB և AD ճառագայթները հատում է համապատասխանաբար M և N կետերում: Ինչպիսի՞ փոքրագույն մակերես կարող է ունենալ եռանկյուն AMN-ը: [14]

Լուծում: Նախ տանենք MH և CK բարձրությունները: Դիտարկենք ΔBMC և ΔAMN:

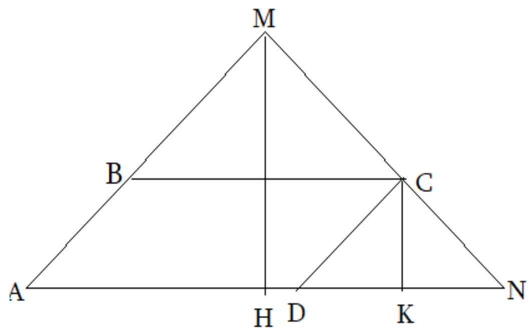
Այս եռանկյուններում $\angle M$-ն ընդհանուր է, $\angle MBC = \angle MAN$ որպես համապատասխան անկյուններ, $\angle MCB = \angle MNA$ որպես համապատասխան անկյուններ:

Նշանակենք $AD = BC = a, \ \ DN = x$

Հետևաբար՝ $\Delta BMC \sim \Delta AMN$:

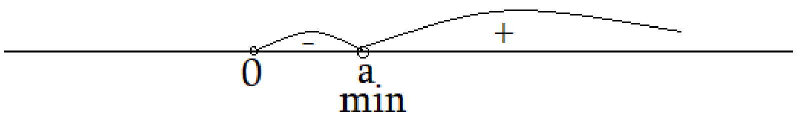
[14] Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 12-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2011թ., 208 էջ

$$\frac{BM}{AM}=\frac{BC}{AN}=\frac{MC}{MN} \Rightarrow \frac{a}{a+x}=\frac{MH-CK}{MH}=1-\frac{CK}{MH}\frac{CK}{MH}=1-\frac{a}{a+x}=\frac{x}{a+x}MH$$
$$=\frac{(a+x)CK}{x}$$



Հաշվենք եռանկյան մակերեսը, որն էլ կլինի այս խնդրի մաթեմատիկական մոդելը:

$$S_{AMN}=S(x)=\frac{1}{2}\cdot(a+x)\cdot\frac{(a+x)CK}{x}=\frac{(a+x)^2CK}{2x}S'(x)=-\frac{2(a+x)h}{4x^2}=\frac{h(x-a)}{2x^2}S'(x)$$
$$=0 \Rightarrow \frac{h(x-a)}{2x^2}=0 \Rightarrow x=a$$



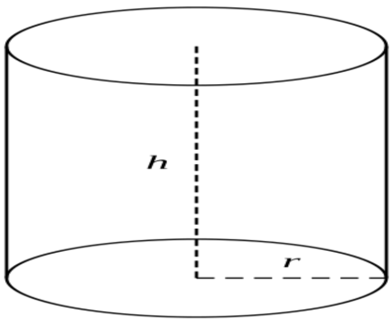
$$S(a)=\frac{4a^2\cdot CK}{4a}=2a\cdot CK=2S$$

Որտեղ S-ը զուգահեռագծի մակերեսն է: Այսպիսով եռանկյան փոքրագույն մակերեսը կլինի $2S$:

Հարթաչափության մեջ այս տիպի խնդիրներ լուծելիս նախ պետք է ուշադրություն դարձվի մակերեսի հաշվման բանաձևերին, արտագծած և ներգծած շրջանագծերի հատկություններին: Այնուհետև մաթեմատիկական մոդելը կառուցելուց հետո պետք է աշակերտը տիրապետի ածանցյալների հաշվմանը, ինչպես նաև ածանցյալի օգնությամբ էքստրեմումների որոշմանը: Այս ամենին հասնելու համար մեծ է ուսուցչի դերը:

Խնդիր 4: Գտնել տրված V ծավալով գլաններից ամենամեծ լրիվ մակերևույթի մակերես ունեցողի հիմքի շառավիղը: [15]

Լուծում: Նշանակենք հիմքի շառավիղը x-ով:



$$S_{\text{լ}} = 2\pi xh + 2\pi x^2 V = \pi x^2 h \;\; \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2} \;\; S(x) = 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2 S'(x)$$

$$= -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x = \frac{-2V + 4\pi x^3}{x^2} S'(x) = 0 = \frac{-2V + 4\pi x^3}{x^2} - 2V + 4\pi x^3 = 0x$$

$$= \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Նմանատիպ տարածաչափական խնդիրներ լուծելիս պետք է ուշադրություն դարձնել տվյալ տարածական մարմնի հատկություններին: Աշակերտը պետք է իմանա տվյալ մարմնի մակերևույթի մակերեսի և ծավալի հաշվման բանաձևերը:

---

[15] Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 12-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2011թ., 208 էջ

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Հետազոտական աշխատանքում քննարկվել են բազմաթիվ հարցեր, որոնք վերաբերվում են մաթեմատիկական մոդելավորմանը:Կիրառական խնդիրների մաթեմատիկական մոդելների կառուցումը կարևոր դեր ունի ոչ միայն բնագիտության համար՝ տեսական և մաթեմատիկական ֆիզիկա, տեսական մեխանիկա, այլև հասարակական գիտություններում՝ լեզվաբանություն, հոգեբանություն,սոցոլոգիա: Հետազոտական աշխատանքում մենք փորձել ենք ցույց տալ մաթեմատիկական մոդելավորման դերը մաթեմատիկայի ուսուցման հարցերում: Ներկա աշխատանքում կառուցվել են պարզագույն մաթեմատիկական մոդելներ՝տեքստային խնդիրներ, մեծությունների մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոշման խնդիրներ,որոնք ընդգրկված են մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ծրագրերում: Մշակվել է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող մաթեմատիկական մոդելների ուսուցման մեթոդիկան:

Հետազոտական աշխատանքը պատրաստելիս ուսումնասիրել ենք մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացը, գիտական, գիտամեթոդական և ուսումնամեթոդական ձեռնարկներ, ամսագրեր և հոդվածներ, որտեղ դիտարկվել են մաթեմատիկական մոդելները և դրանց կառուցման եղանակները:

Աշխատանքի առաջին գլխում մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ավագ դպրոցի դասագրքերից առանձնացրել ենք տեքստային խնդիրներ և քննարկել ենք այդ խնդիրների լուծման հարցերը: Դիտարկել ենք երեք տիպի տեքստային խնդիրներ՝

- Մարմնի արագության,անցած ճանապարհի,ծախսած ժամանակի վերաբերյալ խնդիրներ
- Համաձուլվածքների վերաբերյալ խնդիրներ
- Համատեղ աշխատանքի վերաբերյալ խնդիրներ:

Այս խնդիրների մոդելավորման արդյունքում հանգել ենք հետևյալ մոդելների՝

- ✔ Մեկ անհայտով հավասարման

- ✔ Քառակուսային հավասարման
- ✔ Երկու անհայտով երկու հավասարումների համակարգի
- ✔ Երեք անհայտով երեք հավասարումների համակարգի։

Երկրորդ գլխում ուսումասիրել ենք խնդիրներ, որոնցում պահանջվում է որոշել մեծությունների մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքները։ Ուսումնասիրել ենք դպրոցական դասընթացի այն երկրաչափական խնդիրները, որոնք բերվում են մի փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումների որոշման խնդրին։

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 10-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2009թ., 208 էջ
2. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 11-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2010թ., 128 էջ
3. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> Հանրակրթ. դպր. 12-րդ դաս. դասագիրք, Երևան 2011թ., 208 էջ
4. Գիտամեթոդական ամսագիր <<Մաթեմատիկան դպրոցում>> թիվ 5, 2017թ.
5. Ֆիխտենգոլց Գ.Մ. <<Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ>> ուս. ձեռնարկ / Թարգմ.՝ Վ.Վ. Սաղաթելյան, Ց.Ա. Արաջյան, Հ.Ջ. Խաչատրյան/, Երևան 1970 թ.
6. https://studopedia.ru/view_mathematica.php?id=18
7. https://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/DIFFERENTSIALNIE_URAVNENIYA.html