ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ԳՈՐԻՍԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ

ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՊԱՐԶ ՏԵՍՔԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄ

ԱՌԱՐԿԱ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՀԵՂԻՆԱԿ Ալլա Զեյնալյան

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ Գորիսի թիվ 3 հիմնական դպրոց

Աշխատանքը թույլատրված է պաշտպանության

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԳԻՏ. ՂԵԿԱՎԱՐ՝ Ա. Ս. Դինունց, ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ ______________

ԳՈՐԻՍ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Հետազոտության թեմայի արդիականությունը: Ժամանակակից աշխարհում առանց մաթեմատիկական գիտելիքների, մաթեմատիկական տրամաբանության ու լուծումների անհնար է պատկերացնել կյանքի որևէ բնագավառ: Դրանք դարձել են ժամանակակից մարդու կյանքի ուղեկիցը:

Ինչպես գիտենք, հավասարումը որևէ անհայտ պարունակող հավասարություն է: Այդ անհայտը սովորաբար հավասարման մեջ նշանակվում է որևէ տառով (x;y;z և այլն): Երբեմն հավասարումը բացի անհայտներից պարունակում է նաև այլ տառեր, որոնք կոչվում են պարամետրեր: Լուծել հավասարումը, նշանակում է՝ գտնել անհայտի այն բոլոր արժեքները, որոնք բավարարում են հավասարմանը, կամ ցույց տալ, որ այդպիսի արժեքներ գոյություն չունեն: Այն սովորեցնում է բարդ խնդիրներ վերլուծելու, դրանք ավելի փոքր մասերի բաժանելու և դրանց լուծման համակարգված մոտեցումներ մշակելու կարողություն: Այս հմտությունները կարևոր են ոչ միայն մաթեմատիկական համատեքստում, այլև իրական աշխարհի տարբեր իրավիճակներում:

Հետազոտական աշխատանքի նպատակն է՝ ցույց տալ պարամետր պարունակող պարզ տեսքի հավասարումների լուծումները, որոնք կիրառելի են դպրոցական ծրագրում:

Աշխատանքի խնդիրներն են՝

- **բացահայտել** պարամետր պարունակող պարզ տեսքի հավասարումների լուծումների մի քանի եղանակներ,
- **ցույց տալ** դրանց կիրառման տարբեր օրինակներ:

Հետազոտության գործնական նշանակությունը: Պարամետր պարունակող խնդիրների լուծումը դժվարություններ է առաջացնում սովորողների մոտ, քանի որ գոյություն չունի որևէ ալգորիթմ, որի օգնությամբ կարելի է լուծել խնդիրը: Յուրաքանչյուր առաջադրանք պահանջում է տրամաբանական և ստեղծագործական մոտեցում: Մի շարք պարամետրական հավասարումներ շատ հետաքրքիր են լուծվում, եթե դրանց լուծման ժամանակ օգտագործում ենք համապատասխան գրաֆիկներ: Աշխատանքում շատ են գործնական օրինակները:

ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄ

Պարամետր պարունակող պարզ տեսքի հավասարումների լուծում

Օրինակ 1. Լուծել $(2a^2 - a)x + 1 = a^2 + x$ պարամետրական հավասարումը:

Ակնհայտ է, որ a պարամետրի թույլատրելի արժեքների բազմությունը՝ ԹԱԲ-ը, $a \in (-\infty; +\infty)$:

$(2a^2 - a)x - x = a^2 - 1$

$(2a^2 - a - 1)x = a^2 - 1$ (1)

այս հավասարումը $ax = b$ (2) տեսքի հավասարում է, որի համար

ա) երբ $a \neq 0$,ապա (2)–ը կունենա միակ $x = \frac{b}{a}$ լուծումը,

բ) երբ $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$,ապա (2)–ը արմատ չունի,

գ) եթե $a = b = 0$,ապա (2)–ը ունի անվերջ թվով արմատներ:

Այժմ լուծենք $(2a^2 - a - 1)x = a^2 - 1$(1) հավասարումը:

Երբ $2a^2 - a - 1 \neq 0$,ապա $x= \frac{a^2-1}{2a^2-a-1} = \frac{(a-1)(a+1)}{2(a-1)(a+\frac{1}{2})} = \frac{a+1}{2a+1}$,այսինքն (1)–ը ունի միակ $x=\frac{a+1}{2a+1}$ լուծումը:

Երբ $\begin{cases} 2a^2 - a - 1 = 0 \\ a^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ կամ } a = -\frac{1}{2} \\ a \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$,ապա (1)-ը լուծում չունի:

Երբ $\begin{cases} 2a^2 - a - 1 = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ կամ } a = -\frac{1}{2} \\ a = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ a=1, կստացվի $0 \times x = 0 \Rightarrow x \in R$:

Պատ՝ եթե $a \neq 1; a \neq -\frac{1}{2}$,ապա $x = \frac{a+1}{2a+1}$,

եթե $a = -\frac{1}{2}$,ապա հավասարումն արմատ չունի,

եթե a=1,ապա $x \in R = (-\infty; +\infty)$:

Օրինակ 2. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $2^x = \frac{1-a}{3a-2}$ հավասարման լուծումը բացասական թիվ է:

Լուծում

Մենք գիտենք, որ ցանկացած x թվի համար $0 < 2^x < 1$, այսինքն $(-\infty; 0)$ միջակայքում $y = 2^x$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $(0; 1)$ միջակայքն է: Ուստի բավական է պահանջել, որ տրված հավասարման աջ մասը ևս բավարարի այդ պայմանին, այսինքն՝

$$0 < \frac{1-a}{3a-2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-a}{3a-2} > 0 \\ \frac{1-a}{3a-2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-1}{3a-2} < 0 \\ \frac{1-a}{3a-2} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-1}{3a-2} < 0 \\ \frac{1-a-3a+2}{3a-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-1}{3a-2} < 0 \\ \frac{-4a+3}{3a-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a-1}{3a-2} < 0 \\ \frac{4a-3}{3a-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}; 1\right) \\ \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right) \end{cases}:$$

Ստացված բազմությունների ընդհանուր մասը $(\frac{3}{4}; 1)$ միջակայքն է, որն էլ կլինի տրված անհավասարման լուծումների բազմությունը:

Պատ՝ $(\frac{3}{4}; 1)$

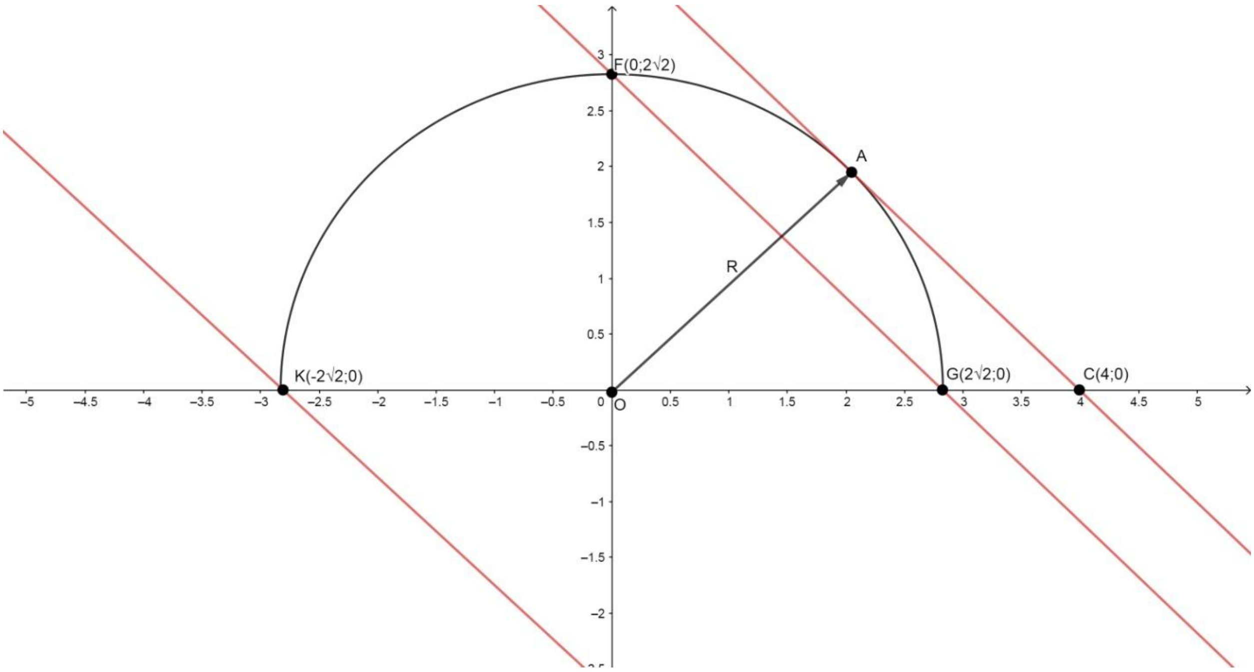
Օրինակ 3. Լուծել $\sqrt{8 - x^2} = a - x(1)$ հավասարումը, որտեղ a-ն պարամետր է:

Լուծում

Լուծենք՝ օգտվելով գրաֆիկական մեթոդից: Նախ կառուցենք $y = \sqrt{8 - x^2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Ակնհայտ է,որ D(f)-ը գտնելու համար պետք է լուծենք $8 - x^2 \geq 0$ անհավասարումը $8 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{8} \Leftrightarrow |x| \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$, հետևաբար մեր ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կլինի՝ $D(y) = [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$:

$$y = \sqrt{8 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 8 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

ուստի մեր $y = \sqrt{8 - x^2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $(0; 0)$ կենտրոնով $R = 2\sqrt{2}$ շառավղով կիսաշրջանագիծ է:



Այժմ կառուցենք $y = -x + a$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որն իրենից ներկայացնում է ուղիղ գիծ, որի գրաֆիկը $a = 0$ դեպքում $y = -x$ ուղիղն է, իսկ երբ $a \neq 0$, ապա $y = -x$ ուղղին զուգահեռ $(a; 0)$ և $(0; a)$ կետերով անցնող ուղիղ է: Երբ $a \geq 0$, ապա $y = -x + a$ ուղիղը, երբ $a \in [0; 2\sqrt{2}]$, $y = \sqrt{8 - x^2}$ կիսաշրջանագիծը կհատի մի կետում, իսկ երբ $a \in [-2\sqrt{2}; b]$, ապա $y = -x + a$ ուղիղը $y = \sqrt{8 - x^2}$ կիսաշրջանագիծը կհատի երկու կետում, որտեղ b-ն A կետում կիսաշրջանագծին տարված շոշափողի և աբսցիսների դրական կիսառանցքի հատման կետի աբսցիսն է: Քանի որ $OA = R = 2\sqrt{2}$, ապա $OB = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$, ուստի $b = 4$: Ակնհայտ է, որ $a = b = 4$ դեպքում $\sqrt{8 - x^2} = -x + a$ հավասարումը ունի մեկ արմատ: Այսպիսով, երբ $a \in [0; 2\sqrt{2}]$ (1) հավասարումը ունի մեկ արմատ: Երբ $a \in [2\sqrt{2}; 4]$, ապա հավասարումը ունի երկու արմատ, իսկ երբ $a = 4$, նորից ունի մեկ արմատ: Երբ $a > 4$, (1) հավասարումը արմատ չունի, որովհետև կորերը չեն հատվում:Մյուս կողմից, երբ $a \in [-2\sqrt{2}; 0]$, ապա կորերը հատվում են մի կետում ,իսկ երբ $a < -2\sqrt{2}$, ապա (1) հավասարումը լուծում չունի:

Պատ.՝ երբ $a \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (4; +\infty)$; (1)-ը արմատ չունի,

երբ $a \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{4\}$; (1)-ը ունի մեկ արմատ,

երբ $a \in [2\sqrt{2}; 4)$;(1)-ը ունի երկու արմատ:

Օգտվելով N5 հավասարումից՝ պատասխանել հետևյալ հարցերին.

1. Քանի՞ արմատ ունի հավասարումը $a = \sqrt{10}$ արժեքի դեպքում:

2. a-ի ի՞նչ ամբողջ արժեքի դեպքում հավասարումն ունի երկու արմատ:

3. a-ի քանի՞ բնական արժեքի դեպքում հավասարումն ունի միակ արմատ:

4. a-ի քանի՞ ամբողջ արժեքի դեպքում հավասարումն արմատ ունի:

1. Քանի որ $\sqrt{10} \in (2\sqrt{2}; 4)$,հետևաբար $y = \sqrt{8 - x^2}$ և $y = -x + a$ ֆունկցիաների գրաֆիկները $a = \sqrt{10}$ դեպքում կունենան երկու հատման կետ, ուրեմն հավասարումն $a = \sqrt{10}$ դեպքում ունի երկու լուծում:

Պատ՝ 2:

2. Հավասարումն ունի 2 արմատ, երբ $a \in [2\sqrt{2}; 4)$ միջակայքին, որտեղ միակ ամբողջ թիվը 3-ն է:

Պատ՝ 3:

3. $y = \sqrt{8 - x^2}$ և $y = -x + a$ ֆունկցիաները հատվում են մի կետում, երբ $a \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{4\}$ հետևաբար a բնական թվերը, որոնց դեպքում հավասարումն ունի մեկ արմատ, դրանք 1,2 և 4 թվերն են,որոնց քանակը 3 է:

Պատ՝ 3:

4. $y = -x + a$ և $y = \sqrt{8 - x^2}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները կունենան ընդհանուր կետ, երբ $-2\sqrt{2} \leq a \leq 4$: Հետևաբար հավասարումն ունի արմատ -2;-1;0;1;2;3 և 4 արժեքների դեպքում,որոնց քանակը 7-ն է:

Պատ՝ 7:

§ 1. Պարամետր պարունակող քառակուսային հավասարումների լուծում

Օրինակ 4. $ax^2 + bx + c = 0(1)$ հավասարումը,որտեղ x-ն անհայտն է ,իսկ a,b և c-ն պարամետրեր են:

Մենք գիտենք,երբ $a \neq 0$,այն երկրորդ աստիճանի կամ քառակուսային հավասարում է:Հետազոտելով պարզել ենք,որ

1) եթե $D = b^2 - 4ac < 0$,ապա (1) հավասարումն արմատ չունի,
2) եթե $D = b^2 - 4ac = 0$,ապա (1) հավասարումն ունի միակ $x = -\frac{b}{2a}$ արմատը,
3) եթե $D = b^2 - 4ac > 0$,ապա (1) հավասարումն ունի երկու արմատ,որոնք հաշվում են $\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \end{array}\right.$ բանաձևերով:

Իսկ երբ $ax^2 + bx + c = 0$ հավասարման մեջ $a = 0$,ապա կստանանք $bx + c = 0(2)$ հավասարումը, որը կոչվում է գծային հավասարում, որի համար մենք գիտենք՝

ա) երբ $b \neq 0$,ապա (2) հավասարումն ունի $x = -\frac{c}{b}$ միակ արմատը,

բ) երբ $b = 0$,իսկ $c \neq 0$,ապա (2) հավասարումն արմատ չունի,

գ) իսկ,երբ $b = c = 0$,ապա (2) հավասարումն ունի անվերջ թվով արմատներ՝ $x \in (-\infty; +\infty)$:

Օրինակ 5. a–ի ինչ արժեքների դեպքում $x^2 + (3a + 2)x + 8a + 14 = 11a + 17$ հավասարման արմատներից մեկը մեծ է 1-ից,իսկ մյուսը փոքր է 1-ից:

Լուծում

Առաջին եղանակ

Դիցուք x_1–ը և x_2-ը այդ հավասարման արմատներն են և որոշակիության համար ենթադրենք ($x_2 > x_1$):

Ըստ խնդրի պայմանի մնում է ենթադրել ,որ

$$\begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(3a+2)-\sqrt{9a^2-20a-52}}{2} < 1 \\ \frac{-(3a+2)+\sqrt{9a^2-20a-52}}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9a^2 - 20a - 52} > -(3a + 4) \\ \sqrt{9a^2 - 20a - 52} > 3a + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\sqrt{9a^2-20a-52} > |3a-4| \Leftrightarrow 9a^2-20a-52 > (3a+4)^2 \Leftrightarrow 9a^2-20a-52 > 9a^2+24a+16 \Leftrightarrow 44a < -68 \Leftrightarrow a < -\frac{17}{11}$

Պատ՝ $\left(-\infty; -\frac{17}{11}\right)$

Երկրորդ եղանակ

Տրված պայմանից հետևում է,որ 1 թիվն ընկած է արմատների միջև, բայց քանի որ $a = 1 > 0$ և $f(x) < 0$, երբ x–ը ընկած է արմատների ներսում, ուստի

$$f(1) < 0 \Leftrightarrow 1^2 + (3a+2)\times 1 + 8a + 14 = 11a + 17$$

$$11a + 17 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{17}{11}:$$

Պատ՝ $\left(-\infty; -\frac{17}{11}\right)$

Երրորդ եղանակ

Ենթադրենք արմատներն են x_2 և x_1 ու $x_2 > x_1$:Ըստ պայմանի

$\begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_1 > 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1-x_1)(x_2-1) > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 1 - x_1x_2 - 1 > 0(1):$

Ըստ Վիետի թեորեմի

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(3a+2) \\ x_1 \times x_2 = 8a + 14 \end{cases}:$$

(1)-ից $\Longrightarrow (3a+2) - (8a+14) - 1 \Leftrightarrow -11a - 17 > 0 \Leftrightarrow 11a < -17 \Leftrightarrow a < -\frac{17}{11}$ $\Leftrightarrow \left(-\infty; -\frac{17}{11}\right)$

Պատ՝ $\left(-\infty; -\frac{17}{11}\right)$:

Օրինակ 6. a–ի ինչ արժեքների դեպքում $x^2 - 2ax - 2a + 8 = 0$ հավասարման երկու արմատներն էլ մեծ են 1-ից:

Առաջին եղանակ

Դիցուք x_1 և x_2-ը, որոշակիության համար ենթադրենք $x_1 \le x_2$,այդ հավասարման արմատներն են:

Պարզ է որ, եթե $x_1 > 1 \Rightarrow x_2 > 1$, ուստի անհրաժեշտ է լուծել $x_1 > 1$ անհավասարումը $\Longrightarrow x_1 = a - \sqrt{a^2+2a-8} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+2a-8} < a - 1 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a - 1 > 0 \\ a^2 + 2a - 8 \ge 0 \\ a^2 + 2a - 8 < (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ (a+4)(a-2) \ge 0 \\ a^2 + 2a - 8 < a^2 - 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ (-\infty; -4] \cup [2; +\infty) \\ 4a < 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

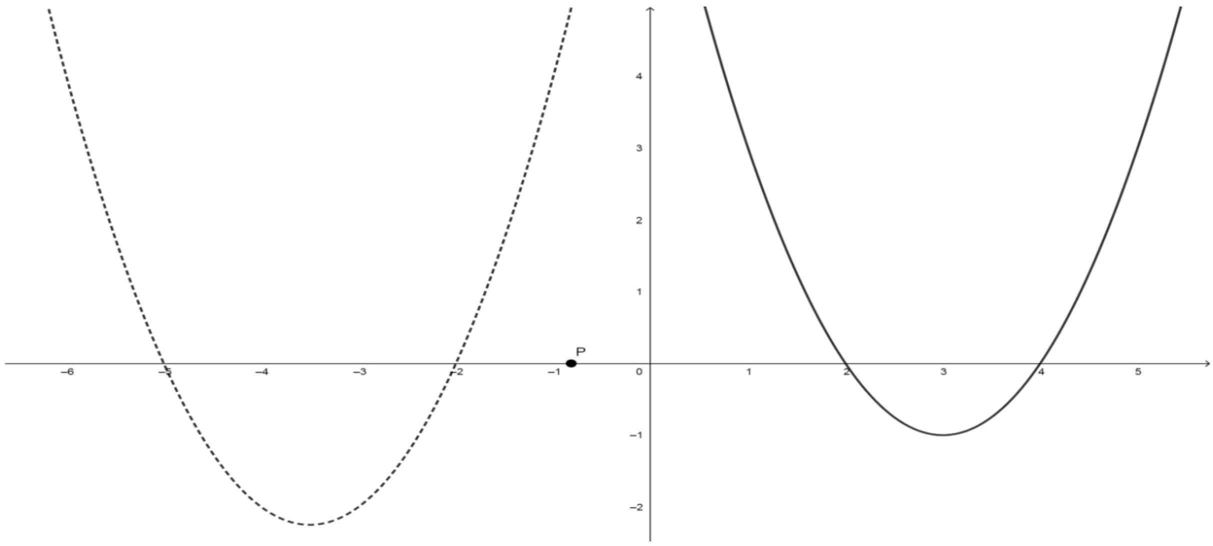
$\begin{cases} \left(1; \frac{9}{4}\right) \\ (-\infty; -4] \cup [2; +\infty) \end{cases}:$

Պատ՝ $[2;\frac{9}{4})$

Երկրորդ եղանակ

Եթե ax^2+bx+c $(a>0)$ եռանդամի երկու արմատներն էլ մեծ են տրված p թվից, ապա $ax^2+bx+c=f(x)$ պարաբոլը կամ հատում է, կամ շոշափում Ox առանցքը, այսինքն $D\geq 0$:

Մյուս կողմից եռանդամի արժեքը p կետում,այսինքն $f(p)>0$:



Բայց գծագրից երևում է, որ վերը նշված երկու պայմանները $\begin{cases} D\geq 0 \\ f(p)>0 \end{cases}(1)$ բավական չեն, որովհետև անընդհատ գծով և ընդհատ գծերով երկու պարաբոլի գրաֆիկները բավարարում են (1) պայմաններին, բայց ընդհատ գծերով պարաբոլը չի բավարարում մեր խնդրի պայմաններին: Ուստի, եթե մենք պահանջենք, որ պարաբոլի գագաթի աբսցիսը ընկած լինի p կետից աջ, ապա այդ պարաբոլը կբավարարի մեր խնդրի պայմաններին:

Այսպիսով $\begin{cases} D\geq 0 \\ f(p)>0 \\ -\frac{b}{2a}>p \end{cases}$:

Մեր օրինակով եղած պայմաններին բավարարող ax^2+bx+c $(a>0)$ դեպքում, որպեսզի $x_1>p$ և $x_2>p$, ապա պետք է տեղի ունենա $\begin{cases} D\geq 0 \\ f(p)>0 \\ -\frac{b}{2a}>p \end{cases}$:

Ստացանք՝

$$\begin{cases} D = a^2 + 2a - 8 \geq 0 \\ f(p) = f(1) > 0 \\ -\frac{b}{2a} = a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\infty; -4] \cup [2; +\infty) \\ a > 1 \\ 9 - 4a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\infty; -4] \cup [2; +\infty) \\ a > 1 \\ a < \frac{9}{4} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a \in [2; \frac{9}{4})$:

Պատ՝ $[2; \frac{9}{4})$

Օրինակ 7. Լուծել $x^4 - 18x^2 + b = 0$ (1) հավասարումը (b-ն պարամետր է):

Այս հավասարումը երկքառակուսային հավասարում է, որը ընդհանուր դեպքում

ա) կարող է լուծում չունենալ,

բ) ունենալ միակ լուծում,

գ) ունենալ երկու լուծում,

դ) ունենալ երեք լուծում,

ե) ունենալ չորս լուծում:

$x^4 - 18x^2 + b = 0(1)$ b-ի թույլատրելի արժեքները կլինեն $(-\infty; +\infty)$:

Նշանակում $x^2 = t$ կստանանք $t^2 - 18t + b = 0$ (2):

1.Դիտարկենք այն դեպքը, երբ հավասարումը լուծում չունի:

ա) Երբ $D < 0$, ապա $D = b^2 - 4ac = 18^2 - 4b = 324 - 4b$

$324 - 4b < 0 \Leftrightarrow 4b > 324 \Leftrightarrow b > 81 \Leftrightarrow (81; +\infty)$:

բ)$\begin{cases} D = 0 \\ t_1 = t_2 = -\frac{b}{2a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 81 \\ t_1 = t_2 = -\frac{(-18)}{2\times 1} = 9 > 0 \end{cases}$

ուրեմն այդ համակարգը լուծում չունի:

գ)Լուծում չի ունենա,եթե

$$\begin{cases} D > 0 \\ t_1 < 0 \\ t_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 81 \\ t_1 + t_2 = 18 \\ t_1 \times t_2 = b \end{cases}$$

քանի որ $t_1 < 0$ և $t_2 < 0$ և $t_1 + t_2 = 18$, ապա այս համակարգը լուծում չունի:

Այսպիսով $x^4 - 18x^2 + b = 0$ հավասարումը լուծում չունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $b > 81$:

Պատ՝ $(81; +\infty)$

2. Երբ $x^4 - 18x^2 + b = 0$ հավասարումը ունի միակ լուծում:

Եթե երկքառակուսային հավասարումը ունենա մեկ լուծում,ապա այն կլինի $x = 0$, բայց երբ $x = 0 \Rightarrow b = 0$ հետևաբար

$$x^4 - 18x^2 = 0$$

$$x^2(x^2-18)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x_1=0 \\ x_2=3\sqrt{2} \\ x_3=-3\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Այսպիսով ստացվեց, որ $x^4-18x^2+b=0$ հավասարումը միակ արմատ ունենալ չի կարող:

Պատ՝ ∅

3.Այժմ գտնենք b–ի արժեքները, որոնց դեպքում երկքառակուսային հավասարումը ունի երկու արմատ, որը հնարավոր է, երբ

ա) $t^2-18t+b=0(1)$ հավասարման արմատները ունենան տարբեր նշաններ:

Քանի որ (1) հավասարումը բերված տեսքի է, ուստի հերիքում է, որ $b<0$, որովհետև, եթե $b<0$,ապա $t_1\times t_2<0$ բայց $t_1\times t_2=q<0 \Rightarrow D=p^2-4q$: Քանի որ $q<0$ ապա $-4q>0 \Rightarrow p^2-4q>0 \Rightarrow D>0$:

Ստացվեց $t_1\times t_2<0 \Rightarrow b<0 \Rightarrow$ ունի 2 արմատ, երբ $b\in(-\infty;0)$:

բ)Մյուս կողմից՝ $x^4-18x^2+b=0$ հավասարումը կունենա երկու արմատ, եթե

$$\begin{cases} D=0 \\ t_1=t_2=-\frac{b}{2a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=81 \\ -\frac{(-18)}{2a}=\frac{18}{2\times1}=9>0 \end{cases}:$$

Այսպիսով $x^4-18x^2+b=0$ հավասարումը ունի երկու արմատ, երբ $a\in(-\infty;0)\cup\{81\}$:

4.Այժմ գտնենք b–ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $x^4-18x^2+b=0$ (1) հավասարումը ունի ճիշտ երեք արմատ:

Մենք գիտենք, եթե (1)–ի մեկ լուծում լինի 0-ն,ապա $b=0$,որի դեպքում

$$x^4-18x^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x_1=0 \\ x_2=3\sqrt{2} \\ x_3=-3\sqrt{2} \end{array}\right.:$$

Այսպիսով (1)–ը ունի երեք արմատ միայն և միայն այն դեպքում, երբ $b=0$:

Պատ՝ b=0

5.Այժմ գտնենք b-ի այն արժեքները,որոնց դեպքում $x^4-18x^2+b=0$ (1) հավասարումը ունի չորս լուծում, որը հնարավոր է այն դեպքում, երբ

$$\begin{cases} D>0 \\ t_1\times t_2>0 \\ t_1+t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<81 \\ q>0 \\ -p>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<81 \\ b>0 \\ 18>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<b<81$$

Պատ՝ $(0;81)$

Պատ՝ երբ $b\in(81;+\infty)$, ապա (1)-ը լուծում չունի, երբ $b \in (-\infty; 0) \cup \{81\}$,(1)–ը ունի երկու լուծում,

երբ $b = 0$, ապա (1)–ը ունի երեք լուծում,

երբ $b \in (0; 81)$, ապա (1)–ը ունի չորս լուծում:

Երկրորդ եղանակ(Գրաֆիկական եղանակ)

$$x^4 - 18x^2 + b = 0(1)$$

$$x^4 - 18x^2 = -b$$

Այժմ կառուցենք $y = x^4 - 18x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

1)$D(f) = R = (-\infty; +\infty)$:

2)$f(-x) = (-x)^4 - 18(-x)^2 = x^4 - 18x^2 = f(x); \forall x \in R$:

Հետևաբար f(x)-ը զույգ է,ուստի նրա գրաֆիկը համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ:

Այժմ գտնենք ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատների առանցքների հատման կետի կոորդինատները:

Երբ $x = 0$ կստանանք $y = 0$, հետևաբար $y = x^4 - 18x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով:

Երբ $y = 0 \Rightarrow x^4 - 18x^2 = 0$

$$x^2(x^2 - 18) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 3\sqrt{2} \\ x_3 = -3\sqrt{2} \end{array}\right. ,$$

հետևաբար ֆունկցիայի գրաֆիկը կանցնի $(3\sqrt{2}; 0)$,$(-3\sqrt{2}; 0)$ կետերով:

Հաշվենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

$f'(x)=4x^3 - 36x=4x(x^2 - 9)=4x(x - 3)(x + 3); x \in R$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 3;\ x_3 = -3$

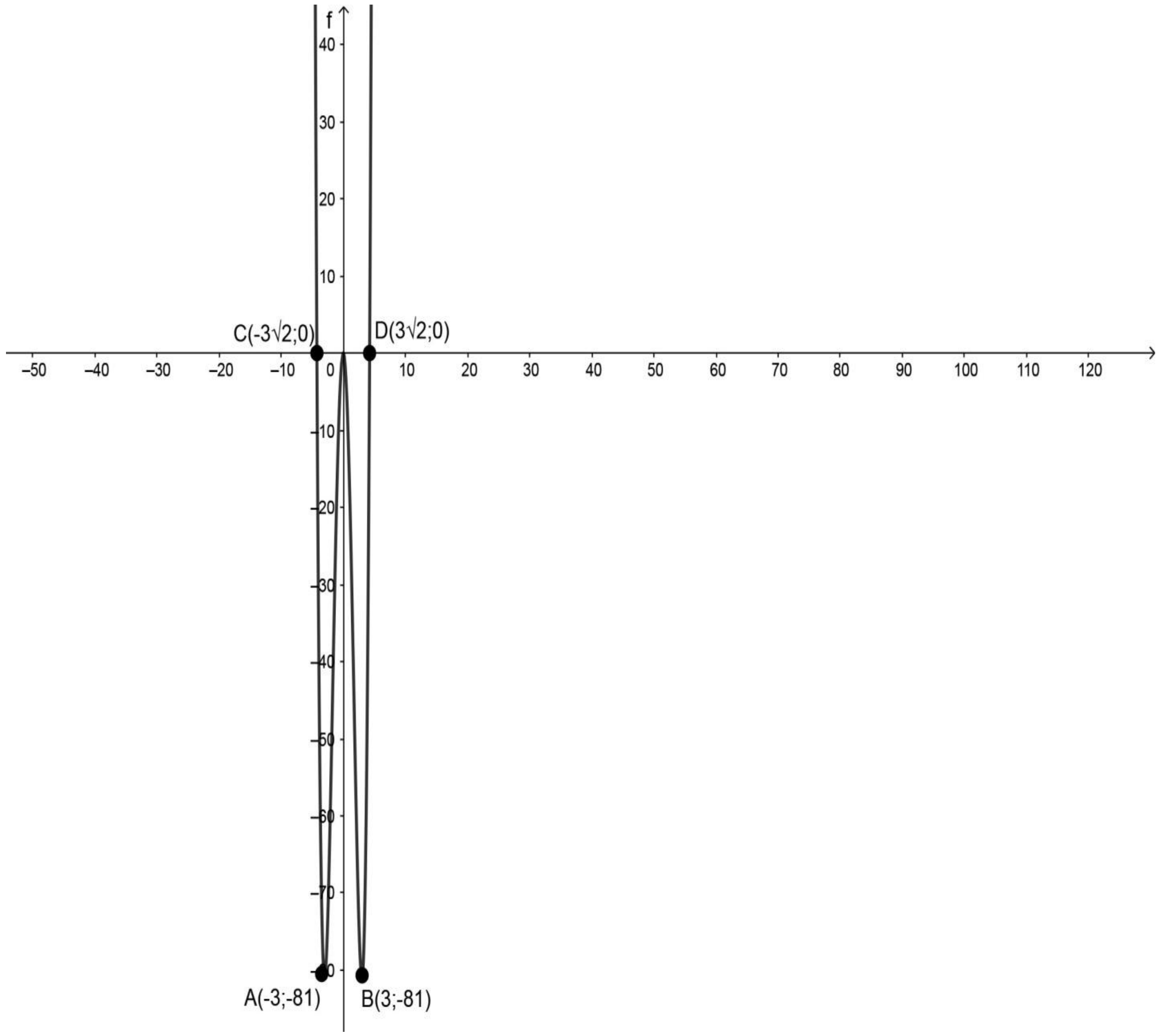
$$(-\infty; -3] \text{ և } [0; 3] \searrow$$

$$[-3; 0] \text{ և } [3; +\infty) \nearrow$$

$x_{min} = -3; y_{min} = f(x_{min}) = f(-3) = -81$

$x_{min} = 3 ; y_{min} = f(x_{min}) = f(3) = -81$

$x_{max} = 0; y_{max} = f(x_{max}) = f(0) = 0$



Պատ՝ լուծում չունի, երբ $b \in (81; +\infty)$,

ունի երկու լուծում, երբ $b \in (-\infty; 0) \cup \{81\}$,

ունի երեք լուծում, երբ $b = 0$,

ունի չորս լուծում, երբ $b \in (0; 81)$:

§ 2. Պարամետր պարունակող եռանկյունաչափական հավասարումների լուծում

Օրինակ 8. $\sin 2x = 5 - 3a(1)$

Գտնել a-ի այն արժեքները,որոնց դեպքում (1) հավասարումը լուծում չունի:

Մենք գիտենք, որ $\sin t = b$ հավասարումը լուծում չունի այն և միայն այն դեպքում,երբ $|b| > 1$, ուստի մեր օրինակում $|5 - 3a| > 1 \Leftrightarrow |3a - 5| > 1$, այս անհավասարման երկու մասերը,ոչ բացասական են: Երկու մասերը բարձրացնենք քառակուսի, կստանանք տրված անհավասարմանը համարժեք անհավասարում:

$(3a - 5)^2 > 1 \Leftrightarrow (3a - 5)^2 - 1^2 > 0 \Leftrightarrow (3a - 5 - 1)(3a - 5 + 1) > 0 \Leftrightarrow (3a - 6)(3a - 4) > 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$

Պատ՝ $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$:

Օրինակ 9. Տրված է $a\cos^2 x + \lg(1 - x^2) = 5(1)$ հավասարումը:

$$a\cos^2 x = 5 - \lg(1 - x^2)(2)$$

Դիտարկենք $f(x) = 5 - \lg(1 - x^2)$ ֆունկցիան:

$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \Rightarrow D(f) = (-1; 1)$

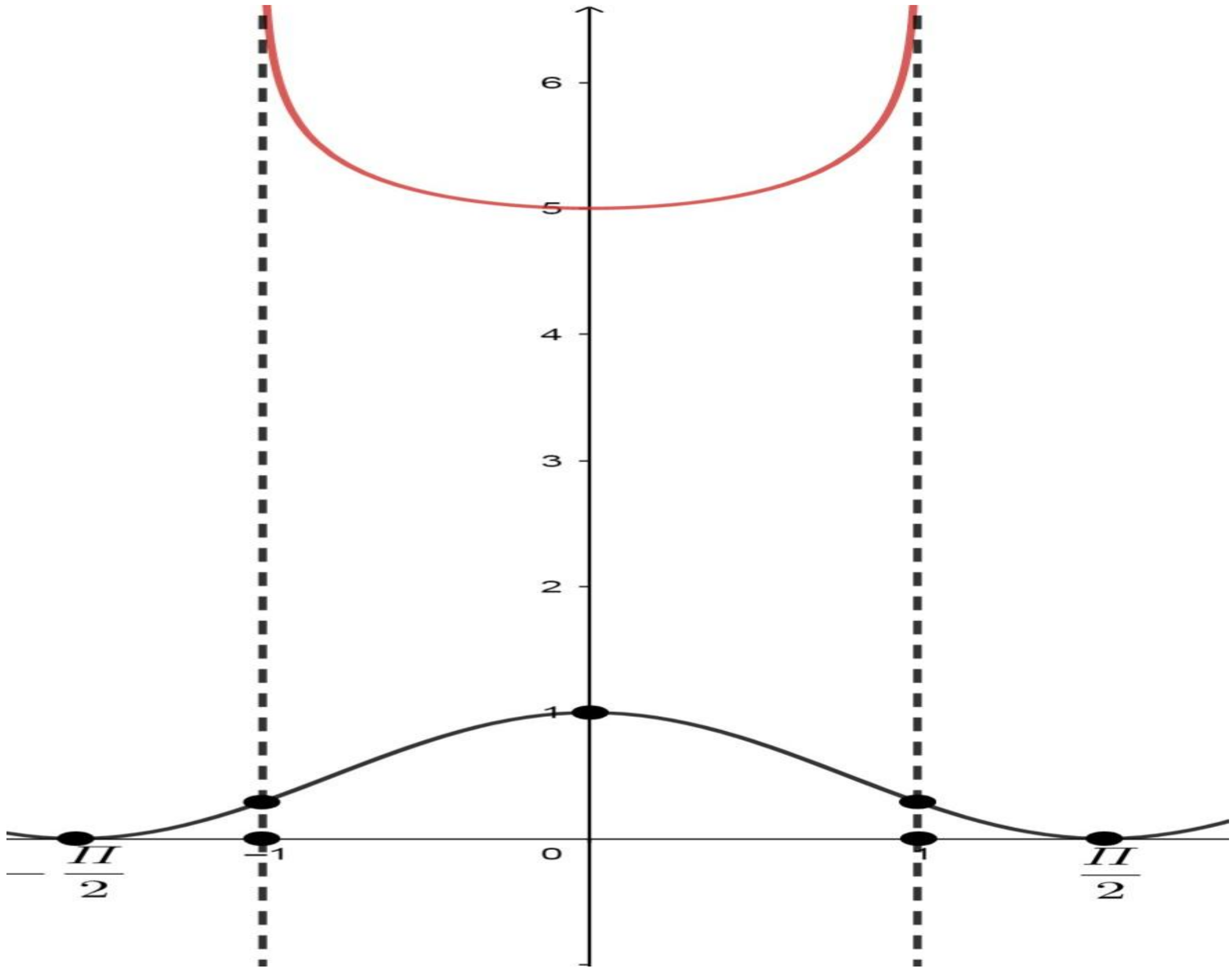
$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \leq 1$, մյուս կողմից $1 - x^2 > 0$, ուստի $0 < 1 - x^2 \leq 1$

$\lg(1 - x^2) \leq \lg 1 \Leftrightarrow \lg(1 - x^2) \leq 0 \Leftrightarrow -\lg(1 - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 5 - \lg(1 - x^2) \geq 5 \Rightarrow D(f) = [5; +\infty)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{1 - x^2}(1 - x^2)' = \frac{2x}{1 - x^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $(0 \in [-1; 1])$ ունի միակ կրիտիկական կետ:

Այժմ հետազոտենք $g(x) = a\cos^2 x$, որի համար նախ կառուցենք $y = \cos^2 x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Գրաֆիկից երևում է,որ երբ $a < 5$ դեպքում (2) հավասարումը լուծում չունի, հետևաբար լուծում չունի նաև $a\cos^2 x + \lg(1 - x^2) = 5$ հավասարումը:

Երբ $a = 5$, ապա գրաֆիկները կհատվեն մի կետում և հավասարման լուծումը կլինի $x = 0$–ն:

Երբ $a > 5$ գրաֆիկները կհատվեն 2 կետում:

Օգտվելով օրինակ 9-ից դիտարկել $a\cos^2 x + \lg(1 - x^2) = 5(1)$ հավասարումը և պատասխանել հետևյալ պնդումներին:

1) $a = 0$ արժեքի դեպքում (1) հավասարումն արմատ չունի:
2) $a = 1$ արժեքի դեպքում (1) հավասարումն ունի ճիշտ մեկ արմատ:
3) Երբ $x = x_0$-ն (1) հավասարման արմատ է, ապա $x = -x_0$-ն ևս արմատ է:
4) $a = 5$ արժեքի դեպքում (1) հավասարումն արմատ ունի:
5) $a < 5$ դեպքում (1) հավասարումն արմատ չունի:
6) Գոյություն ունի a-ի միայն մեկ արժեք, որի դեպքում (1) հավասարումը կունենա ճիշտ մեկ արմատ:

Այժմ պատասխանենք հարցերին:

1) $a = 0$ դեպքում $g(x) = 0$,իսկ $f(x) \geq 5$,հետևաբար (1) հավասարումն արմատ չունի: Հետևաբար պնդումը ճիշտ է:

2) $a = 1$ դեպքում $g(x) = \cos^2 x$ և $E(g) = [0; 1]$,իսկ $E(f) = [5; +\infty)$, ուրեմն f և g ֆունկցիաների գրաֆիկները հատման կետ չունեն, ուրեմն $f(x) = g(x)$ հավասարումն արմատ չունի: Պնդումը սխալ է:

3) Քանի որ $x \in (-1; 1)$ դեպքում և՛ $f(-x) = f(x)$,և՛$g(-x) = g(x)$,ուրեմն,եթե x_0–ն (1) հավասարման արմատ է, ապա $-x_0$–ն ևս արմատ է,ուրեմն պնդումը ճիշտ է:

4) Երբ $a = 5$, ապա $g(x) = 5\cos^2 x \leq 5$, իսկ $f(x) = 5 - \lg(1 - x^2) \geq 5$, հետևաբար $f(x) = g(x)$ հավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} 5\cos^2 x = 5 \\ 5 - \lg(1 - x^2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0:$$

Այսպիսով՝ $a = 5$ դեպքում (1) հավասարումն ունի միակ $x = 0$ արմատը, ուրեմն պնդումը ճիշտ է:

5) Երբ $a < 5$, ապա քանի որ $g(x) = a\cos^2 x < 5$, իսկ $f(x) \geq 5$, ուրեմն f և g ֆունկցիաների գրաֆիկները չեն հատվում, կամ որ նույնն է, $f(x) = g(x)$ հավասարումն արմատ չունի, ուրեմն պնդումը ճիշտ է:

6) Քանի որ $a = 5$ դեպքում $f(x) = g(x)$ հավասարումն ունի միակ $x = 0$ արմատը,իսկ երբ $a < 5$,ապա (1) հավասարումը լուծում չունի, իսկ երբ $a > 5$ (1) հավասարումը ունի երկու արմատ, ապա $a = 5$ արժեքն է,որի դեպքում (1) հավասարումն ունի մեկ արմատ, ուրեմն պնդումը ճիշտ է:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Այս աշխատանքով փորձել ենք անդրադառնալ այն թեմային, որը, ըստ աշակերտների մեծամասնության, դժվար է հասկացվում: Աշխատանքը կազմվել է օրինակներով, որպեսզի ավելի հասկանալի լինի և մատչելի: Լուծել ենք մեկ պարամետր պարունակող հավասարումներ, ինչպես նաև երկու և երեք: Անդրադարձել ենք տարբեր տիպի հավասարումների լուծման(պարզ տեսքի, քառակուսային, եռանկյունաչափական և այլն): Առաջադրանքները լուծել ենք տարբեր եղանակներով՝ հանրահաշվորեն, գրաֆիկորեն և այլն:

Մեծ մասամբ օգտագործվել է գրաֆիկական եղանակը, որը ամենահարմարն է պարամետր պարունակող հավասարումները լուծելու համար: Գրաֆիկական եղանակով և՛ ավելի ակնառու է դառնում խնդիրը, և՛ ավելի հեշտ է դառնում պատասխանել հարցերին: Գրաֆիկական եղանակը օգնում է նաև առաջադրանքները լուծել հասկանալով, ոչ թե մեխանիկորեն: Ընդ որում, գրաֆիկական եղանակով լուծման ժամանակ դիտարկվել է տրված պարամետրի բոլոր թույլատրելի արժեքների դեպքում: Այս եղանակի արդյունավետությունը ավելի շատ երևում է պնդումների փնջեր լուծելիս:

Հանրահաշվորեն լուծելը նույնպես արդյունավետ է: Այդ եղանակով լուծման ժամանակ վարժությունները բերվում են պարզ տեսքի և ավելի է հեշտանում լուծել այն: Լուծման ժամանակ պետք է հաշվի առնել բոլոր դեպքերը՝ լուծումներ չկորցնելու համար:

Դպրոցական ծրագրերում պետք է օգտագործել տարբեր եղանակներ պարամետրական հավասարումների լուծման, որպեսզի երեխաները կարողանան ընտրեն իրենց համար ավելի դյուրին եղանակը: Այդ դեպքում երեխաները չեն խուսափի պարամետրական հավասարումներից և կլուծեն ավելի մեծ հետաքրքրությամբ:

ՕԳՏԱԳՈՐԾԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Г. А. Ястребинский-Задачи с параметрами 1999 г.
2. Математика в школе: Научно-математический журнал(1995-2003)
3. Сивашинцкий И. Ф.-Теоремы и задачи по алгебре и элемент функции-1971 г.
4. Մաթեմատիկայի մրցույթային խնդիրների ժողովածու(Ա. Ի. Սկանավիի խմբագրությամբ): 2-րդ հրատարակչություն-Երևան,<<Լույս>> 1991 թ.
5. Գևորգյան Գ.,Սահակյան Ա.-Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր(ավագ դպրոց 12-րդ դասարան,բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար)-Երևան <<Տիգրան Մեծ>> 2011թ.
6. Մաթեմատիկայի ձեռնարկ(որակավորման ստուգումների,պետական ավարտական և ԲՈՒՀ-երի ընդունելության քննությունների համար),Երևան <<Միտք>> 1998թ.
7. Առաքելյան Կ. Գ.-Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր-10 (մաթեմատիկայի խորացած դասընթաց) Երևան, <<Զանգակ-87>> 2001թ.
8. Մաթեմատիկայի շտեմարան մաս առաջին և երկրորդ-Սպարտակ Ռաֆայելյան և ուրիշներ-Երևան Էրեբունի Սպը 2018թ.