ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ
ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ԳՈՐԻՍԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

# ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

## ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ Կառուցման խնդիրների ուսուցման հարցերը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում

ԱՌԱՐԿԱ՝ Մաթեմատիկա

ՀԵՂԻՆԱԿ՝ Լիանա Հակոբյան

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ՝ Սվարանցի միջնակարգ դպրոց

*Աշխատանքը թույլատրված է պաշտպանության*

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԳԻՏ. ՂԵԿԱՎԱՐ՝ ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ Արփինե Դինունց

**ԳՈՐԻՍ 2023**

**Բովանդակություն**

# ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Տրամաբանական մտածողության զարգացումը ամենակարևոր տարրերից մեկն անհատականության կրթությունն է: Դրան է ծառայում մաթեմատիկան, և առաջին հերթին երկրաչափությունը: Երկրաչափության մեջ դիտարկվող խնդիրների շրջանակը շատ լայն է: Դրանց թվում առանձնահատուկ տեղ են զբաղեցնում կառուցման խնդիրները, որոնք զարգացնում են սովորողների ոչ միայն կառուցողական հմտությունները, այլև տարածական և տրամաբանական մտածողությունը: Այս առաջադրանքների վրա նրանք սովորում են ճանաչողության այնպիսի մեթոդներ, ինչպիսիք են վերլուծությունը և սինթեզը: Կառուցման խնդիրները սովորողների երկրաչափական հայացքների ձևավորման կարևոր միջոցներից է: Երկրաչափական գործընթացում կառուցումները սովորողներին գործնականորեն ծանոթացնում են երկրաչափական պատկերներին և նրանց հատկություններին, սովորեցնում օգտագործել նկարչական գործիքներ, ձեռք բերել գրաֆիկական հմտություններ: Շատ դեպքերում սովորողները համոզվում են նաև երկրաչափական կառուցումներով շատ մաթեմատիկական պնդումների ճիշտ լինելու մեջ:

Մյուս կողմից, կառուցման խնդիրների լուծումը սովորողների համար հաճախ դժվարություններ է առաջացնում, որովհետև երկրաչափության մեջ ուսումնասիրելիս նրանց շատ քիչ ժամանակ է տրամադրվում:

Աշխատանքի **նպատակն** է ուսումնասիրել կարկինով և քանոնով կառուցվող առաջադրանքները և ընդլայնել դրանց վերաբերյալ գիտելիքները:

Հետազոտության խնդիրն է բացահայտել կարկինով և քանոնով կառուցվող առաջադրանքների լուծման դերը աշակերտների կոմպետենցիաների ձևավորման գործում:

# ԳԼՈՒԽ 1. ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

## 1.1 Կարկին և քանոն

**Կարկինը**, շրջան գծելու համար նախատեսված գործիք է, ինչպես նաև տարածությունները չափելու, մասնավորապես քարտեզի վրա: Կարող է օգտագործվել երկրաչափության և նկաչության մեջ և այլ նպատակներով:Կարկին բառը ծագել է լատինական circulus (շրջան) բառից: Այժմ անհնար է ասել, թե ով է հայտնագործել այս գործիքը. Պատմությունը մեզ չի պահպանել իր անունը, բայց Հին Հունաստանի լեգենդները հեղինակությունը վերագրում են Թալոսին ՝ հայտնի Դեդալոսի եղբորորդուն: Գործիքն արդեն ծանոթ էր բաբելոնացիներին և Ասորիներ մ.թ.ա. XXIV դարում: Կարկինը լայնորեն օգտագործում են շրջաններ գծելու համար: Հին Բաբելոնի և Ասորեստանի թագավորության տաճարների գմբեթներին և պարիսպներին (մ.թ.ա. II-I դարեր), պահպանվել են շատ հավասար շրջանների պատկերներ, որից էլ պարզ է, որ այդ պետությունները այդ ժամանակաշրջանում արդեն ծանոթ էին կարկինին:

Կարկինը պատրաստված է մետաղից և բաղկացած է 2 մասերից, որոնք իրար հետ կապված են: Սովորաբար վերջում նրանցից մեկի ծայրին ասեղ է, իսկ մյուսինը՝ մատիտ: Չափելու համար կարկինի 2 ծայրերն էլ ասեղներ են: Հատուկ հավաքածուն բաղկացած է լինում կարկինի պարագաներից (օրինակ՝ ասեղներ) և գործիքներից (տրամաչափ, գրիչ) և գործի հետ համապատասխանում է նաև քանոնը: Հիմնական տեսակներն են.

- Տրամաչափ կարկին
  1. Կարկինը կոր ոտքերով, ծավալային գործեր կատարելու համար:
  2. Կարկին նկարչության համար, շատ փոքր շրջանակներում:
- Համաչափ կարկին՝ նախատեսված է լայնածավալ մոդելային դիրքով, դարձնելով պատճեններ կամ մոդելային մասշտաբներ, ինչպես նաև մեխանիկական փոխանցման չափերի է այնքանով, որքանով անհրաժեշտ է:

**Քանոնը** պարզ չափող գործիք: Սովորական քանոնը ունի բաժանման գծեր, սովորաբար արտահայտված են լինում սանտիմետրով, միլիմետրով և դյույմով, որոնք օգտագործվում են տարածք չափելու համար: Սովորական քանոնը պատրաստված է լինում պլաստմասսաից, փայտից և նաև մետաղից: Երկրաչափության և քարտեզագրման մեջ քանոնը օգտագործվում է ուղիղ գիծ գծելու և ավելի ճշգրիտ չափումներ անելու համար: Հին Պոմպեյում պեղումների ժամանակ հայտնաբերվել է չափիչ գործիք, որը նման էր քանոնի:ն ծանոթ էին կարկինին: Այն մանրակրկիտ քանդակված տախտակ էր, որի վրա փորագրված էին բաժանումները: Առաջին քանոնը, որը մենք սովոր ենք տեսնել այսօր - հայտնվեց ֆրանսիացիների հեղափոխություն հետո:

### 1.2 Կառուցման խնդիրների մեթոդները

Երկրաչափության դասընթացում սովորողները հաճախ են գործ ունենում պարզագույն կառուցումների հետ: Այդ ընթացքում նրանք օգտվում են գծագրական գործիքներից՝ մասշտաբային քանոնից, կարկինից, անկյունաչափից, անկյունարդից: Պարզվում է, որ կառուցումներից շատերը կարելի է իրագործել միայն կարկինով և մասշտաբային բաժանումներ չունեցող քանոնով: Դեռևս Հին Հունաստանում երկրաչափական կառուցումները կատարելիս օգտվել են բազմաթիվ գործիքներից: Հետագայում մաթեմատիկոսները պարզաբանեցին, որ միայն քանոնի և կարկինի միջոցով կառուցումներն ավելի հստակ են ու գիտականորեն ճշգրիտ: Այդ ձևով կատարված կառուցումներն ավելի բարձր էր դասվում: Երկրաչափները հաճախ են փորձ արել կառուցումներն իրագործել գործիքների հնարավորինս սահմանափակումով: Այդպես ծնվեց ֆիքսված բացվածքով կարկինի միջոցով կառուցման տեսությունը: 19-րդ դարում ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ժան Պոնսելենի, հետագայում նաև շվեցարական երկրաչափ Յակոբ Շտեյների կողմից ի հայտ բերվեցին և գիտականորեն հիմնավորվեցին կառուցումների տեսությանը վերաբերող հիմնական քաղափարները, որոնց հիմքում ընկած է հետևյալ սկզբունքը՝ *կարկինի և քանոնի միջոցով իրականացվող բոլոր կառուցումները իրագործելի են ֆիքսված բացվածքով կարկինի և քանոնի միջոցով:*

Նշենք, որ քանոնը թույլ է տալիս տանել կամայական ուղիղ, ինչպես նաև տանել (կառուցել) տրված երկու կետերով անցնող ուղիղը: Քանոնի միջոցով այլ գործողություն կատարել չի կարելի: Կարկինը, որպես երկրաչափական կառուցման գործիք, թույլ է տանել կամայական շառավղով շրջանագիծ, ինչպես նաև պատկերել տրված կենտրոնով և տրված հատվածին հավասար շառավղով շրջանագիծը: Մասնավորաբար, կարկինով կարելի է տրված հատվածը տեղադրել տրված ուղղի վրա՝ նրա վրա տրված կետից:

Կառուցման խնդիրներ լուծելիս, հիմնականում, կիրառվում են հետևյալ մեթոդները.

- **Հանրահաշվական մեթոդ (հատվածի կառուցումը բանաձևով):**
- **Երկրաչափական տեղերի մեթոդ:**
- **Նմանության մեթոդ;**
- **Համաչափության մեթոդ:**
- **Զուգահեռ տեղափոխման մեթոդ:**
- **Պտույտի մեթոդ:**
- **Ինվերսիայի մեթոդ:**

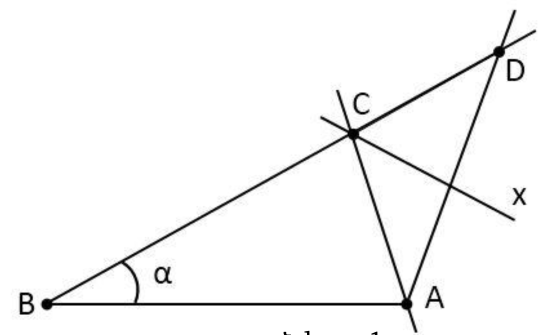
Այդպիսի խնդիրներ լուծելիս (որոնք իրագործվում են կարկինի և քանոնի միջոցով), ընդհանուր առմամբ, որպես կանոն, առաջնորդվում են չորս մասից բաղկացած հետևյալ պլանով:

1) Խնդրի լուծման եղանակի որոնումը՝ խնդրի տվյալների և որոնելի տարրերի միջև կապեր հաստատելու միջոցով: Այս մասը կոչվում է խնդրի **վերլուծություն**: Նշված կապերը ի հայտ բերելու համար ենթադրվում է, որ պատկերը կառուցված է՝ թղթի (գրատախտակի) վրա նշագծելով այն: Տեսադաշտում ունենալով ենթադրյալ պատկերը, օժանդակ կառուցումների և հայտնի փաստերի միջոցով փորձ է արվում կապեր ստեղծել հայտնի տվյալների և անհայտ տարրերի միջև: Այդպիսի վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս գուշակել լուծման ընթացքը:
2) Որոնելի պատկերի կառուցումը՝ վերլուծության արդյունքի հիման վրա:
3) Ապացուցում: Այդ ընթացքում ապացուցվում է, որ կառուցված պատկերը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին:
4) Խնդրի հետազոտում: Այս մասում պարզաբանվում է, թե եղած տվյալների միջոցով ո՞ր դեպքում խնդիրը լուծում չի ունենա, ո՞ր դեպքում լուծումը կլինի միակը և ո՞ր դեպքում՝ մեկից ավելի լուծումներ:

Դիտարկենք խնդրի մեջ վերը թվարկված 4 քայլերը:

*Օրինակ:* **Կառուցել եռանկյուն տրված կողմով, նրանով կազմված անկյան և մյուս կողմերի գումարով:**

1) Լուծման որոնում: Ենթադրենք խնդիրը լուծված է և կառուցված է $\Delta ABC$-ն, որտեղ $AB = e, \angle ABC = \alpha, AC + BC = l$: Նայելով գծագրին կնկատենք, որ եթե $CA$ հատվածը տեղադրենք BC հատվածի ծայրակետերից, ապա կստանանք $D$ կետը այնպես, որ $AC + BC = l$: $C$ գագաթի դիրքը գտնելու համար բավական է նկատել, որ այն հավասարահեռ է $A$ և $D$ կետերից և ուրեմն գտնվում է $AD$ հատվածի $x$ միջնուղղահայացի վրա: Պարզ է, որ $C = AC \cap BD$:



Նկար 1

2) Կառուցում: Կառուցումը տանում է դեպի միջնուղղահայացի կառուցման:
3) Ապացույց: Քանի որ $x$-ը $AD$-ի միջնուղղահայացն է, ուստի $AC + BC = CD + BC = l$: Այսպիսով $AB = e, \angle ABC = \alpha, AC + BC = l$ և եռանկյունը կառուցված է:
4) Խնդրի հետազոտում: Նախ նկատենք, որ խնդիրը լուծում ունի միայն երբ $l > e$, հակառակ դեպքում եռանկյան երկու կողմերի գումարը կլինի փոքր կամ հավասար երրորդ կողմից, որը հնարավոր չէ: Ցույց տանք, որ խնդիրը ունի միակ լուծում: Իրոք, եթե $x$ ուղիղը հատեր ոչ թե $AD$, այլ $AB$-ն որևէ $O$ կետում, ապա $AB = AO + OB = BO + OD > BD$: Բայց $AB < BD$, որովհետև $e < l$: Ուրեմն՝ $x$-ը հատում է $BD$-ն:

Այն դեպքում, երբ խնդիրը բավականաչափ պարզ է, առանձին մասեր, օրինակ վերլուծությունը կամ հետազոտումը, բաց են թողնվում:

### 1.3 Հանրահաշվական կամ անալիտիկ մեթոդ

Կառուցման վերաբերյալ երկրաչափական խնդիրների լուծման մյուս մեթոդներներին համանման, հանրահաշվական մեթոդի դեպքում նույնպես, նախ ենթադրվում է, որ խնդիրը լուծված է և որոնելի պատկերը կառուցված է: Աշխատում են որոնելի մեծությունը (օրինակ՝ հատվածը) արտահայտել տված մեծությունների միջոցով, այնուհետև կառուցում են ստացված արտահայտությունը (որի համար օգտվում են $a \pm b$, $\frac{ab}{b}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ և այլն արտահայտությունների կառուցումից, որտեղ $a, b, c$ -ն տված հատվածներ են): Շատ դեպքերում էլ օժանդակ կառուցումների միջոցով են աշխատում կապ ստեղծել խնդրի հայտնի և անհայտ տարրերի միջև՝ հավասարումների օգնությամբ, որից հետո, նախորդների հետ միասին օգտագործելով հայտնի դարձած տարրերը, քանոնի և կարկինի միջոցով կառուցում են որոնելի պատկերը: Վերջապես անհրաժեշտ է խնդիրը հետազոտել ամբողջությամբ, այսինքն՝ որոշել լուծումների թիվը, լուծումների թվի և տրված մեծությունների կապը, տրված մեծություններն ինչ պայմանի պիտի բավարարեն խնդիրը լուծելու համար և այլն:

## 1.4 Երկրաչափական տեղերի մեթոդ

Կառուցման խնդիրները լուծելիս ամենից հաճախ կիրառվում է **երկրաչափական տեղերի մեթոդը**:

**Սահմանում**: Որոշակի հատկությամբ օժտված **կետերի երկրաչափական տեղ** ասելով հասկանում ենք պատկեր, որի բոլոր կետերն ունեն այդ հատկությունը, և որից դուրս չկան այդպիսի կետեր: Կետերի երկրաչափական տեղի կիրառությունը կառուցման խնդիրների լուծման նկատմամբ կոչվում է **երկրաչափական տեղերի մեթոդ**: Այս մեթոդի էությունը կայանում է հետևյալում:

Աշխատում են ամբողջ խնդիրը հանգեցնել մի որոշակի կետի գտնելուն: Այդ կետը որոշվում է խնդրի տվյալներից բխող երկու պայմաններից: Եթե հաշվի չառնենք առաջին պայմանը, ապա գոյություն կունենա ոչ միայն մեկ կետ, այլ անթիվ բազմությամբ կետեր, որոնք օժտված լինելով միևնույն երկրաչափական հատկությամբ, կազմում են կետերի որևէ երկրաչափական տեղ: Իսկ եթե հաշվի չառնենք երկրորդ պայմանը և սահմանափակվենք առաջինով, ապա կստացվի մի այլ երկրաչափական տեղ: Այդ երկրաչափական տեղերի հատման յուրաքանչյուր կետը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Երբեմն խնդիրը լուծելու համար բավական է կառուցել միայն մեկ երկրաչափական տեղ, որի երկրաչափական հատկությունը կօգնի խնդրի լուծմանը: Այստեղից երևում է, թե որքան կարևոր է իմանալ զանազան երկրաչափական տեղեր: Այդ երկրաչափական տեղերի լավ իմանալը հաճախ օգնում է իսկույն տեսնել, թե որտեղ է գտնվում անհայտ կետը: Բազմաթիվ երկրաչափական տեղերից կնշենք նրանք, որոնք համարվում են նախնական հայտնի փաստեր և օժանդակ դեր կարող են տանել կառուցման շատ խնդիրներ լուծելիս:

1. Տված կետից հավասարահեռ կետերի երկրաչափական տեղը մի շրջանագիծ է, որի կենտրոնը նույն այդ կետն է (դիտարկում են միայն հարթության վրա գտնվող կետերի երկրաչափական տեղերը:
2. Տված երկու կետերից հավասար հեռավորություն ունեցող կետերի երկրաչափական տեղն այդ երկու կետերը միացնող հատվածի միջնուղղահայացն է:
3. Ուղղից հավասարահեռ կետերի երկրաչափական տեղը այդ ուղղին տարված երկու զուգահեռ ուղիղներն են, որոնք գտնվում են տված ուղիղի տարբեր կողմերում և նրանից հավասարահեռ են:
4. Երկրաչափական տեղն այն կետերի, որոնց հեռավորությունների հարաբերությունն անկյան կողմերից հաստատուն մեծություն է, O գագաթով ճառագայթ է՝ առանց O կետի, որն անցնում է այդ կետերից որևէ մեկով: Մասնավոր դեպքում, եթե կետերը հավասարապես են հեռացած անկյան կողմերից, ապա այդ կետերի երկրաչափական տեղն անկյան կիսորդն է:
5. Եթե անկյան կողմերը հատող զուգահեռ ուղիղներից անկյան ներսում առաջացած հատվածները բաժանվում են տրված հարաբերությամբ, ապա նրանց բաժանող կետերի երկրաչափական տեղը ճառագայթ է, որի սկիզբն անկյան գագաթն է և անցնում է այդ հատվածներից մեկը բաժանող կետով:
6. Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որտեղից տրված հատվածը երևում է տրված անկյան տակ, շրջանագծի աղեղ է, որը ձգում է այդ հատվածն իրրև լար:

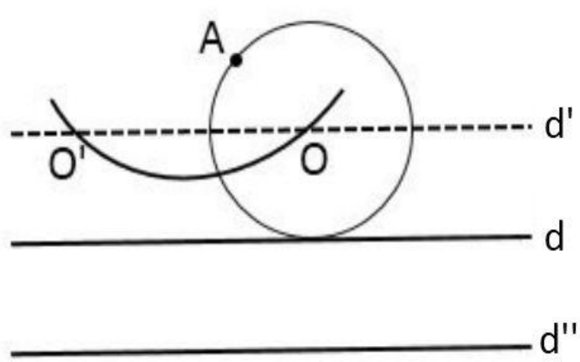
7. Տված շրջանագծի մեջ հավասար լարերի միջնակետերի երկրաչափական տեղը տված շրջանագծին համակենտրոն շրջանագիծ է, որը շոշափում է այդ լարերը:
8. Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որտեղից շրջանագիծը երևում է միևնույն անկյան տակ, տված շրջանագծին համակենտրոն շրջանագիծ է:
9. Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որտեղից տված շրջանագծին տարած շոշափողների երկարություններն ունեն միևնույն հաստատուն մեծությունը, տրված շրջանագծին համակենտրոն շրջանագիծ է:
10. Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների քառակուսիների գումարը տված $A$ և $B$ կետերից հավասար է $a^2$ հաստատունին, շրջանագիծ է, որոշակի շառավղով և կենտրոնով:
11. Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների հարաբերությունը տրված $A$ և $B$ կետերից $\frac{m}{n}$ հաստատուն մեծությունն է, շրջանագիծ է՝ որոշակի շառավղով և որոշակի կենտրոնով (Ապոլլոնյան շրջանագիծ):

Երկրաչափական տեղն այն կետերի, որոնցից տրված երկու շրջանագծերին տարած շոշափողներն իրար հավասար են, ուղիղ գիծ է, որն ուղղահայաց է նրանց կենտրոնագծին, նրա որոշակի կետում: Այդ ուղիղը կոչվում է տվյալ շրջանագծերի արմատական առանցք:

Բերենք օրինակ, որը լուծվում է երկրաչափական տեղի մեթոդով:

*Օրինակ:* Կառուցել տրված շառավղով շրջանագիծ, որը կանցնի տրված $A$ կետով և կշոշափի տրված d ուղիղը:

1) Լուծման որոնում: Ենթադրենք խնդիրը լուծված է $(O, r)$ շրջանագիծը որոնելին է: Քանի որ r շառավիղը տրված է, շրջանագիծը կլինի կառուցված, եթե հայտնի



Նկար 2

դառնա նրա $O$ կենտրոնը։ $O$ կետը բավարարում է երկու պայմանի 1) $\rho(A,O)=r$ և 2) $\rho(O,d)=r$ , որտեղ $\rho$-ն հեռավորությունն է տրված օբյեկտների միջև։ 1) պայմանը որոշում է $\{M/\rho(A,M)=r\}=S(A,r)$ պատկերը, իսկ 2)-ը՝ $\{M/\rho(M,d)=r\}=\{d',d''\}$, որտեղ $d'$ և $d''$-ը ուղիղներ են, այնպիսի, որ $\rho(d,d')=\rho(d,d'')=r$։

2) Կառուցում: Նախ կառուցենք $S(A,r)$ շրջանագիծը:Այնուհետև կառուցենք $d'$ և $d''$ ուղիղները այնպես որ $\rho(d,d')=\rho(d,d'')=r$: Հաջորդ քայլին գտնում ենք O կետը՝ $O\in S\,(A,r)\cap\{d',d''\}$: Որոնելի շրջանագիծը կլինի $S(O,r)$-ը:
3) Ապացույց: $O\in S\,(A,r)\Rightarrow A\in S\,(O,r)$ և $O\in\{d',d''\}\Rightarrow\rho\,(O,d)=r\Rightarrow$ $S\,(O,r)$-ը շոշափում է $d$ ուղիղը:
4) Հետազոտում: Պարզ է, որ եթե $\rho\,(A,d)<2r$, ապա $S\,(A,r)\cap\{d',d''\}$ պատկերը բաղկացած է երկու կետերից $O$ և $O'$: Ուստի այս դեպքում խնդիրը ունի երկու լուծում:

Եթե $\rho\,(A,d)=2r$, ապա $S\,(A,r)\cap\{d',d''\}$ պատկերը բաղկացած է մեկ կետից՝ $O$-ից և խնդիրը ունի միակ լուծում:

Եթե $\rho\,(A,d)>2r$, ապա $S\,(A,r)\cap\{d',d''\}=\emptyset$ և խնդիրը լուծում չունի:

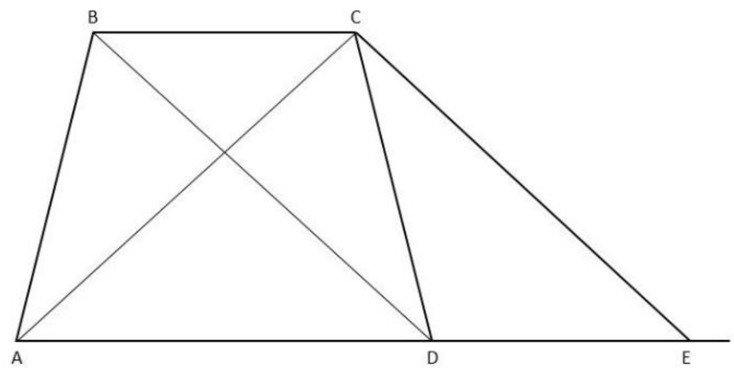
### 1.5 Ձևափոխման մեթոդ

Հաճախ հաջողվում է հասնել խնդրի լուծմանը պատկերների ձևափոխման (շարժման) օգնությամբ: Շատ դեպքերում, այդ մեթոդի կիրառությունը կարելի է նախատեսնել առաջին իսկ հայացքից: Նրա էությունն այն է, որ տրված կամ որոնելի պատկերը և կամ նրանց որևէ մասը փոխարինվում է մի նոր պատկերով, որը նախկինի հետ կապված է որոշակի կառուցմամբ և հնարավորություն տալիս լուծելու խնդիրը կամ մոտենալու խնդրի լուծմանը: Այստեղ կդիտարկենք այնպիսի ձևափոխություններ, որոնց դեպքում պահպանվում են կետերի հեռավորութունները, որի շնորհիվ էլ նոր պատկերը հավասար է դառնում հնին (նրանից տարբերվում է միայն դիրքով): Այդպիսի ձևափոխությունները կոչվում են տեղափոխություններ: Նրանց թվին են պատկանում.

1) **զուգահեռ տեղափոխում**, երբ պատկերի բոլոր կետերը տեղափոխվում են միատեսակ ուղղված, զուգահեռ և հավասար հատվածներով: Դիտարկենք զուգահեռ տեղափոխման մեթոդի կոնկրետ օրինակ:

*Օրինակ:* Կառուցել սեղան տրված հիմքերով և անկյունագծերով:

Լուծում: Ենթադրենք խնդիրը լուծված է և $ABCD$ սեղանը կառուցված է: $BD$ անկյունագիծը զուգահեռ տեղափոխենք այնպես, որ նրա $B$ գագաթը համընկնի $C$ գագաթի հետ: $ACE$ եռանկյան բոլոր կողմերը հայտնի են, որովհետև $DE = BC$, որպես զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր: Խնդիրը կունենա հետևյալ լուծումը:



Նկար 3

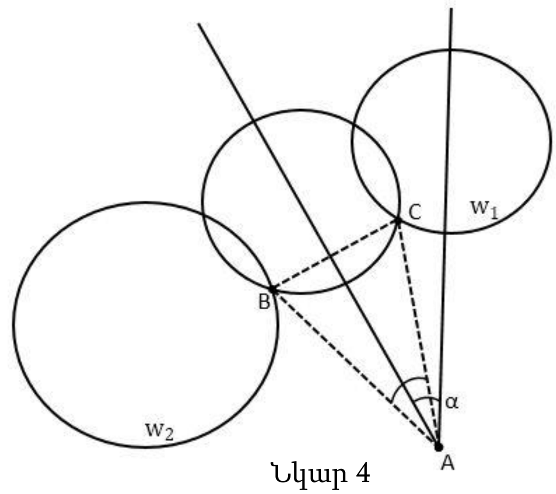
Սկզբում կառուցում ենք $\Delta ACE$-ը ըստ երեք կողմերի: Այնուհետև $E$ կետից տեղադրում $DE = BC$ հատվածը: Կառուցում ենք $DB \parallel CE$ և $CB \parallel AD$ ուղիղները և $BD \cap BC = B$ կետը միարժեքորեն որոշում: Ստացված $ABCD$ սեղանը որոնելին է:

2) **պտույտ**, որի դեպքում կետերից մեկը մնում է անշարժ, իսկ նրանից ելնող բոլոր կիսաուղիղները պտտվում են նրա շուրջը միևնույն ուղղությամբ՝ տվյալ անկյունով: Այս մեթոդը կայանում է նրանում,որ պատկերի որոշ էլեմենտներ պտտվում են նոր պատկեր ստանալու համար, որի կառուցումը հայտնի է:

Դիտարկենք այս մեթոդը կոնկրետ օրինակով:

*Օրինակ:* Տրված են $w_1$ և $w_2$ շրանագծերը և $A$ կետը: Կառուցել հավասարասրուն եռանկյուն $A$ գագաթով և այդ կետում կողմերով տրված $\alpha$ անկյունով այնպես, որ հիմքի գագաթները լինեն տրված շրջանագծերի վրա:

*Լուծում:* Ենթադրենք խնդիրը լուծված է և $ABC$ եռանկյունը կառուցված է: $AC$ կողմի պտույտը $A$ կետի շուրջը $\alpha$ անկյունով $C$ կետը կտանի $B$ կետին: Այս փաստը հնարավորություն է տալիս խնդրի լուծումը ձևակերպել այսպես. $w_1$ շրջանագիծը $\alpha$ անկյունով տեղափոխում ենք մեր դեպքում դեպի ձախ: Այդ դեպքում $w_1$ շրջանագիծը կհատվի (ընդհանուր ասած) $w_2$ շրջանագծի հետ, որի արդյունքում կգծվի B կետը: $C$ կետը ստանալու համար բավական է $A$ կենտրոնով և $AB$ շառավղով շրջանագիծ գծել, որի հատման կետը $w_1$ շրջանագծի հետ կլինի $C$ կետը:



Նկար 4

3) **համաչափություն կետի նկատմամբ**, կամ պտույտ 180°-ով:
4) **համաչափություն ուղիղի նկատմամբ**, երբ այդ ուղիղը մնում է անշարժ, իսկ պատկերը պտտվում է նրա շուրջը, որպես առանցքի շուրջ և նորից ընկնում է հարթության վրա իր հակառակ երեսով(կողմով):

Առաջին երեք տեղափոխումները կարելի է իրականացնել անընդհատ շարժումով, առանց դուրս գալու հարթությունից: Անընդհատ զուգահեռ տեղափոխումների դեպքում պատկերի կետերը գծում են զուգահեռ ուղիղներ, հատվածներ, իսկ անընդհատ պտույտի դեպքում՝ համակենտրոն շրջանագծեր: Կարծես թե մենք ստանում ենք ամբողջ պատկերի երկրաչափական տեղը: Համաչափությունը կարելի է պարզապես որոշել՝ առանց դիմելու շարժման:

1. Կետի նկատմամբ համաչափությունում այն հատվածները որոնք միացնում են երկու հսմաչափ կետերը համաչափության անշարժ կենտրոնի հետ, հավասար են և կենտրոնից ուղղված են դեպի տարբեր կողմերը:
2. Ուղիղի նկատմամբ համաչափությունում երկու համաչափ կետերից համաչափության անշարժ առանցքի վրա իջեցրած ուղղահայացներն ունեն ընդհանուր հիմք, հավասար են և գտնվում են առանցքի տարրեր կողմերում:

Նկատենք, որ վերոնշյալ ձևափոխություններով, ըստ էության, սպասվում են բոլոր հնարավոր տեղափոխությունները, քանի որ յուրաքանչյուր տեղափոխություն կամ վերադրում հանգում է զուգահեռ տեղափոխման, պտույտի և, եթե անհրաժեշտ է, համաչափության՝ ուղիղի նկատմամբ:

## 1.6 Նմանության մեթոդ

Կառուցման շատ խնդիրների լուծումը հիմնված է նման պատկերների հատկությունների վրա: Այդ հատկությունների վրա է հիմնված, ամենից առաջ, մի քանի երկրաչափական տեղերի արտածումը: Սակայն ավելի հաճախ հարկ է լինում դրանք կիրառել որպես ձևափոխման մեթոդ:

Նմանության մեթոդի կիրառման սովորական եղանակն այն է, որ որոնելի պատկերին ներկայացվող պահանջների մի մասը դեն է նետվում, այնպես, որ մնացած պահանջներին բավարարում են որոնելիին նման անթիվ բազմությամբ պատկերներ: Կառուցելով դրանցից մեկը, այնուհետև կարող ենք նրանից անցնել որոնելիին: Վերջին գործողությունը պահանջում է նման պատկերների փոխադարձ դասավորության որոշ ուսումնասիրություն:

Պարզագույն փոխադարձ դասավորությունը **նման դասավորությունն** է կամ **նմանադրությունը** (հոմոթետիա): Երկու պատկերներ կոչվում են **նման դասավորված** կամ **նմանադիր** (հոմոթետիկ), եթե նրանք նման են և նրանց համապատասխան ուղիղները՝ զուգահեռ: Երկու նմանադիր պատկերների համապատասխան կետերը միացնող ուղղիները զուգամիտում են միևնույն կետում, որը կոչվում է **նմանության կետրոն**: Այդ պատկերների համապատասխան հատվածները կա՛մ բոլորը միատեսակ ուղղություն ունեն, և կա՛մ բոլորը՝հակառակ: Առաջին դեպքում համապատասխան կետերը դասավորված են նմանության կետրոնի մեկ կողմում, երկրորդ դեպքում՝ տարբեր կողմերում: Դրան համապատասխան տարբերվում են ուղիղ և հակադարձ նմանադիր դասավորություն: Նմանության կենտրոնի հետ համապատասխան կետերը միացնող հատվածների հարաբերությունը հավասար է պատկերների համապատասխան հատվածների հարաբերությանը: Այդ հարաբերությունը կոչվում է **նմանության գործակից**:

Այսպիսով, տրված պատկերին նման պատկեր կառուցելու համար, եթե հայտնի են նմանության կենտրոնը և նմանության գործակիցը, անհրաժեշտ է բոլոր հատվածները, որոնք միացնում են տրված պատկերի կետերը նմանության կենտրոնի հետ, որոշակի հարաբերությամբ ձգել կամ սեղմել:

Եթե տվյալների և որոնելիների միջև եղած կապը հենց սկզբից անորոշ է, ապա պետք է փորձել նրանց միջև ստեղծել մի քանի միջանկյալ օղակներ: Քանի որ այդ կապերը մեզ հայտնի չեն, պարզ է, որ մենք այդ օղակները վստահությամբ նշել չենք կարող և ստիպված ենք դատել՝ խարխափելով: Սակայն համբերատար և ուշադիր վերաբերմունքով մեզ կհաջողվի գտնել պահանջվող կապը: Խնդրի այսպիսի կշռադատումը կոչվում է **վերլուծություն**:

Կառուցումից հետո նախ հարկավոր է ստուգել, թե թույլ չի տրված արդյոք որևէ թերատություն, որի հետևանքով կարող է ստացվել միայն լուծումների մի մասը: Այնուհետև հարկավոր է բացահայտել, թե քանի լուծում է ստացվում այս կամ այն տվյալների դեպքում: Այդ մասը կոչվում է լուծման հետազոտում:

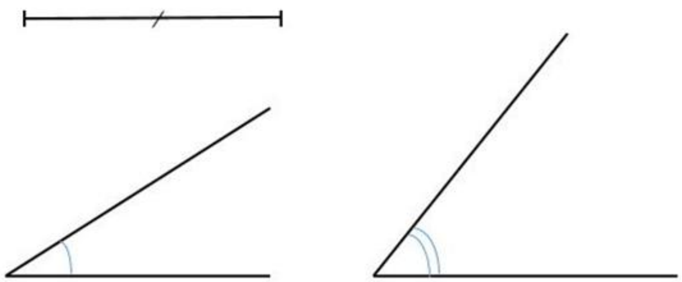
Թեև կառուցմանը նախորդում է խնդրի կշռադատումը, այնուամենայնիվ օգտակար է որոշ դեպքերում ստուգել, թե իրո՞ք պատկերի կառուցումը բավարարում է խնդրի պայմաններին: Որպես սխալի աղբյուր կարող է ծառայել կառուցվելիք պատկերի նախնական սխալ պատկերումը, որով առաջնորդվել ենք վերլուծությունը կատարելիս, կամ հապճեպ կատարված վերլուծությունը և այլն:

Դիտարկենք օրինակ:

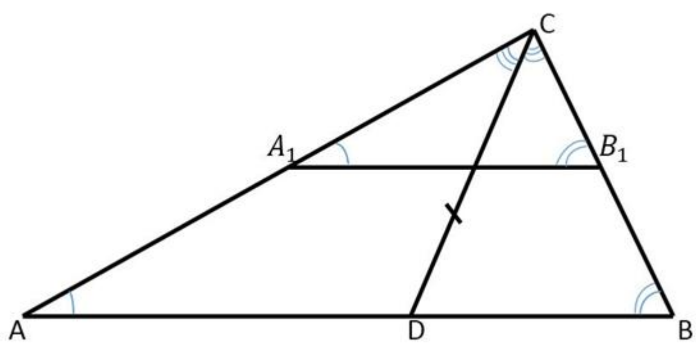
*Օրինակ:* Կառուցել եռանկյուն՝ տրված երկու անկյունով և երրորդ անկյան կիսորդով:

*Լուծում:* Նկար 5,ա-ում պատկերված են տրված երկու անկյունը և տրված հատվածը: Պահանջվում է կառուցել եռանկյուն, որի երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար լինեն տրված երկու անկյուններին, և երրորդ անկյան գագաթով տարված կիսորդը հավասար լինի տրված հատվածին:

Նախ կառուցենք որոնելի եռանկյանը նման մի որևէ եռանկյուն: Դրա համար գծենք կամայական $A_1B_1$ հատված և կառուցենք $A_1B_1C_1$ եռանկյուն, որի $A_1$ և $B_1$ անկյունները համապատասխանաբար հավասար են տրված անկյուններին(նկար 5,բ):



Այնուհետև կառուցենք $C$ անկյան կիսորդը և նրա վրա տեղադրենք տրվածին հավասար $CD$ հատվածը: $D$ կետով տանենք $A_1B_1$ ուղղին զուգահեռ ուղիղ: Այն կհատի $C$ անկյան կողմերը ինչ-որ $A$ և $B$ կետերում: Ստացված $ABC$ եռ ա յունը որոնելին է:




Իրոք, քանի որ $AB||A_1B_1$, ապա $\angle A = \angle A_1$ և $\angle B = \angle B_1$, այսինքն՝ կառուցված ABC եռանկյան երկու անկյունները հավասար են տրված անկյուններին: Իսկ ըստ կառուցման՝ այդ $A$ Բ եռւ

Նկար 5

գագաթով տարված կիսորդը հավասար է տրված հատվածին: Այսպիսով՝ $ABC$ եռանկյունը բավարարում է տրված բոլոր պայմաններին: Ակնհայտ է, որ խնդիրը կունենա լուծում, եթե տրված երկու անկյան գումարը փոքր է 180°-ից: Քանի որ հատվածը կարելի է ընտրել կամայական ձևով, ապա գոյություն ունեն խնդրի պայմաններին բավարարող անվերջ շատ եռանկյուններ: Սակայն բոլոր այդ եռանկյունները իրար հավասար են, այսինքն՝ խնդիրն ունի միակ լուծում:

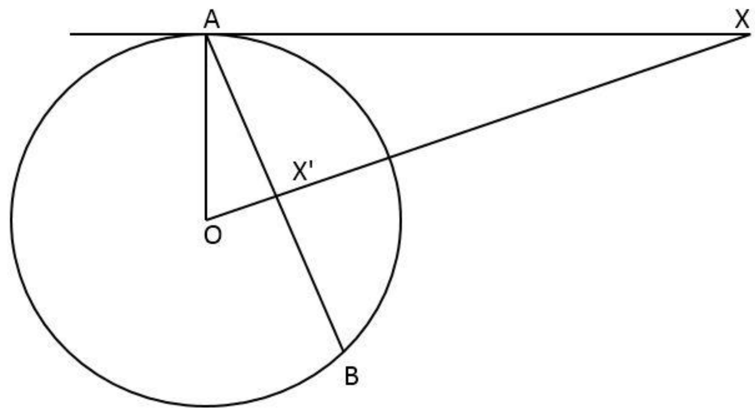
### 1.7 Ինվերսիայի մեթոդ

Դիցուք $O$-ն որևէ կետ է հարթությունում, $R$-ը որևէ դրական թիվ: Ձևափոխությունը, որը $\forall X, X \neq 0$ կետի համապատասխանեցնում է $X'$ կետ պատկանում է $OX$

ճառագայթին այնպես, որ $OX * OX' = R$ կոչվում է ինվերսիա: $O$ կետը կոչվում է ինվերսիայի կենտրոն, $R$-ը ինվերսիայի շառավիղ:

Ինվերսիա ձևափոխությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ: Գծենք $O$ կենտրոնով և $R$ շառավղով շրջանագիծ:

Եթե $X$-ը գտնվում է շրջանից դուրս, ապա պետք է տանել $(O, R)$ շրջանագծի շոշափող և նրա շոշափման $A$ կետից $AB \perp OX$ հատվածը: Պարզ է որ $AB \cap OX = X'$: Հակառակը՝ շրջանի ներսի O-ից տարբեր $X'$ կետի համապատասխանը պետք է կառուցել այսպես. տանել $OX$ ՛ճառագայթին ուղղահայաց ուղիղ և նրա և շրջանագծի հատման $A$ կետում տարված կետը կլինի $X'$-ի համապատասխան $X$-ը:

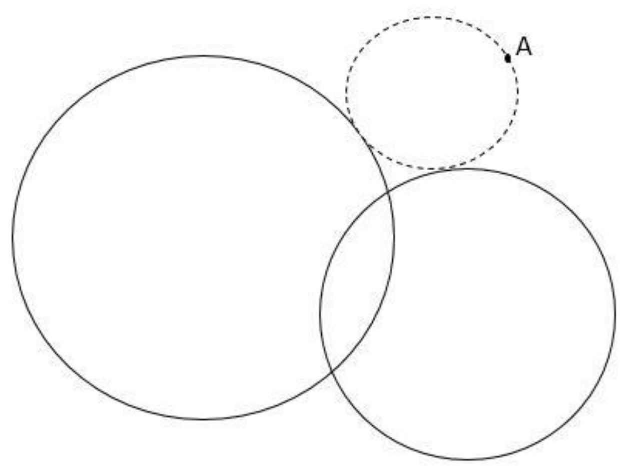


Նկար 6

***Թեորեմ:*** Ինվերսիայի ժամանակ ինվերսիայի կենտրոնով չանցնող շրջանագիծը անցնում է շրջանագծի, կենտրոնով անցնող շրջանագիծը անցնում է ուղղի, կենտրոնով չանցնող ուղիղը անցնում է շրջանագծի, կենտրոնով անցնող ուղիղը արտապատկերվում է ինքն իր վրա: Ինվերսիայի ձևափոխությունը օժտված է ևս մի կարևոր հատկությամբ,այն է. Ինվերսիան պահպանում է անկյունները համապատասխան կորերի միջև:

*Օրինակ:* Տրված են երկու հատվող շրջանագծեր և $A$ կետը: Կառուցել շրջանագիծ, անցնող $A$ կետով, որը շոշափի տրված երկու շրջանագծերը:

*Լուծում:* Ենթադրենք շրջանագիծը կառուցված է, կատարենք ինվերսիայի ձևափոխության շրջանագծերի հատման կետի նկատմամբ: Այդ դեպքում A-ն



կանցնի մի A'-ի, տրված շրջանագծերը կանցնեն ուղիների, իսկ որոնելի շրջանագիծը կանցնի շրջանագծի, որը շոշափում է այդ ուղիներին, որոնք անցնում են A' կետով: Կառուցելով այն, մենք կատարենք հակադարձ ձևափոխություն: Այդ դեպքում կառուցված շրջանագիծը կանցնի որոնելի շրջանագծին:

## ԳԼՈՒԽ 2. ԽՆԴԻՐՆԵՐ

### 2.1 Կառուցման խնդիրների լուծելիության մասին

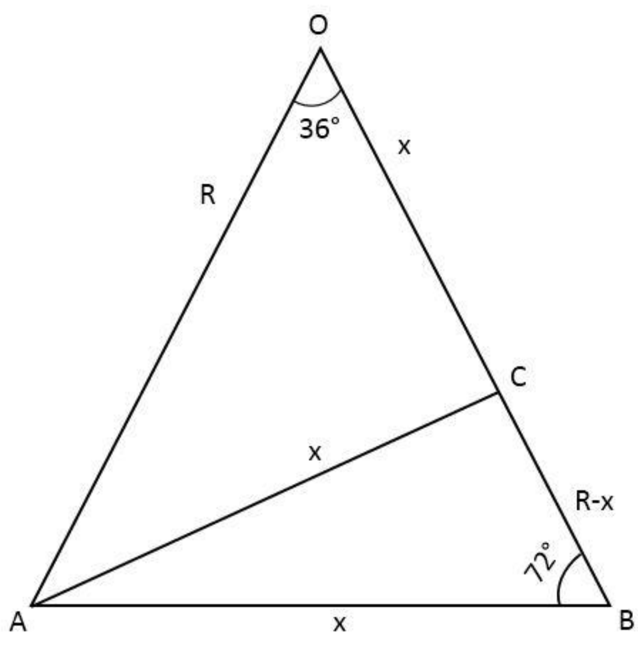
Կարկինով և քանոնով կառուցումները որոշ դեպքերում լինում են շատ դժվար, անգամ անիրականանալի։ Օրինակ խորանարդի կրկնապատկումը, այսինքն՝ գտնել խորանարդի կողը (կառուցման իմաստով), որի ծավալը լինի երկու անգամ մեծ քան տրվածը։

Լուծելի է կառուցման խնդիրը, թե ոչ հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ թեորեման։

***Թեորեմ:*** Կառուցման խնդիրը, որի լուծումը բերում է քառակուսի արմատի, լուծելի է կարկինի և քանոնի օգնությամբ։ Եվ հակառակը, եթե խնդրի անալիտիկ լուծումը բերում է ռացիոնալ գործողությունների և քառակուսի արմատ հանելուն, ապա այն լուծելի է կարկինի և քանոնի օգնությամբ։

***Խնդիր 1:*** Կառուցել կանոնավոր ներգծյալ տասանկյուն, եթե շրջանագծի շառավիղը հավասար է $R$։

*Լուծում:* Կանոնավոր տասանկյան կողմը՝ $a_{10}$-ը հավասարասրուն եռանկյան հիմքին է հավասար, որի սրունքի երկարությունը R է, իսկ գագաթի անկյունը՝ 36°։




Հիմքի անկյան AC կիսորդը տրված եռանկյունը տրոհում է երկու հավասարասրուն եռանկյունների՝ $AOC$ և $ABC$։ Այդ իսկ պատճառով $AB = AC = OC$։ Համաձայն կիսորդի հատկության կունենանք՝

$$\frac{BC}{AB} = \frac{OC}{OA}$$

Օգտագործելով $AB = x$ նշանակումը, կստանանք՝

$$\frac{R-x}{x} = \frac{x}{R} \Longrightarrow x^2 + Rx - R^2 = 0$$

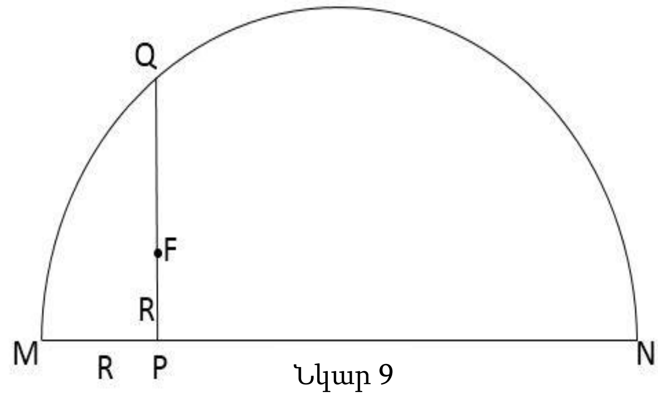
Նկար 8

Այս հավասարման դրական արմատը կլինի՝

$$x = \frac{R\sqrt{5} - R}{2}$$

$X$ հատվածը կարկինի և քանոնի օգնությամբ հեշտ է կառուցվում: Վերցնենք կիսաշրջան, որի $r$ շառավիղը հավասար է $3R$:

Վերցնենք $MN$ տրամագծի վրա $MP = R$ հատվածը և $QP$ ուղղահայացի վրա՝ $PF = R$:

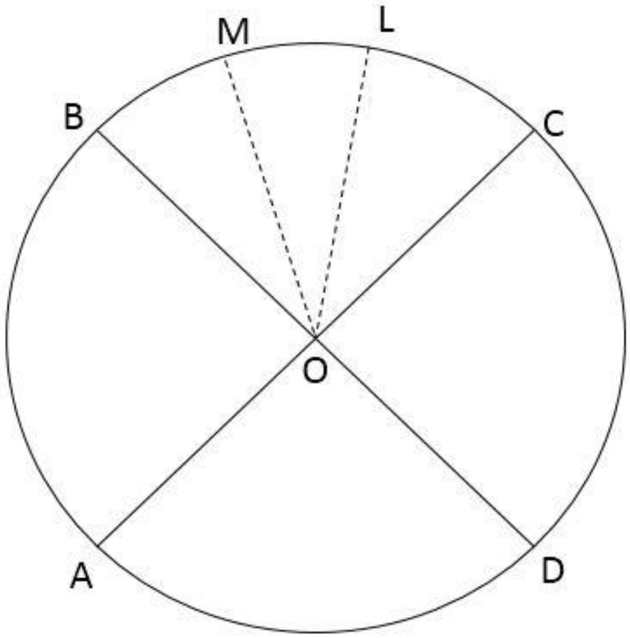



Նկար 9

Քանի որ $QP = \sqrt{MP * PN} = \sqrt{5R * R} = R\sqrt{5} = R + QF$, ապա՝

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{QF}}{2} = \frac{\mathrm{R}\sqrt{5} - \mathrm{R}}{2}:$$

***Խնդիր 2:*** Կառուցել ա) $\alpha = 45°$, բ) $\beta = 22.5°$ անկյունը:




Նկար 10

ա) Կառուցենք որևէ կենտրոնով և որևէ R շառավղով շրջանագիծ:

*Լուծում:* Կառուցենք $R\sqrt{2}$ հատվածը: Դրա համար կառուցենք ցանկացած $a$ ուղղին ուղղահայաց b ուղիղ և այդ ուղիղների հատման կետից յուրաքանչյուրի վրա տեղադրենք $R$ հատվածը: Եռանկյան ներքնաձիգը $R\sqrt{2}$ երկարությամբ հատված է՝ BC-ն: Կառուցենք ∠BOM-ի կիսորդը: Ստացված ∠BOM-ը կլինի 45°-ի անկյուն:

բ) Կառուցելով $OL$ կիսորդը, կստանանք՝ $\angle LOC = 22.5$:

# ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Ի վերջո, յուրաքանչյուր կառուցման խնդիր եզակի է իր տեսակով, և յուրաքանչյուրը պահանջում է անհատական մոտեցում դրան լուծումներ: Այդ պատճառով է, որ սովորում ենք լուծել կառուցման խնդիրները, որոնք կարող են լինել չափազանց դժվար , իսկ երբեմն՝ գրեթե անհնար: Բայց այս խնդիրները տալիս են լուծումների անհատական ստեղծագործական որոնման եզակի հնարավորություն սովորողի ինտուիցիայի ու ենթագիտակցության օգնությամբ:

Դպրոցական երկրաչափության դասավանդման փորձը ցույց է տալիս, որ աշակերտները կառուցման խնդիրների լուծման ընթացքում հաճախ են հանդիպում որոշակի դժվարությունների, որը բացատրվում է հետևյալ հանգամանքներով. կառուցման խնդիրների լուծումը պահանջում է հարթության ձևափոխությունների՝ զուգահեռ տեղափոխություն, կենտրոնական և առանցքային համաչափություն, պտույտ, պատկերների նմանություն և այլ գիտելիքների բավարար իմացություն, ոչ ստանդարտ մտածողություն, կառուցման գործիքների կիրառություն: Աշխատանքի նպատակն է օգնել աշակերտներին նշված դժվարությունները հաղթահարելու հարցում: Կառուցման խնդիրները մեծ դեր են խաղում դպրոցականի մաթեմատիկական պատրաստվածության հարցում: Ոչ մի այլ բնույթի խնդիր մաթեմատիկական տրամաբանության և մտածողության զարգացման համար այնքան նյութ չի հաղորդում, որքան կառուցման խնդիրը: Կառուցման խնդիրները սովորաբար թույլ չեն տալիս լուծման ստանդարտ մոտեցում և ձևական ընկալում սովորողների կողմից: Կառուցման խնդիրները նպատակահարմար են դպրոցական երկրաչափության յուրաքանչյուր տեսական նյութի ամրապնդման համար: Լուծելով կառուցման խնդիրներ աշակերտները ձեռք են բերում հմտություններ կառուցման գործիքների օգտագործման հարցում:

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ


1. Կ. Գ. Առաքելյան, Հ. Ս. Նավասարդյան, Ա. Հ. Սարգսյան, Մաթեմատիկա 9<> հրատարակչություն, 2016 թ:

2. Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ.Կադոմցև, Է. Գ.Պոզնյակ, Ի. Ի. Յուդինա, Երկրաչափություն 7, Երևան, <> հրատարակչություն, 2005 թ:

3. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия 7-9, шестое издание. Учеб. Для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений - М.: Просвещение, 2016. - 336с.

4. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7-9. Учеб. для 7-9кл. общеобразоват. учреждений - М.: Дрофа , 2015. - 465 с.

5. В. Г. Болтянский, И. М. Яглом, Геометрия для 9 класса, Учебно-педагогическое издательстжо, М. 1963 г.

6. И. М. Яглом, Геометрические преобразования, Издательство технико-теоретической литературы, М. 1955 г.

7. https://ru.wikipedia.org

8. http://hijos.ru

9. https://nsportal.ru

10. https://math.ru

11. https://www.wikiwand.com