ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

«Երևանի Լեոյի անվան հ. 65 ավագ դպրոց» ՊՈԱԿ

ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Թեմա՝ Պարամետր պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծման ալգորիթմները, որպես սովորողի մոտ սովորել սովորելու, մաթեմատիկական և գիտատեխնիկական կարողունակություն ձևավորելու խթան:

Կատարող՝ Երևանի Հովհ. Շիրազի անվան հ. 169
հիմնական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցչուհի
Շուշանիկ Փարեմուզյան:

Ղեկավար՝ Ջինա Խաչատրյան

ԵՐԵՎԱՆ 2023

Բովանդակություն

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ 3
ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ 4
ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՀԵՏ ԱՌՆՉՎՈՂ ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ 6
ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ 8
ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՈՎ 9
ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ 11
ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ 12
ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ 13
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ 14

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Պարամետր պարունակող խնդիրները մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում դասվում են համեմատաբար բարդերի շարքին: Ավելին, դրանց լուծումը հաճախ պահանջում է ստեղծագործական մոտեցում: Սովորողների մեծամասնությունը դժվարանում է պարամետրով խնդիրներ լուծելիս: Պատճառները տարբեր են: Կարելի է վկայակոչել հետևյալ նկատառումները, որոնք խոչընդոտում են թեմայի յուրացումը:

- Սովորողների կողմից ֆունկցիաների հատկությունների մեխանիկական սերտումը:
- «Պարամետր» հասկացության ոչ ճիշտ ըմբռնումը:
- Ոչ բոլոր արժեքների քննարկումը:
- Առաջադրանքի պահանջի ոչ ճիշտ ըմբռնումը:

ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

Դիցուք տրված է x և a փոփոխականներ պարունակող

(1) F (x,a) = G (x;a) հավասարությունը a փոփոխականի յուրաքանչյուր սևեռված (ֆիքսված) արժեքի դեպքում, (1) հավասարությունը կարելի է դիտարկել որպես հավասարում x փոփոխականի (անհայտի) նկատմամբ և ընդհակառակը, x-ի յուրաքանչյուր սևեռված արժեքի դեպքում այն կարելի է դիտարկել իբրև հավասարում a փոփոխականի նկատմամբ: Ընդհանրապես (1) հավասարությունը կարելի է դիտարկել նաև որպես երկու՝ x և a փոփոխականներով հավասարում:

Եթե պահանջվում է թվային որևէ A բազմության յուրաքանչյուր a տարրի համար լուծել (1) հավասարումը x փոփոխականի նկատմամբ, ապա (1) հավասարումն անվանում են մեկ՝ x փոփոխականով (անհայտով) և մեկ՝ a պարամետրով հավասարում: A բազմությունը կոչվում է պարամետրի փոփոխման տիրույթ:

Անհայտի ընտրությունը պայմանական է: Պայմանավորվենք դիտարկվող (1) տեսքի հավասարումներն ընդունել որպես x պես x փոփոխականով և a պարամետրով հավասարումներ: Անհայտները կամ փոփոխականները սովորաբար նշանակում են x, y, z տառերով, իսկ պարամետրերը՝ a, b, c… տառերով:

(1) հավասարումը, ըստ էության հավասարումների մի ամբողջ բազմության հակիրճ գրառումն է, որոնցից յուրաքանչյուրը ստացվում է (1) հավասարումից՝ a-ի կոնկրետ արժեքի դեպքում:

Պայմանավորվենք ընդունել , որ հավասարման մեջ պարամետրն ընդունում է ցանկացած իրական արժեք, այսինքն պարամետրի փոփոխման տիրույթը R-ն է, եթե չկան հատուկ վերապահումներ:

Հանրահայտ է, որ պարամետր պարունակող առաջադրանքները համարվում են ոչ պարզ առաջադրանքներ: Նման խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտություն է առաջանում լինել չափից ավելի ուշադիր և զգույշ՝ դիտարկելով բոլոր հնարավոր դեպքերը: Ըստ էության, հետազոտական աշխատանք է պետք ցուցաբերել:

Լուծել (1) հավասարումը, նշանակում է՝ այն լուծել a պարամետրի բոլոր արժեքների դեպքում: Եթե (1) հավասարումը a պարամետրի թեկուզ մեկ արժեքի դեպքում չի քննարկվում, ապա այդ հավասարման լուծումն ավարտված չի համարվում: Երկու և ավելի պարամետրերով և մեկ՝ x փոփոխականով հավասարումների հասկացությունները ներմուծվում են նույն ձևով: Օրինակ՝ մեկ x փոփոխականով և երկու՝ a և b պարամետրերով հավասարման ընդհանուր տեսքն է F (x, a, b) = G (x, a, b):

Համանման ձևով ներմուծվում են նաև պարամետր պարունակող անհավասարումների (F (x, a) > G (x, a), F (x, a, b) > G (x, a, b և այլն) հասկացությունները: Այստեղ ևս ընդունվում է, որ պարամետրի փոփոխման տիրույթը իրական թվերի բազմությունն է:

Քանի որ պարամետր պարունակող հավասարումն (անհավասարումը) իրենից ներկայացնում է անվերջ շատ հավասարումների համախումբ, ուստի պարզ է, որ անհնար է առանձնացնել նրանցից յուրաքանչյուրը: Լուծման ընթացքում համարում են, որ պարամետրերը հայտնի մեծություններ են:

ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՀԵՏ ԱՌՆՉՎՈՂ ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Գտնե՛լ a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $f(x) = \frac{ax}{x^2+9}$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը 3 է:

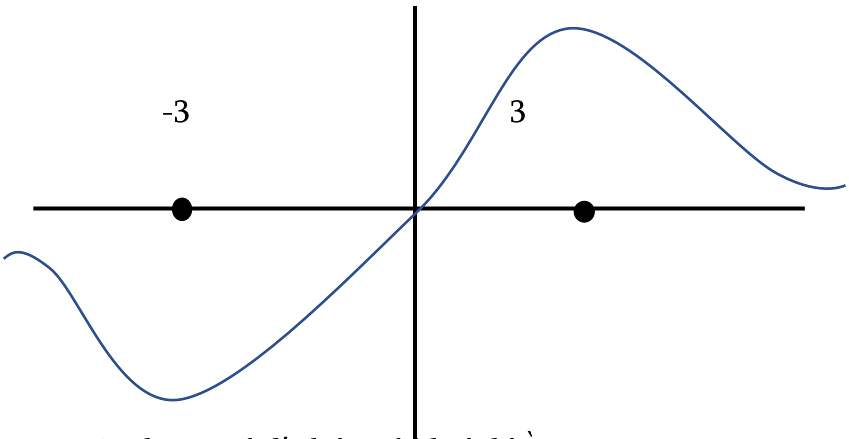
Լուծում. $f'(x) = \frac{(ax)'(x^2+9)-ax(x^2+9)'}{(x^2+9)^2} = \frac{9a-ax^2}{(x^2+9)^2}$

Գտնենք կրիտիկական կետերը՝ $f'(x) = 0$ $\begin{cases} 9a - ax^2 = 0 \ \ (1) \\ (x^2+9)^2 \neq 0 \end{cases}$

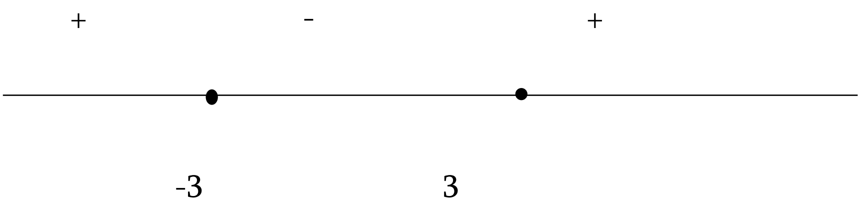
Եթե a = 0, ապա $f(x) = 0$ x-ի ցանկացած արժեքների համար, ուստի նրա մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը 0 է, այսինքն a = 0-ն չի բավարարում խնդրի պայմանին: Եթե a≠0 (1)-ից կստանանք $x = \pm 3$:

Եթե $a > 0$, ապա f'-ի նշանները կլինեն՝

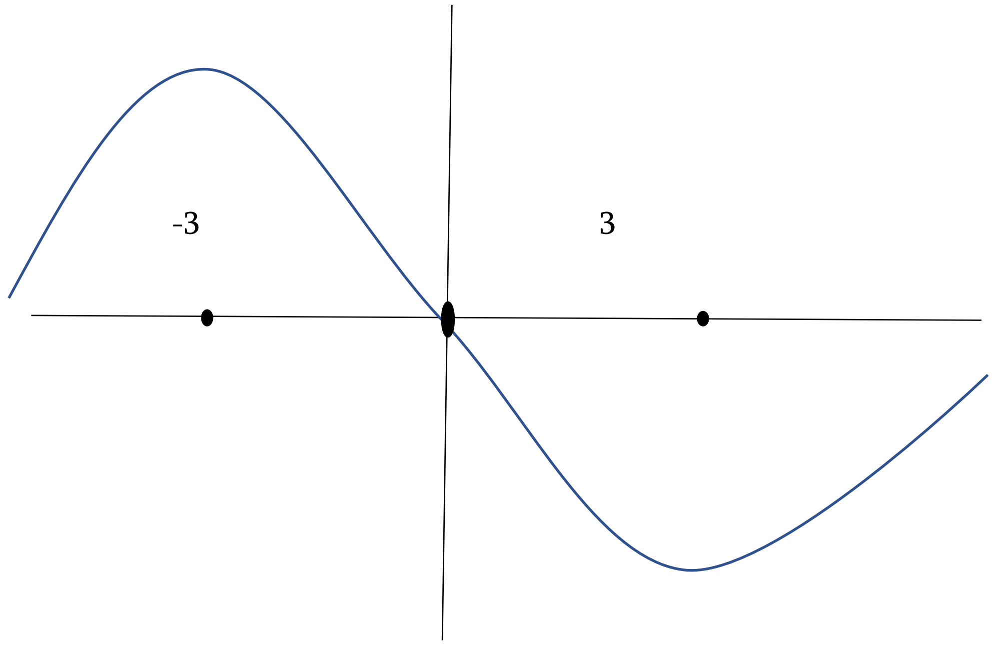
Հաշվի առնելով, որ այս դեպքում f(x)>0, եթե x>0 և f(x)<0, եթե x<0, տեսնում ենք, որ x=3 կետում f(x)-ը ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, իսկ x=3 կետում փոքրագույն արժեքը: (նկ. 1)



$a < 0$ դեպքում f' -ի նշաններն են՝



Հաշվի առնելով, որ այս դեպքում f(x)<0, եթե x>0 և f(x)>0, եթե x<0, տեսնում ենք, որ x=3 կետում f(x)-ը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը, իսկ x=-3 կետում մեծագույն արժեքը: (նկ.2)



Այսպիսով խնդրի պահանջը նշանակում է՝

$$|f'(3) - f'(-3)| = 3\left|\frac{3a}{18} + \frac{3a}{18}\right| = 3$$

Պատ՝ +9, -9:

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Գտնե՛լ $y = \frac{2^x-1}{2^{2x}+2^x}$

Լուծում պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $\frac{2^x-1}{2^{2x}+2^x} = b$ հավասարումը լուծում ունի: Քանի որ $2^{2x}+2^x \neq 0$, կստանանք

(1) $b2^{2x} + (b-1)2^x + 1 = 0$

Եթե b=0, կստանանք 2^x=1; x=0, այսինքն b=0-ն բավարարում է խնդրի պայմանին:

Եթե b≠0, նշ. 2^x= t և (1)-ի երկու մասը բաժանենք b-ի:

(2) $t^2 + \left(1 - \frac{1}{b}\right)t + \frac{1}{b} = 0$

Խնդրի պահանջը կայանում է նրանում, որ ստացված քառակուսի հավասարումը (t-ի նկատմամբ) ունենա գոնե մեկ դրական արմատ, իսկ դա իր հերթին նշանակում է, որ (2)-ի մեծ արմատը դրական է, այսինքն՝

$-(1-\frac{1}{b}) + \sqrt{(1-\frac{1}{b})^2 - \frac{4}{b}} > 0$

Լուծելով այս իռացիոնալ անհավասարությունը և ստացված պատասխանին ավելացնելով b=0 կետը, կստանանք վերջնական պատասխանը:

Պատ՝$\left(-\infty, 3 - 2\sqrt{2}\right)$:

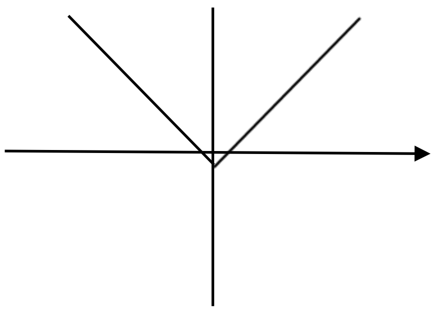
ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՈՎ

Գտնե՛լ $||x-2|-4| = a^2 + 3a$ հավասարման արմատների քանակը կախված a պարամետրից:

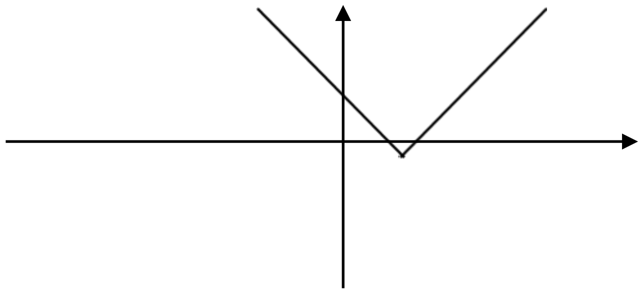
Դիտարկենք $f|x| = ||x-2|-4|$ ֆունկցիան և կառուցենք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

$y = f|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կստանանք հետևյալ ձևափոխությունների արդյունքում:

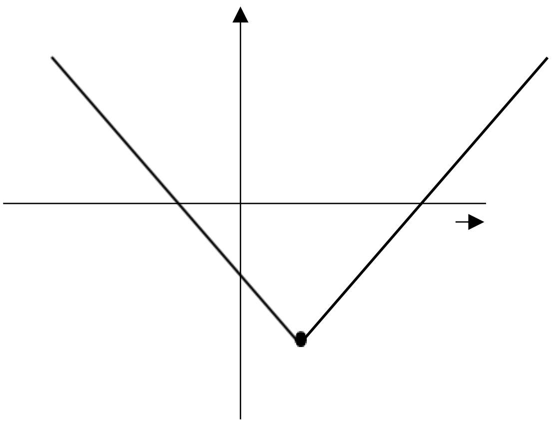
1) $y_1 = |x|$



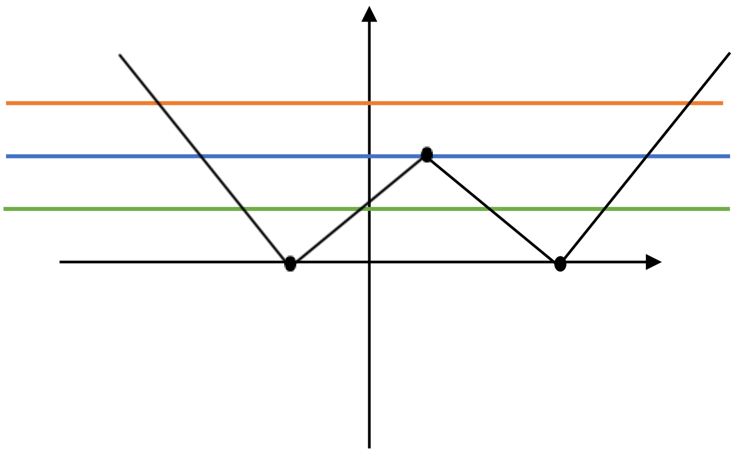
2) $y_2 = |x-2|$



3) $y_3 = |x-2| - 4$



4) $y_4 = ||x-2|-4|$



Փորձենք հավասարումը լուծել y_4=||x-2|-4| ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ:

1) Եթե a^2+ 3a<0 ապա հավասարումն արմատ չունի:

Եթե $a \in (-3{,}0)$ ապա $x \in \emptyset$:

2) Եթե $\left[\begin{array}{l} a^2+3a=0 \\ a^2+3a>4 \end{array}\right.$ <=> $\left[\begin{array}{c} a=0, a=-3 \\ a \in (-\infty,-4) \cup (1,\infty) \end{array}\right.$ ապա հավասարումն ունի երկու արմատ:

Եթե $\begin{cases} a^2+3a>0 \\ a^2+3a<4 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a \in (-\infty,-3) \cup (0,\infty) \\ a \in (-4;1) \end{cases}$ <=>

$a \in (-4;-3) \cup (0;1)$, ապա հավասարումն ունի 4 արմատ:

Եթե $a^2+3a=4$

$$a^2+3a-4=0$$

$\left[\begin{array}{l} a=-4 \\ a=1 \end{array}\right.$ Ապա հավասարումն ունի 3 արմատ:

Այսպիսով՝

Պատասխան՝ Եթե $a \in (-3,0)$ ապա $x \in \emptyset$

Եթե $a \in (-\infty;-4) \cup \{-3;0\} \cup (1;\infty)$, ապա հավասարումն ունի 2 արմատ:

Եթե $a \in \{-4;1\}$, ապա հավասարումն ունի 3 արմատ:

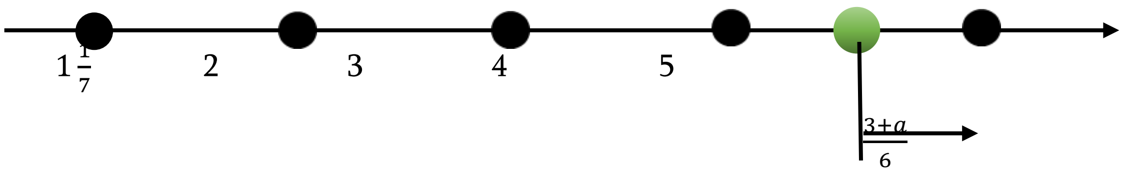
Եթե $a \in (-4,-3) \cup (0;1)$, ապա հավսարումն ունի 4 արմատ:

ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգի լուծումների բազմությունում պարունակում է ճիշտ 3 ամբողջ թիվ:

$\begin{cases} 5-3x \le 0{,}5(2+x) \\ 6x-a \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x \le 1+0{,}5x \\ 6x \le 3+a \end{cases}$

$\begin{cases} 3{,}5x \ge 4 \\ x \le \frac{3+a}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{40}{35} \\ x \le \frac{3+a}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{8}{y} \\ x \le \frac{3+a}{6} \end{cases}$



$\begin{cases} \frac{3+a}{6} \ge 4 \\ \frac{3+a}{6} < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+a \ge 24 \\ 3+a < 30 \end{cases}$

$\begin{cases} a \ge 21 \\ a < 27 \end{cases} \Rightarrow \quad a \in (21; 27)$

Պատասխան՝ $a \in (21; 27)$:

ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Լուծե՛լ $(a^2-9)x^2-2(a+3)x+1$ հավասարումը:

Ունենք a պարամետրով և x անհայտով հավասարում:

Լուծենք հավասարումը պարամետրի թույլատրելի բոլոր արժեքների համար:

Եթե $a^2-9=0$ <=> $\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-3 \end{array}\right.$, ապա կստանանք x անհայտի նկատմամբ գծային հավասարում:

Եթե $a=3$ կստանանք $-12x+1=0$

$$x=\frac{1}{12}$$

Եթե $a=-3$ կստանանք $1\neq 0$

Հետևաբար հավասարումն արմատ չունի:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $a^2-9\neq 0$

Այդ դեպքում կստանանք x անհայտի նկատմամբ քառակուսի հավասարում:

Հաշվենք քառակուսի հավասարման տարբերիչը:

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2-(a-3)(a+3)=(a+3)(a+3-a+3)=6(a+3)$$

Եթե $a+3<0$ <=> $a<-3$ ապա հավասարումն արմատ չունի:

Եթե $\begin{cases} a>-3 \\ a\neq\pm3 \end{cases}$ <=> $a\in(-3;3)\cup(3;\infty)$

Ապա հավասարումն ունի 2 արմատ:

$x_1=\frac{a+3+\sqrt{6(a+3)}}{a^2-3}$, $x_2=\frac{a+3-\sqrt{6(a+3)}}{a^2-3}$

Պատասխան՝ Եթե $a=3$, $x=\frac{1}{12}$

Եթե $a\in[-\infty;-3]$, $x\in\emptyset$,

Եթե $a\in(-3;3)\cup(3;\infty)$, $x_1=\frac{a+3+\sqrt{6(a+3)}}{a^2-3}$, $x_2=\frac{a+3-\sqrt{6(a+3)}}{a^2-3}$

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Նկարագրված օրինակների նմանությամբ կարելի է կատարել հետազոտական աշխատանքներ նաև բազմաթիվ այլ թեմաների ուսուցման ընթացքում: Դրա համար պետք է կարևորել հետևյալ գործոնները:

- Հետազոտական աշխատնաքը հնարավորություն է տալիս՝ դիտողական դարձնել մաթեմատիկայի վերացական-տեսական գիտելիքների կապը իրականության առօրյա կյանքի հետ, պատրաստի գիտելիքների հաղորդման և ընկալման գործընթացը փոխարինել գիտելիքի հայտնաբերման ստեղծագործական հաճելի աշխատանքով, նպաստել համատեղ հետազոտական աշպխատանք կատարելու կարողությունների զարգացմանը:
- Հետազոտական աշխատանքի կատարման կրթական խնդիրներից մեկը կարողունակությունների զարգացումն է: Ընդ որում խոսքը չի վերաբերում միայն այն բանին, որ խմբային հետազոտության ընթացքում աշակերտները մտքեր են փոխանակում միմյանց հետ:
- Հետազոտական աշխատանքի հիմքում ընկած է սովորել, կատարել սկզբունքը: Ուստի այն պետք է ունենա այնպիսի քայլեր, որոնք կարող են ապահովել բոլոր աշակերտների ակտիվ մասնակցությունը ուսումնական գործընթացին:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Ռ. Ա. Ավետիսյան

    Մաթեմատիկայի ձեռնարկ

2. Կորյուն Առաքելյան

    Թեստային առաջադրանքների ժողովածու

3. Գ. Գ. Գևորգյան, Ա. Ա. Սահակյան,

    Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար 12