<<Կառուցման խնդիրները, որպես հետազոտական կարողությունների խթանման միջոց>>

Հ Ե Տ Ա Զ Ո Տ Ա Կ Ա Ն   Ա Շ Խ Ա Տ Ա Ն Ք

Հեղինակ՝

Անահիտ Բաղդասարյան

/Երևանի Մուրացանի անվ.
հ. 18 հիմն. դպրոցի ուսուցչուհի/

Ղեկավար՝ Զինա Խաչատրյան

Երևան 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Սույն հետազոտական աշխատանքը կատարված է երկրաչափության կարևորագույն բաժիններից մեկի՝ կառուցման խնդիրների վերաբերյալ:

Կառուցման խնդիրները երկրաչափության ավանդական նյութն է, որը նպատակաուղղված է սովորողների գիտելիքների ամրապնդմանը, նրանց պատկերային, տրամաբանական, ալգորիթմական մտածողության զարգացմանը:

Աշխատանքում նշված է հիմնական (ստանդարտ) կառուցումները, որոնք հիմք են հանդիսանում կառուցման խնդիրների լուծման համար: Ներկայացված է լուծման մի քանի մեթոդներ և բերված են համապատասխան օրինակները:

Հավելվածում խոսվում է միայն կարկինով կառուցման մասին:

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ Ո՞Ր ԽՆԴԻՐՆ Է ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ ԵՎ Ի՞ՆՉ Է ՆՇԱՆԱԿՈՒՄ ԱՅՆ ԼՈՒԾԵԼ

Երկրաչափության մասին պատկերացումը ձևավորվել է դարերի ընթացքում, նրա զարգացումը ավելի քան երկու հազարամյակի պատմություն ունի: Երկրաչափությունը պրակտիկ գիտություն է, այն ծագել է գիոդեզիական հաշվարկներ կատարելու համար՝ մակերեսներ և ծավալներ չափելու համար:

Դեռևս հնագույն ժամանակներում գիտնականները հատուկ ուշադրություն են դարձրել երկրաչափական պատկերների կառուցմանը:

Աշակերտները կառուցման խնդիրներին առընչվում են 7-րդ դասարանում, շրջանագծի հասկացությանը և նրա հիմնական տարրերին ծանոթանալուց հետո:

Կառուցման խնդիրը դա խնդիր է, որտեղ պահանջվում է կառուցել երկրաչափական պատկեր օգտվելով միայն երկու գործիքից՝ կարկինից և քանոնից: Շատ կարևոր է հիշել, որ այդ խնդիրներում քանոնը օգտագործվում է ոչ թե որպես չափման գործիք, այլ բացառապես տրված երկու կետերով ուղիղ, ճառագայթ կամ հատված գծելու համար: Կարկինը օգտագործվում է շրջանագիծ և շրջանագծի աղեղ կառուցելու համար:

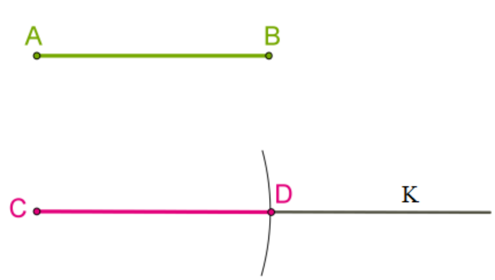
Լուծել կառուցման խնդիրը դա նշանակում է գտնել կառուցման ալգորիթմը, այսինքն նկարագրել խնդրի լուծումը արդեն հայտնի ստանդարտ կառուցումների հերթականությամբ: Այլ կերպ ասած խնդրի լուծումը բերվում է մաթեմատիկական խնդիրների լուծման սկզբունքներից մեկին, այն է՝ լուծել խնդիրը նշանակում է բերել նրան մեկ այլ արդեն լուծված խնդրի:

Դիտարկենք հինգ հիմնական կառուցումները, որոնցում օգտագործում ենք նշված գործողությունները՝ ուղիղ գծի և շրջանագծի կառուցումը:

1. Տրված ճառագայթի վրա սկզբնակետից տեղադրել տրված հատվածին հավասար հատված:
2. Կառուցել տրված անկյանը հավասար անկյան:
3. Կառուցել անկյան կիսորդը:
4. Կառուցել փոխուղղահայաց ուղիղներ:
5. Կառուցել հատվածի միջնակետը:

1.Տրված ճառագայթի վրա սկզբնակետից տեղադրել տրված հատվածին հավասար հատված

Լուծում: Նախ գծենք խնդրի պայմանում տրված պատկերները CK ճառագայթը և AB հատվածը (նկ. 1): Կարկինին տանք AB հատվածի չափը բացվածք և կառուցենք շրջանագիծ C կենտրոնով: Այդ շրջանագիծը մի որոշակի D կետում հատում է CK ճառագայթը: CD հատվածը կլինի որոնելին:



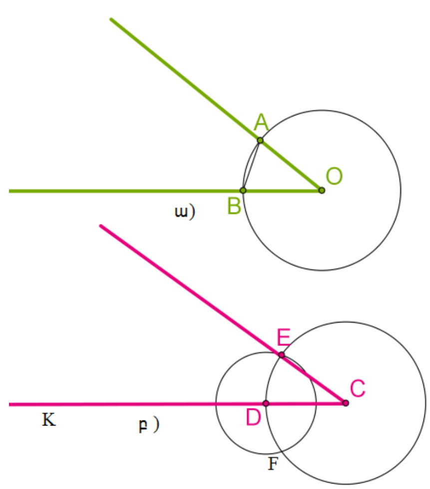
Նկ. 1

Պարզ է, որ այս եղանակով մենք ստանում ենք տրվածին հավասար հատված: Ըստ սահմանման՝ շրջանագիծը բաղկացած է կետերից, որոնք գտնվում են միևնույն հեռավորության (շառավիղ) վրա որոշ կետից (շրջանագծի կենտրոն):

Եթե կենտրոնը ճառագայթի C սկզբնակետն է, իսկ շառավիղը տրված AB հատվածը, ապա շրջանագծի և ճառագայթի հատման D կետը հենց տրված AB հատվածին հավասար CD հատվածի ծայրակետն է:

2. Տրված անկյանը հավասար անկյան կառուցումը

Լուծում: Տրված է O գագաթով անկյուն (Նկ. 2ա): Կառուցենք տրված անկյանը հավասար անկյուն: Վերցնենք CK ճառագայթը: Կարկինի սուր ծայրը դնենք O գագաթում և տանք կամայական բացվածք, գծենք շրջանագիծ, որը A,B կետերում հատում է անկյան կողմերը: Այնուհետև տանք նույն շառավիղով շրջանագիծ, որպես կենտրոն վերցնելով CK ճառագայթի սկզբնակետը՝ C-ն: Այդ շրջանագիծը հատում է ճառագայթը D կետում (Նկ. 2բ): Կառուցենք D կենտրոնով շրջանագիծ որի շառավիղը AB հատվածին է հավասար: C և D կենտրոնով շրջանագծերը հատվում են 2 կետում՝ E և F: Վերցնենք այդ կետերից մեկը՝ E-ն միացնենք C կետին, կստացվի ∠ECD-ն:



Նկ. 2

Ապացուցենք, որ կառուցված ECD անկյունը, իրոք, հավասար է տրված AOB անկյանը:

Կառուցենք ճառագայթի սկզբնակետում գտնվող C կենտրոնով շրջանագիծ, որի շառավիղը հավասար է O կենտրոնով շրջանագծի շառավղին: Ապա՝ CD=OB:

Եթե մենք կառուցել ենք D կենտրոնով և BA -ին հավասար շառավղով շրջանագիծ, ապա այն հատում է նախորդ շրջանագիծը E կետում, ընդ որում՝ BA=DE:

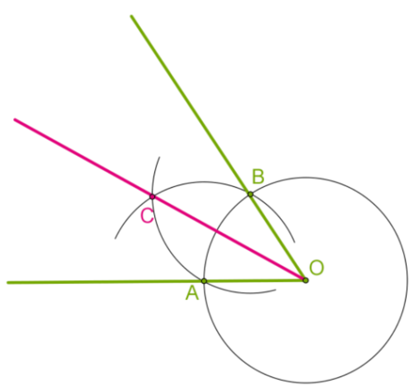
Տանենք CE ճառագայթը: Ակնհայտ է, որ OA=CE:

Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշի AOB և ECD եռանկյունները հավասար են: Ուրեմն հավասար են նաև դրանց համապատասխան անկյունները, մասնավորապես՝ ECD անկյունը հավասար է տրված AOBանկյանը:

3. Անկյան կիսորդի կառուցումը

Լուծում: Կառուցենք կամայական շառավիղով շրջանագիծ, որպես կենտրոն վերցնելով O անկյան գագաթը: Այդ շրջանագիծը A և B կետերում հատում է անկյան կողմերը (Նկ. 3): Այնուհետև տանենք միևնույն AB շառավիղով երկու շրջանագծեր՝ որպես կենտրոններ վերցնելով A և B կետերը (նկարում պատկերված են շրջանագծերի միայն մի մասը):

Այդ շրջանագծերը հատվում են երկու կետում: Կետերից մեկը, որն ընկած է AOB անկյան ներսում, նշանակենք C տառով: Տանենք OC ճառագայթը, որն էլ կլինի տրված անկյան կիսորդը:



Նկ. 3

Որպեսզի համոզվել, որ OC-ն իրոք բաժանում է AOB անկյունը հավասար մասերի, բավական է դիտարկել AOC և BOCեռանկյունները:

OA=OB՝ որպես նույն շրջանագծի շառավիղներ, իսկ AC=BC՝ քանի որ կառուցման ընթացքում, երկու շրջանագծերի համար մենք ընտրեցինք նույն շառավիղները:

OC կողմը ընդհանուր է:

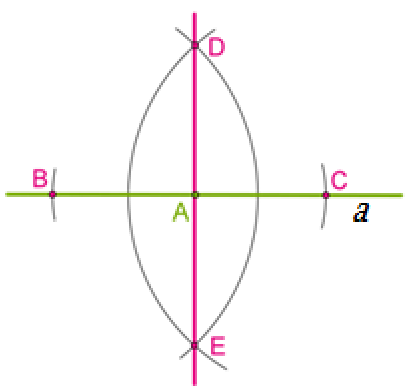
Այդ եռանկյունները հավասար են՝ ըստ եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշի:

Հետևաբար, դրանց համապատասխան անկյունները հավասար են:

Այսպիսով, AOC -ն և BOC -ն մեկ անկյան երկու հավասար մասեր են, ինչը նշանակում է, որ OC ճառագայթը, իրոք, անկյունը բաժանում է երկու հավասար մասերի:

4. Փոխուղղահայաց ուղիղների կառուցումը

Լուծում: Տրված է a ուղիղը, նրա վրա վերցնենք ցանկացած A կետ: A կետից ելնող ճառագայթների վրա տեղադրենք հավասար հատվածներ AB-ն և AC-ն (նկ. 4): Կարկինին տանք AB-ից մեծ բացվածք, գծենք B և C կենտրոններով երկու շրջանագիծ (նկարում պատկերված են այդ շրջանագծերի մայն մի մասը): Այդ շրջանագծերը հատված են երկու կետում՝ D և E, միացնենք այդ կետերը: DE ուղիղը կլինի որոնելի ուղղահայաց ուղիղը a ուղղին:



Նկ. 4

Ինչո՞ւ է DE -ն ուղղահայաց BC -ին:

AB=AC՝ այդպես են այդ կետերը վերցրել կառուցման ընթացքում:

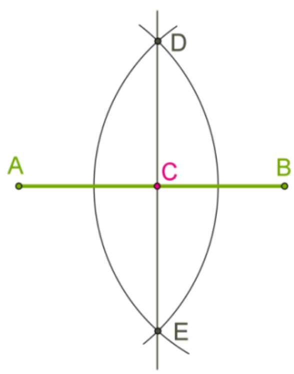
BD=CD՝ քանի որ մենք երկու շրջանագծերը կառուցեցինք նույն շառավղով:

Հետևաբար, DA –ն և EA –ն ADB և AEB հավասարասրուն եռանկյունների հիմքերի միջնագծերն են:

Հավասարասրուն եռանկյան միջնագիծը նաև նրա բարձրությունն է, ուրեմն, ուղղահայաց է հիմքին:

5.Հատվածի միջնակետի կառուցումը

Լուծում: Տրված է AB հատվածը: Կարկինին տանք AB հատվածի կեսից ավելի բացվածք, կառուցենք A և B կենտրոններով երկու շրջանագծեր (նկ. 5 նկարում պատկերված են այդ շրջանագծերի միայն մի մասը): Այդ շրջանագծերը հատված են D և E կետերում: Տանենք DE ուղիղը: Այդ ուղղի և AB հատվածի C կետը AB հատվածի որոնելի միջնակետն է:



Նկ. 5

Այս կառուցումը համընկնում է փոխուղղահայաց ուղիղների կառուցման հետ: Արդեն ապացուցված է, որ DC -ն կամ EC -ն բաժանում են AB հատվածը երկու հավասար մասերի: Ուրեմն, C կետը AB հատվածի միջնակետն է:

Ստանդարտ կառուցումների հիման վրա հեշտությամբ կարելի է կառուցել եռանկյունի՝ ըստ նրա երեք տարրերի.

1.երկու կողմով և նրանցով կազմված անկյան,

2.կողմով և նրա առընթեր երկու անկյան,

3.երեք կողմերով:

Շատ կարևոր է աշակերտների գիտակցությանը հասցնել, որ գծային էլեմենտները պայմանում տրված են հատվածի տեսքով, իսկ անկյունները՝ անկյունների տեսքով (բութ, սուր, ուղիղ):

Հավասարասրուն, ուղղանկյուն եռանկյունների կառուցումը իրենց հիմնական տարրերով և ուղղին զուգահեռ ուղղի կառուցումը տրված կետով անցնող, նույնպես բերվում են ստանդարտ խնդիրներին:

Որպեսզի սովորենք լուծել կառուցման խնդիրները (ինչպես նաև այլ երկրաչափական խնդիրներ), շատ կարևոր է հասկանալ, որ խնդրի լուծումը պետք է սկսել վերջից, այսինքն ոչ թե խնդիրների լուծման ժամանակ կատարել գուշակություններ, այլ պատկերացնել, որ կառուցվող պատկերը արդեն կառուցված է և ելնելով դրանցից վերականգնել հնարավոր կառուցման քայլերի շղթան (ալգորիթմը):

Սովորաբար կառուցման խնդիրները լուծում են մի ընթացակարգով, որը կազմված է չորս մասից:

1)Խնդրի լուծման եղանակի հայտնաբերում՝ որոնելի տարրերի և խնդրի տվյալների միջև կապերի բացահայտման միջոցով: Այս մասը կոչվում է *խնդրի վերլուծություն:* Վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս կազմելու խնդրի լուծման պլան:

2) *Կառուցման* կատարումը՝ ըստ նշված պլանի:

3) *Ապացուցումն* այն բանի, որ կառուցման պատկերը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

4)Խնդրի *հետազոտում,* այն է՝ պարզել, թե արդյոք ցանկացած տվյալների դեպքում խնդիրը լուծում ունի, եթե այո, ապա քանի լուծում:

Այն դեպքերում երբ խնդիրը բավականաչափ պարզ է, առանձին մասերը, օրինակ՝ վերլուծությունը կամ հետազոտումը, բաց են թողնվում:

Կառուցման խնդիրների լուծման և շենքերի կառուցումների միջև կարելի է որոշակի համանմանության անցկացնել: Ստանդարտ կառուցման խնդիրները դրանք՝ <<աղյուսներն>> են, իսկ տարբեր տիպի եռանկյունների կառուցումը՝ ըստ նրանց հիմնական տարրերի՝ <<բլոկներին>> են (մեծաղյուս): Օգտվելով այդ <<բլոկներից>> կարող ենք լուծել եռանկյունների կառուցման այնպիսի խնդիրներ, որտեղ տրված լինեն ոչ միայն հիմնական, այլև օժանդակ տարրերը: Խնդիրները որոնք մենք կսովորենք լուծել կդառնան այսպես ասած պանելներ, ոնոնք կարող ենք օգտագործել ավելի բարդ խնդիրների լուծման մեջ, որտեղ կառուցվում են ոչ միայն եռանկյուններ:

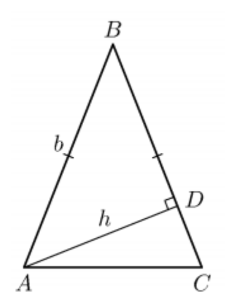
Վերջում նշենք, որ կառուցման խնդիրների լուծման հիմնական էֆեկտիվությունը, մեծամասամբ կախված է երկրաչափության դպրոցական դասընթացից, նրա առանձնահատկություններից և այն դասագրքից, որը օգտագործվում է որպես բազային: Կառուցման խնդիրների լուծման մանրամասն ուսումնասիրությունը հնարավորություն կտա միևնույն ժամանակ էապես կրկնել դպրոցական դասընթացի հարթաչափության բոլոր բաժինները, նաև խորացնել ստացած գիտելիքները:

ՕԺԱՆԴԱԿ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԵԹՈԴԸ

Օժանդակ եռանկյան մեթոդը օգտագործվում է եռանկյունիների կառուցման խնդիրները լուծելիս, ըստ նրանց հիմնական և օժանդակ տարրերով: Եռանկյան օժանդակ տարրերն են՝ բարձրությունը, միջնագիծը, անկյունագիծը, պարագիծը, ներգծված և արտագծված շրջանագծերի շառավիղները, երբեմն օգտվում են նաև երկու կողմերի կամ անկյունների գումարից (տարբերությունից):

Այս մեթոդի իմաստը կայանում է նրանում, որ լուծվող խնդիրը բերվում է արդեն հայտնի լուծված խնդրին:

<u>Օրինակ</u> – Կառուցել սուրանկյուն հավասարասրուն եռանկյունի, տրված սրունքով և նրան տարված բարձրությունով:



Լուծում: Ենթադրենք կառուցված է եռանկյունի ABC –ն տրված b սրունքով և նրան տարված h բարձրությունով: Գծագրում երևում է, որ առաջացել է ուղղանկյուն եռանկյունի ABD-ն տրված AD (h) էջով և AB (b) ներքնաձիքով, որի կառուցումը մենք գիտենք: Այսպիսով, կառուցում ենք ուղղանկյուն եռանկյունի ADB-ն համապատասխան տվյալներով: Շարունակում ենք BD էջ և այդ BD ճառագայթի վրա տեղադրում ենք b-ին հավասար BC հատվածը: A կետը միացնում ենք C կետին, ստացվում է մեր որոնելի եռանկյունը b սրունքներով և սրունքին տարված h բարձրությունով:

Այս եռանկյան կառուցումը բերվում է օժանդակ ուղղանկյուն եռանկյան կառուցմանը:

ՈՒշադրություն դարձնենք նրա վրա, որ խնդրի լուծումը տալիս ենք ալգորիթմի միջոցով, ընդորում ուղղանկյուն եռանկյան կառուցումը <<բլոկն>> է, իսկ հետո ավելացնում ենք <<աղյուսակները>>:

ԿԵՏԵՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՂԻ ՄԵԹՈԴ

Այս մեթոդը լայնորեն կիրառվում է այնպիսի խնդիրներ լուծելիս, որոնցում անհրաժեշտ է գտնել կետեր, որոնք բավարարում են երկու կամ ավելի պայմանների:

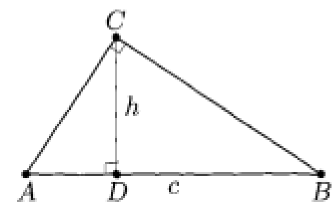
Կետերի երկրաչափական տեղ կամ կետերի բազմություն կոչվում է այն պատկերը, որը բաղկացած է այն բոլոր կետերից, որոնք օժտված են որոշակի հատկությամբ: Օրինակ շրջանագիծը հանդիսանում է այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք հավասարահեռ են տրված կետից, հատվածի միջնուղղահայացի յուրաքանչյուր կետ հավասարահեռ է տրված հատվածի ծայրակետից, կամ անկյան կիսորդի յուրաքանչյուր կետ հավասարահեռ է նրա կողմերից և այլն:

Կետերի երկրաչափական տեղերը գտնելու եղանակով խնդիրներ լուծելու համար անհրաժեշտ է նախ կառուցել խնդրի առաջին պայմաններին բավարարող կետերի երկրաչափական տեղերը, ապա որոշել դրանց ընդհանուր կետերը:

Երեք կողմերով եռանկյունը կառուցելիս օգտվում ենք այս մեթոդից:

Օրինակ – Կառուցել ուղղանկյուն եռանկյունի տրված ներքնաձիգով և նրան տարված բարձրությունով:

Լուծում: Դիցուք՝ կառուցված է ABC ուղղանկյուն եռանկյունին c(AB) ներքնաձիգով և h(CD) բարձրությունով: Պարզ երևում է, որ ստացված և ոչ մի եռանկյուն հնարավոր չէ կառուցել, որովհետև համապատասխան տվյալներ չկան:



Այսինքն օժանդակ եռանկյան մեթոդով հնարավոր չէ կատարել կառուցումը:

ՈՒշադրություն դարցնենք, որ C գագաթի մասին հայտնի է .

1)$\angle ACB = 90^0$,

2) C կետի հեռավորությունը AB-ից h է:

Կառուցենք c հատվածը՝ որպես եռանկյան AB կողմ: Ուրեմն՝ որոնելի եռանկյան B և A գագաթները հայտնի են, մնում է գտնել C գագաթի տեղը:

Որպեսզի որոնելի եռանկյունը ունենա h բարձրություն, նրա c կողմին հանդիպակաց C գագաթը պետք է գտնվի այդ կողմից h հեռավորության վրա: Այդպիսի գագաթ կարող են լինել բազմաթիվ կետեր, որոնք կազմում են կետերի երկրաչափական տեղ, այն ներկայացնում է AB-ին զուգահեռ, նրանից h հեռավորություն ունեցող ուղիղ (զուգահեռ ուղիղները երկուսն են, բայց կարելի է բավարարվել դրանցից մեկով):

Այժմ <<աչքաթող>> անենք խնդրի՝ բարձրությանը վերաբերող տվյալը և դիտարկենք, որ $\angle ACB = 90^0$: Կառուցենք այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք միացնելով A և B կետերին ստացված ABC եռանկյունը կլինի ուղղանկյուն, այսինքն $\angle ACB = 90^0$: Դա AB տրամագծով շրջանագծի կետերն են, բացի A և B կետերից (տրամագծին հենված ներգծյալ անկյունը ուղիղ անկյուն է):

Այսպիսով, որոնելի ABC եռանկյան C գագաթը գտնվում է միաժամանակ կետերի երկրաչափական տեղերից թե՛ մեկի և թե՛ մյուսի վրա: Այդ ուղղի և շրջանագծի հատման կետն էլ կլինի եռանկյան C գագաթը:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

Բացի նշված երկու մեթոդներից, կառուցման խնդիրները կարելի է լուծել նաև`

- Կառուցումներ որտեղ օգտվում ենք քառանկյան հատկություններից և եռանկյան նշանավոր կետերից, ուղիղներից (8-րդ դասարան)
- Հանրահաշվական մեթոդ (8-րդ դասարան օգտնվում ենք Թալեսի թեորեմից)
- Նմանության մեթոդ (դա խնդիրը լուծելու եղանակ է, երբ որոշ տվյալների հիման վրա սկզբում կառուցվում է որոնելի եռանկյանը նման մի եռանկյուն, օգտագործելով մյուս տվյալները կառուցվում է որոնելի եռանկյունը, 9-րդ դասարան)

Պարզվում է, որ կառուցման խնդիրները կարելի է կատարել միայն կարկինի միջոցով: Այս հիանալի հայտնագործությունը կատարել է իտալացի մաթեմատիկոս Լորենցո Մասկերոնին (1750-1800թթ.), սակայն ավելի ուշ հայտնաբերվել է Գ.Մորայի 1672թ-ին տպագրված գիրքը, որում պարունակվում է Մասկերոնին խնդրի ամբողջական լուծումը:

Հասկանալի է, որ միայն կարկինով հնարավոր չէ կառուցել ուղիղ: Դրա համար, երբ խոսքը գնում է միայն կարկինով կառուցման մասին, պայմանավորվենք, որ ուղիղը համարվում է կառուցված, եթե կառուցված են նրա երկու կետերը: Նման պայմանավորվածության դեպքում է հնարավոր միայն կարկինի օգնությամբ կատարել բոլոր կառուցումները, որոնք կարելի է կատարել կարկինի և քանոնի օգնությամբ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1.Լ.Ս.Աթանասյան, Վ.Ֆ. Բուտոզով և ուրիշներ. Երկրաչափություն 7, Երևան <<Զանգակ 97>> 2016

2. Լ.Ս.Աթանասյան, Վ.Ֆ. Բուտոզով և ուրիշներ. Երկրաչափություն 8, Երևան <<Զանգակ >> 2012

3. Լ.Ս.Աթանասյան, Վ.Ֆ. Բուտոզով և ուրիշներ. Երկրաչափություն 9, Երևան <<Զանգակ >> 2013

4. А.Д.Блинков, Ю.А.Блинков - Геометрические задачи на построение. Москва, издательство <<МЦНМО>> 2012