Մաթեմատիկայի ուսուցիչների վերապատրաստման դասընթաց

Կազմակերպություն՝

<<Երևանի Լեոյի անվան համար 65 ավագ դպրոց>> ՊՈԱԿ

Ավարտական հետազոտական աշխատանք

Թեմա՝ Պարամետրական հավասարումների լուծման գրաֆիկական եղանակը

Կատարող՝ **Աստղիկ Դավիթավյան**

Դպրոց՝ **Մուրացանի անվան համար 18 հիմնական դպրոց**

Առարկա՝ **Մաթեմատիկա**

Խմբի պատասխանատու՝ **Ջինա Խաչատրյան**

Երևան 2023

Բովանդակություն

Ներածություն

Պարամետր պարունակող առաջադրանքները արժեքավոր են նրանով.որ նրանց միջոցով ոչ միայն ստուգվում են սովորողի գիտելիքները դպրոցական մաթեմատիկայի հիմնական բաժիններից, այլ նաև մաթեմատիկական և տրամաբանական մտածողության մակարդակը, հետազոտական գործունեության նախնական հմտությունները և ամենակարևորը՝ բարձրագույն ուսումնական հաստատություններում մաթեմատիկայի դասընթացը հաջողությամբ յուրացնելու խոստումնալից հնարավորությունները: Իմ կարծիքով պարամետրով առաջադրանքները լիովին ունեն նման ախտորոշիչ և կանխատեսող արժեք: Եվ ըստ երևույթին պատահական չէ, որ այս առաջադրանքները դարձել են միասնական քննական աշխատանքների անբաժանելի հատկանիշը:

Ինչպես հայտնի է պարամետր պարունակող առաջադրանքների լուծմանը դպրոցում քիչ ուշադրություն է դարձվում, այնինչ խորապես համոզված եմ, որ հենց այս առաջադրանքները մեծ դեր ունեն սովորողների մոտ տրամաբանական մտածողության և մաթեմատիկական կուլտուրայի ձևավորման վրա: Ուստի այն սովորողները , ովքեր ունեն պարամետր պարունակող խնդիրների լուծման մեթոդների ունակություններ, հաջողությամբ են կարողանում լուծել նաև այլ տարաբնույթ խնդիրներ:

Նկատենք, որ պարամետր պարունակող խնդիրներն ունեն լուծման տարբեր մեթոդներ և հնարներ, կփորձեմ ներկայացնել երկու խնդիրների լուծման գրաֆիկական եղանակը:

§1 Ծանոթություն պարամետրերի հետ

Նշենք հանրակրթական դպրոցի Մաթեմատիկա առարկայի այն բաժինները, որտեղ ներկա է պարամետրի գաղափարը:

Պարամետրերի հետ սովորողները հանդիպում են մի քանի հասկացությունների ներմուծման ժամանակ: Առանց մանրամասն ներկայացնելու որպես օրինակներ դիտարկենք հետևյալ օբյեկտները:

- Ուղիղ համեմատական ֆունկցիաներ` $y=kx$ (k պարամետր, x փոփոխական)
- Գծային ֆունկցիա` $y=kx+b$ (k, b պարամետր, x փոփոխական)
- Գծային հավասարում` $ax+b=0$ (a,b պարամետր, x փոփոխական)
- Առաջին աստիճանի հավասարում` $ax=b$ (a,b պարամետր, x փոփոխական)
- Քառակուսի հավասարում` $ax^2+bx+c=0$ (a,b,c պարամետր, x փոփոխական)

Որպես պարամետր պարունակող խնդիրներ, որոնք ուսումնասիրվում են դպրոցական դասընթացում, կարելի է դիտարկել , օրինակ գծային և քառակուսային հավասարումների որոնումները ընդհանուր դեպքում, արմատների քանակի հետազոտումը,կախված պարամետրի արժեքներից:

Բնական է, խնդիրների այդպիսի փոքր խումբը շատերին հնարավորություն չի տալիս ըմբռնել գլխավորը՝ պարամետրը, լինելով հաստատագրված/ֆիքսված/ , բայց անհայտ թիվ, ունի երկու բնույթ՝

Առաջին, ենթադրվող հայտնիությունը թույլ է տալիս <<վարվել>> պարամետրի հետ որպես թիվ, իսկ երկրորդը՝ ազատության աստիճանը սահմանափակում է նրա անհայտությունը: Այսպես, բաժանել պարամետր պարունակող արտահայտության վրա, զույգ աստիճանի արմատ հանել նմանատիպ արտահայտություններից, կատարվում է նախնական հետազոտություն: Որպես կանոն,այդ հետազոտությունների արդյունքները ազդում են և լուծման, և պատասխանի վրա:

Կարևորը,որ պետք է հաշվի առնել պարամետրերի հետ աշխատելիս շատ զգույշ վերաբերմունքն է ֆիքսված, բայց անհայտ թվի հետ:

Պարամետրի հետ զգույշ աշխատելու անհրաժեշտությունը նկատելի է այն օրինակների վրա, որտեղ պարամետրի փոխարինումը թվով առաջադրանքը դարձնում է շատ պարզ.

Օրինակ Լուծել անհավասարումը. $(a-1)\sqrt{x} \le 0$

Լուծում. Պարզ է,որ արտադրյալի նշանը կախված է $(a-1)$ երկանդամի նշանից. Դիտարկենք դեպքեր.

1. $a-1 \le 0$

   $a \le 1$, այդ դեպքում $x \in [0, \infty)$,

2. $a-1 > 0$

   $a>1$, այդ դեպքում $x=0$:

Պատ.՝ եթե $a \le 1$, ապա $x \in [0, \infty)$, եթե $a>1$, ապա $x=0$:

§2. Պարամետր պարունակող հավասարումների լուծման հիմնական եղանակները .

§2.1 Պարամետրերով խնդիրների հիմնական տեսակների վերլուծական լուծումներ

Խնդրին ծանոթանալը նշանակում է իրականում ծանոթանալ դրա լուծման մեթոդներին: Փաստորեն արդեն դիտարկված նախորդ օրինակներում մենք ուսումնասիրեցինք խնդիրների լուծման վերլուծական մեթոդը: <<Ճյուղավորում>> ոչ մաթեմատիկական տերմինը մեծապես բնութագրում է այն խնդիրների լուծման գործընթացը,որտեղ պարամետրը <<վերահսկում>> է փոփոխականի արժեքների որոնումը:Վերը նշվածը լիովին վերաբերում է պարամետր պարունակող հավասարումներին (անհավասարումներին, համակարգերին): Իրոք, քանի որ պարամետրով հավասարումները իրականում հավասարումների մի ամբողջ դաս են, ուստի անհրաժեշտ է լուծել այդ ամբողջ դասը միանգամից, որը, բնականաբար, ենթադրում է տարբեր վերլուծությունների անհրաժեշտություն, կախված պարամետրի արժեքներից:

§2.2 Ֆունկցիաների հատկությունների կիրառությունը պարամետրի հետ կապված խնդիրներում

Յուրաքանչյուր հավասարման հետ (անհավասարություն, համակարգ) կան վերլուծական արտահայտություններ,որոնք կառուցում են դրանք: Վերջիններս իրենց հերթին կարող են սահմանել մեկ կամ մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաներ: Այս տեսանկյունից, օրինակ, f(x)=g(x) հավասարումը կարող ենք դիտարկել որպես այն x արգումենտների արժեքները գտնելու խնդիր, որոնց համար f և g ֆունկցիաների արժեքները հավասար են: Նման տարրական թվացող դատողությունները հաճախ շատ խնդիրներ լուծելու արդյունավետ միջոց գտնելու հնարավորություն է: Հիմնական գաղափարը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝ լուծման բանալին ֆունկցիաների հատկություններն են:

Խնդիրների ֆունկցիոնալ լուծման մոտեցման էությունը հստակ բացահայտվում է հետևյալ պարզ օրինակում:

Մենք պետք է լուծենք $\sqrt{x} > 2$ անհավասարությունը:

$y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի մոնոտոն աճելու հատկությունը հաշվի առնելով, կարող ենք պնդել,որ $\sqrt{x} > \sqrt{4}$ անհավասարությունից բխում է .որ x>4:

§2.3 Պարամետր պարունակող խնդիրների լուծման գրաֆիկական եղանակը

Պարամետրերով խնդիրների լուծման հիմնական տեխնիկայի և մեթոդների հետ ծանոթանալու բնական շարունակությունը կլինի տեսողական և գրաֆիկական մեկնաբանություններին դիմելը: Կփորձեմ ներկայացնել պարամետր պարունակող 2 խնդիրների լուծումները ակնառու գրաֆիկական մեկնաբանությամբ:

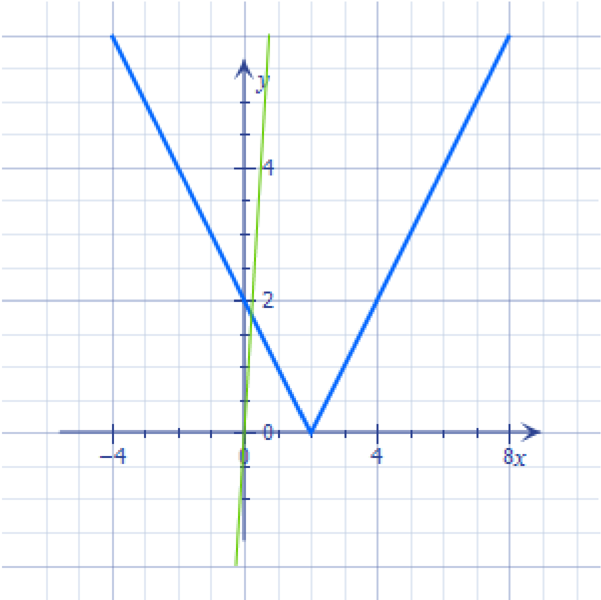
Oxy հարթության վրա y=f(x,a) բանաձևով տրվում է կորերի ընտանի՝կախված a պարամետրից: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր f ընտանիք օժտված է որոշակի հատկություններով: Իսկ մեզ առաջին հերթին հետաքրքրում է, թե ֆունկցիայի ինչ ձևափոխությունների միջոցով կարելի է ընտանիքի մի կորից անցնել մյուսին:

Խոսելով լուծման գրաֆիկական մեթոդի մասին, անհնար է շրջանցել մի պրոբլեմ՝այն է լուծման խստությունը և, հետևաբար, ճշմարտացիությունը՝ օրինականությունը, հենված գրաֆիկի պատկերի վրա: Արդյունքի ձևական տեսանկյունից՝<<նկարից>> ստացված արդյունքը, որը անալիտիկորեն հիմնավորված չէ, ստացվում է ոչ խիստ: Այդ պատճառով այն դեպքերում, երբ գծագրից <<ստացված>> լուծումը կասկածելի է, ապա կհիմնավորենք անալիտիկորեն: Այն, առաջին հերթին, պետք է կատարել հիմնավորելու համար լուծման եղանակի ճշմարտացիությունը:

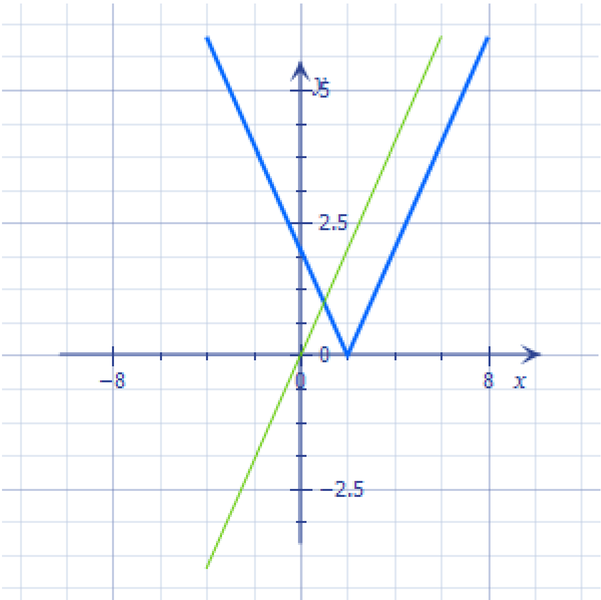
Խնդիր 1 Պարզել հավասարման արմատների քանակը և բնույթը՝ կախված պարամետրի արժեքներից: $|x-2| = ax$

Դիտարկենք $f(x) = |x-2|$ և g(x)=ax ֆունկցիաները : Պարզ է, որ հավասարման արմատները այս ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետերի աբսցիսներն են:

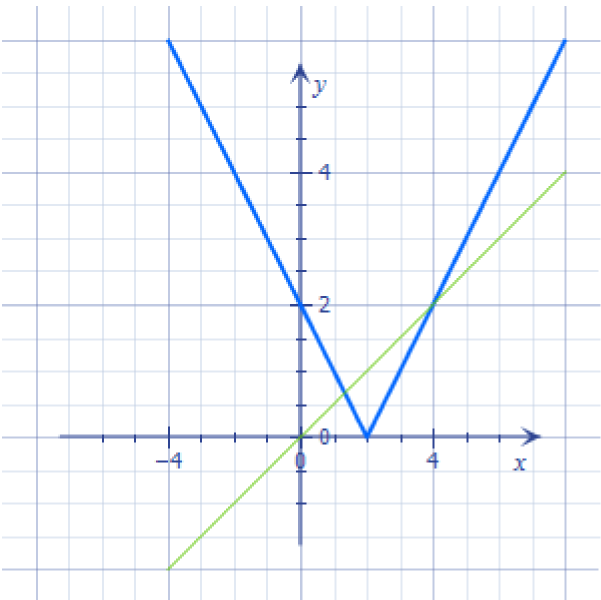
Նույն կոորդինատային հարթության վրա կառուցենք այս ֆունկցաիների գրաֆիկները a պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում.



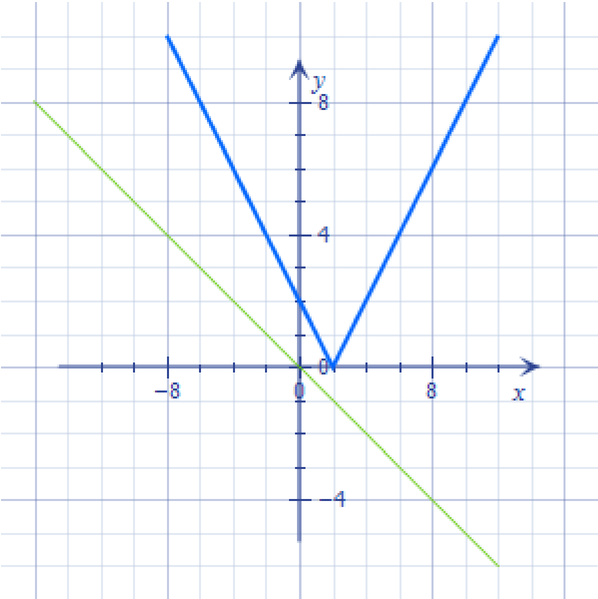
Եթե a>1, ապա հավասարումն ունի 2-ից փոքր մեկ դրական արմատ՝ $x = \frac{2}{1+a}$:



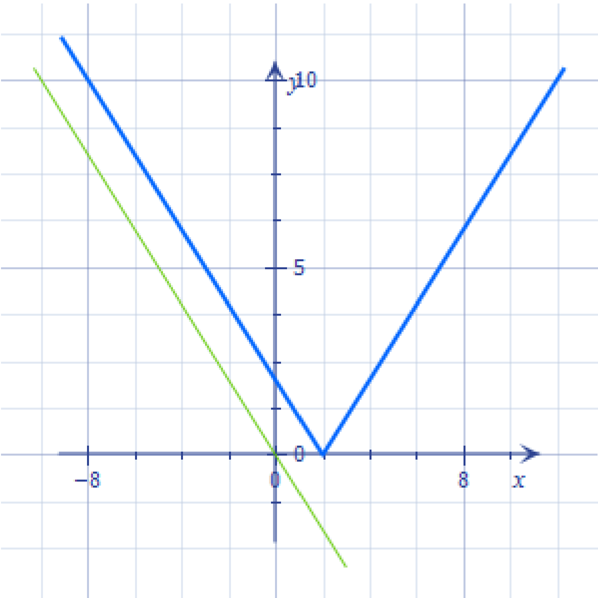
Եթե a=1, ապա հավասարումն ունի 2-ից փոքր մեկ դրական արմատ՝ $x = \frac{2}{1+a} = 1$:



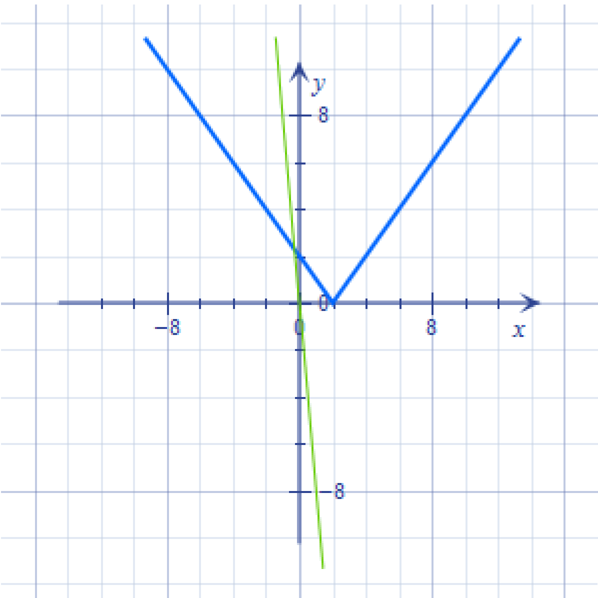
Եթե 0 <a< 1, ապա հավասարումն ունի 2 արմատ՝ $x_1 = \frac{2}{1-a}$; $x_2 = \frac{2}{1+a}$:



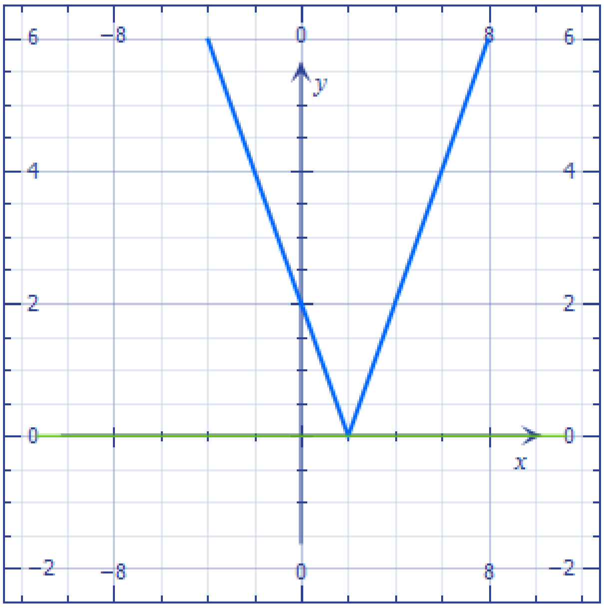
Եթե -1<a<0, ապա հավասարումն արմատ չունի:



Եթե a=-1, ապա հավասարումն արմատ չունի:



Եթե a<-1, ապա հավասարումն ունի մեկ բացասական արմատ՝ $x = \frac{2}{1+a}$:



Եթե a=0, ապա հավասարումն ունի մեկ արմատ՝x=2:

Այսպիսով՝ եթե a=0, ապա հավասարումն ունի մեկ արմատ՝x=2:

Եթե a<-1 կամ a≥1 , ապա հավասարումն ունի մեկ արմատ՝ $x = \frac{2}{1+a}$,

Եթե 0 <a< 1, ապա հավասարումն ունի 2 արմատ՝ $x_1 = \frac{2}{1-a}$; $x_2 = \frac{2}{1+a}$,

եթե -1≤a<0, ապա հավասարումն արմատ չունի:

Խնդիր 2. Լուծել համակարգը a պարամետրի բոլոր արժեքների դեպքում.

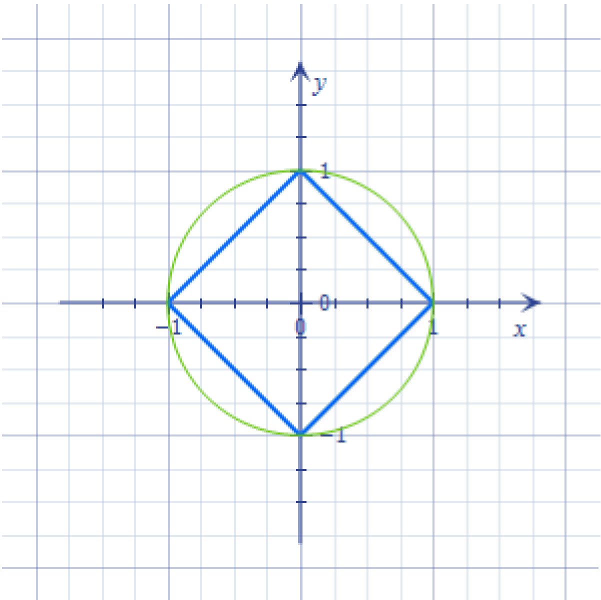
$\{|x| + |y| = 1 \ x^2 + y^2 = a^2$:

Լուծում

Պատկերենք $|x| + |y| = 1$ և $x^2 + y^2 = a^2$ հավասարումներով տրվող **կորերը**:

Նկատենք, եթե (x_0, y_0) թվազույգը համակարգի լուծում է, ապա համակարգի լուծում կհանդիսանան նաև $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$, (y_0, x_0), $(y_0, -x_0)$, $(-y_0, x_0)$, $(-y_0, -x_0)$ թվայգերից յուրաքանչյուրը: Համակարգի արմատների քանակը կարող է պակասել, եթե

1. $x_0 = -x_0$,այսինքն երբ $x_0 = 0$. այդ դեպքում կստանանք, որ $|y| = 1$, ուստի $a^2 = 1$:
2. $y_0 = -y_0$, այսինքն երբ $y_0 = 0$. Այդ դեպքում կստանանք, որ $|x| = 1$, ուստի $a^2 = 1$

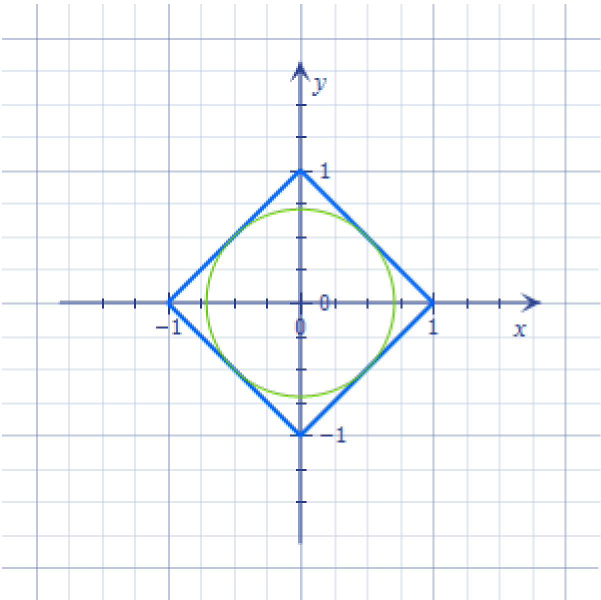


Այսպիսով, ստացանք երբ $|a| = 1$, ապա համակարգը ունի 4 լուծում՝

$(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$:

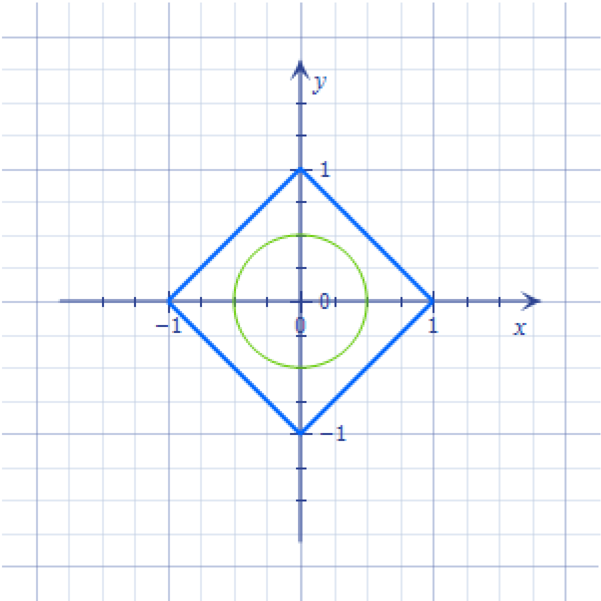
3. $x_0 = y_0$, այդ դեպքում կունենանք ,որ $|x| = |y| = \frac{1}{2}$, $a^2 = \frac{1}{2}$՝ $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

   Համակարգման արմատները կլինեն $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

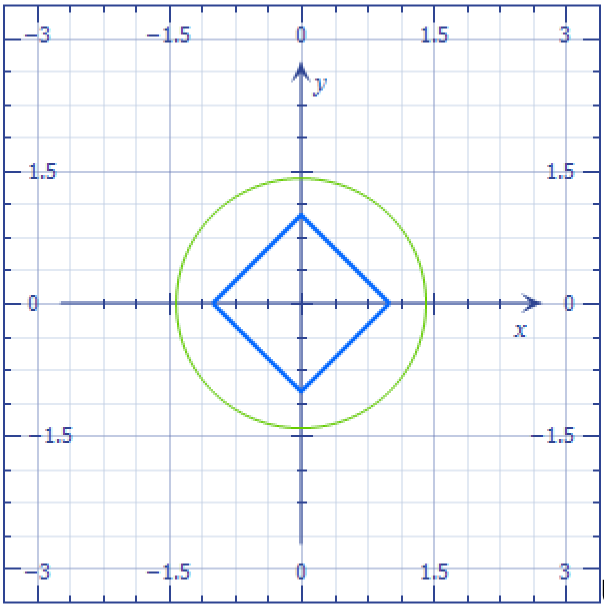


Այսպիսով, ստացանք երբ $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ապա համակարգը ունի 4 լուծում՝

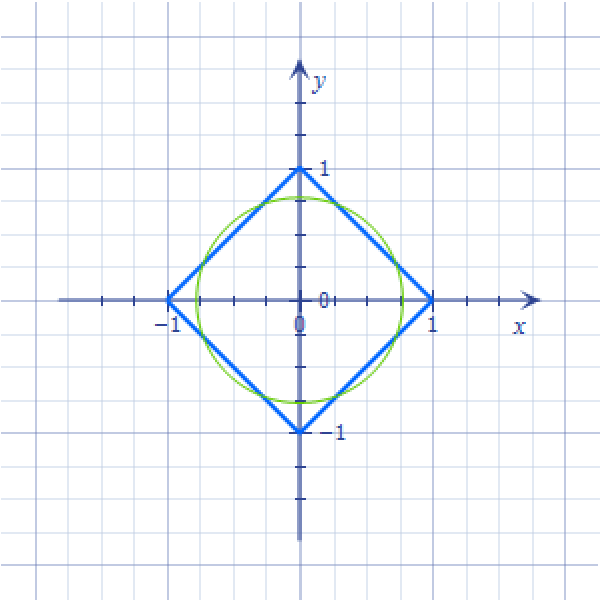
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:



Եթե $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, ապա համակարգը լուծում չունի:



Եթե$|a| > 1$, ապա համակարգը լուծում չունի:



Եթե $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, ապա համակարգն ունի բոլոր 8 արմատները:

Այսպիսով` Եթե $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ կամ $|a| > 1$ ապա համակարգը լուծում չունի,

եթե $|\mathrm{a}| = 1$ կամ $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ապա հավասարումն ունի 4 լուծում,

եթե $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, ապա համակարգն ունի բոլոր 8 արմատները:

Եզրակացություն

Պարամետրական հավասարումների /անհավասարումների/ լուծման գրաֆիկական եղանակը շատ արդյունավետ է և նպաստում է

- սովորողների մոտ գեղագիտական արժեքների ձևավորմանը
- զարգացնում է ճանաչողական , հաղորդակցային, ինքնուրույն գործելու, ստեղծագործական հմտություններն ու կարողությունները
- ապահովում է մաթեմատիկական գիտելիքների հսկայական պաշար:

- հավասարումների և անհավասարումների լուծման այս եղանակը թույլ է տալիս սովորողին կատարել ժամանակի խնայողություն, ակնհայտ երևում է լուծման գեղեցկությունը, հանրահաշվորեն սովորողը կարող է ստուգել պատասխանը (կամ հակառակը):
- մեծ է ֆունկցիայի դերը այսպիսի հավասարումներ կամ անհավասարումներ լուծելու մեջ: Այստեղ բախվում են 2 հզոր թեմաներ, որոնք յուրացնելու համար անհրաժեշտ են կայուն գիտելիքներ: Նպատակահարմար եմ գտնում «պարամետրական հավասարումներ և անհավասարումներ» թեման անցնել «Ֆունկցիա» թեման լիարժեք կրկնելուց հետո:

Օգտագործված գրականություն

1. «Հանրահաշիվ և մաթ. անալիզի տարրեր»-10,11,12-Գևորգյան,Սահակյան,
2. Բուհերի ընդունելության շտեմարաններ -1 մաս,
3. Mikrosoft Mathematics ծրագիր