<<ԿԱՊԱՆԻ ԹԻՎ 2 ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ>> ՊՈԱԿ

ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Թեման՝ Պարամետրական հավասարումներ

Կազմեց՝ Ռաֆիկ Միքաելյան

Դպրոցը՝ «Կապանի N13 հիմնական դպրոց» ՊՈԱԿ

Հետազոտական աշխատանքի ղեկավար՝ Ալինա Մկրտչյան

ԿԱՊԱՆ 2023թ.

Այն հավասարումները, որոնք բացի անհայտս նշանակող տառից պարունակում են նաև այլ տառեր, անվանում են պարամետրական հավասարումներ: Հավասարման անհայտը սովորաբար նշանակում են x − *ով*:

Անհայտ չնշանակող տառը (կամ տառերը) անվանում են պարամետր (պարամետրեր) և սովորաբար նշանակում են a − *ով*, b − *ով* և այլն: Լուծել պարամետրական հավասարումը՝ նշանակում է գտնել անհայտի այն բոլոր արժեքները (կախված պարամետրից կամ պարամետրերից), որոնք հավասարումը դարձնում են հավասարություն (նույնություն) պարամետրի (պարամետրերի) բոլոր թույլատրելի արժեքների դեպքում:

Քանի որ պարամետրի յուրաքանչյուր սևեռված արժեքի համար ունենք հավասարման անհայտի նկատմամբ կոնկրետ հավասարում, ապա պարամետրական հավասարման լուծումը համարժեք է հավասարումների մի ամբողջ ընտանիքի լուծման, որը ենթադրում է այդ տեսքի հավասարումների լուծման հետազոտություն, նրա մեջ առկա պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում: Սա է պատճառը, որ երբեմն չի պահանջվում գտնել պարամետրական հավասարման լուծումները, այլ պահանջվում է նշել լուծումների թիվը, կախված պարամետրից: Վերջինս արդեն հետազոտական աշխատանք է, ուստի ենթադրում է որոշակի դժվարությունների հաղթահարում:

Չնայած այն բանին, որ պարամետրական հավասարումների որոշ տեսակների, օրինակ՝ $ax + b = c$ (*գծային հավասարում*), $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, *քառակուսային հավասարում*), աշակերտները հանդիպում են միջին դպրոցում, այնուամենայնիվ, դրանց ուսումնասիրումը կատարվում է ավագ դպրոցում:

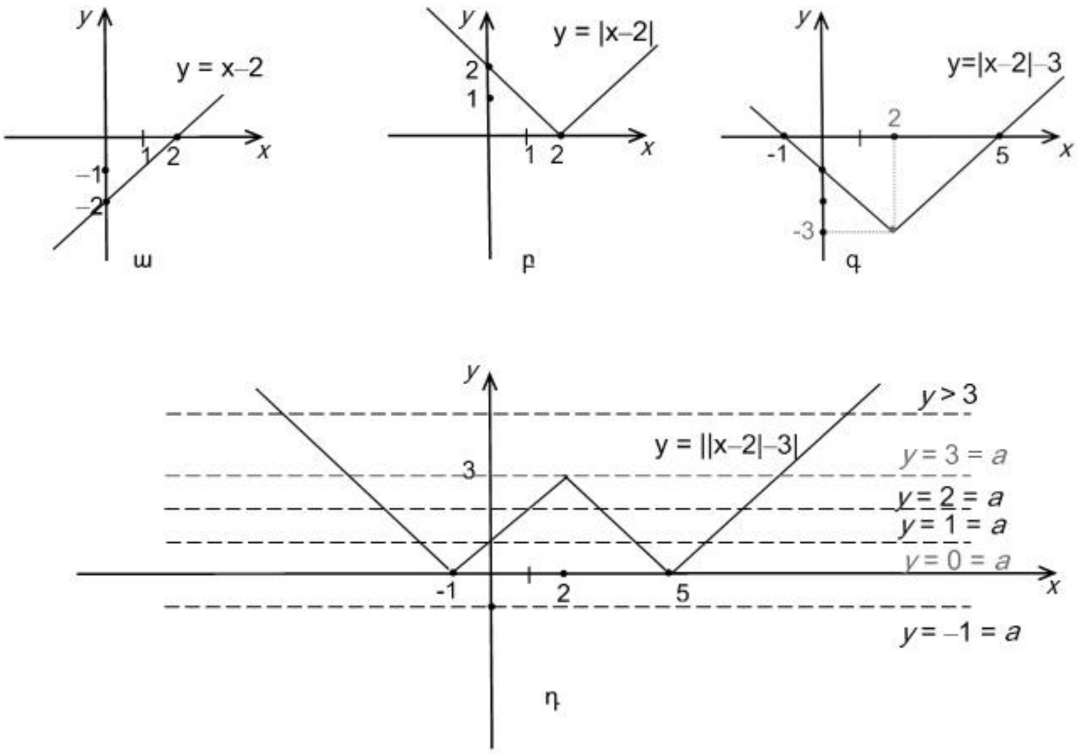
Ինչպես ցույց են տալիս թեմայի դասավանդման փորձերի և ավարտական ու միասնական ընդունելության քննությունների ուսումնասիրությունները, այդ թեմաներն աշակերտները, ինչպես և դասավանդող որոշ ուսուցիչներ, դժվարությամբ են ընկալում:

Սույն աշխատանքում կդիտարկենք պարամետրական հավասարումների լուծման օրինեկներ, որոնց լուծման մեր առաջարկած եղանակները կօգնեն նշված թեմայի ավելի լավ ըմբռնմանը:

Կետ 1. Պարամետրական հավասարումների լուծումները գրաֆիկական եղանակով

Օրինակ 1. Պարզել $||x-2|-3| = a$ հավասարման արմատների քանակը $a = -1; 0; 3; 5$ արժեքների դեպքում:

Լուծում: Նախ կկառուցենք $f(x) = ||x - 2 -| - 3|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը մեզ հայտնի $y_1 = x - 2 \to y_2 = |x-2| \to y_3 = |x-2| - 3 \to y_4 = f(x) = ||x-2|-3|$ հաջորդությամբ՝



Գծ. 1

Գծ. 1.դ-ից հետևում է՝ $a < 0$ դեպքում հավասարումը չունի լուծում,

$a = 0$ 7 $a > 3$ դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ երկու լուծում:

$a = 3$ դեպքում հավասարումն ունի երեք լուծում:

$0 < a < 3$ դեպքում հավասարումն ունի չորս լուծում:

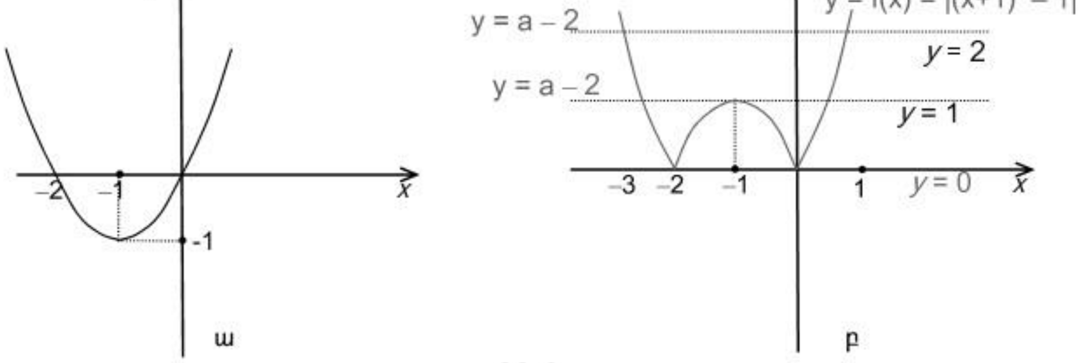
Օրինակ 2. Տրված է $|x^2 + 2x| = a - 2$ հավասարումը, որտեղ $a -$ *ն* պարամետր է.

ա. գտնել $a -$ *ի* այն ամենափոքր արժեքը, որի դեպքում հավասարումն ունի արմատ:

բ. Գտնել $a -$ *ի* այն արժեքը, որի հավասարումն ունի 3 արմատ:

գ. Գտնել 10-ը չգերազանցող բոլոր այն բնական $a -$ երի քանակը, որոնց դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ 2 արմատ:

դ. Քանի՞ արմատ ունի հավասարումը $a = \sqrt{19} - \sqrt{5}$արժեքի դեպքում:



Գծ. 2

Գծ. 2. բ-ից հետևում է, որ հավասարումն ունի ճիշտ երկու լուծում, երբ $a = 2$ *կամ* $a > 3$ դեպքում:

Ունի երեք լուծում, երբ $a - 2 = 1 \Leftrightarrow a = 3$*դեպքում*:

Ունի չորս լուծում, երբ $0 < a - 2 < 1 \Leftrightarrow 2 < a < 3$:

Լուծում չունի, երբ $a - 2 < 0 \Leftrightarrow a < 2$:

Կետ 2. Պարամետրական հավասարումների լուծումն արտադրիչների վերլուծման եղանակով

Օրինակ 3. Լուծել $x^3 — (3a - 1)x^2 + (2a^2 - 3a)x + 2a^2 = 0$ հավասարումը, որտեղ $a -$ *ն* պարամետր է:

Լուծում: Ունենք $x^3 + x^2 - 3ax^2 - 3ax + 2a^2x + 2a^2 = 0$ հավասարումը, որը կարելի է ներկայացնել $x^2(x+1) - 3ax(x+1) + 2a^2(x+1) = 0$ տեսքով, որն էլ իր հերթին համարժեք է հետևյալ հավասարմանը՝

$$(x+1)(x^2 - 3ax + 2a^2) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-a)(x-2a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - a = 0 \\ x - 2a = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = a \\ x_3 = 2a \end{array}\right.$$

Պատ՝. $\boldsymbol{x = -1; x = a; x = 2a}$:

Օրինակ 4. Լուծել $x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - b)x - (a^3 - ab) = 0$ հավասարումը, որտեղ $a -$ *ն* *և* $b -$ *ն* պարամետրեր են:

Լուծում: Ունենք՝

$$x^3 - a^3 - 3ax^2 + 3a^2x - bx + ab = 0 \Leftrightarrow (x-a)(x^2 + xa + a^2) - 3ax(x-a) - b(x-a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x^2 - 2xa + a^2 - b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x - a = 0 \\ x^2 - 2ax + a^2 - b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x_1 = a + \sqrt{b} \\ x_2 = a - \sqrt{b} \end{array}\right.$$

Եթե $b \le 0$, ապա հավասարումն ունի միակ՝ $x = a$ արմատը, իսկ եթե $b > 0$, ապա հավասարումն ունի $x_1 = a;\ x_2 = a;\ x_2 = a + \sqrt{b};\ x_2 = a - \sqrt{b}$ արմատները:

Կետ 3. Պարամետրական հավասարումների լուծումը փոփոխականի փոխարինման եղանակով

Օրինակ 5. Լուծել $(ax^2 + bx + c)^2 = x^2(dx^2 + bx + c)$ հավասարումը, որտեղ a, b, c *և* d – *ն* պարամետրեր են:

Լուծում: Ունենք $(ax^2)^2 + 2ax^2(bx + c) + (bx + c)^2 = dx^4 + x^2(bx + c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a^2 - d)x^4 + (2a - 1)x^2(bx + c) + bx + c)^2 = 0$$

Եթե $bx + c \neq 0$, ապա՝ դիտարկվող հավասարումը համարժեք է

$(a^2 - d) \cdot \left(\frac{x^2}{bx+c}\right) + (2a - 1) \cdot \frac{x^2}{bx+c} + 1 = 0$ հավասարմանը:

Նշանակելով $t = \frac{x^2}{bx+c}$, կստանանք $(a^2-d)t^2 + (2a-1)t + 1 = 0$ քառակուսի հավասարումը t – *ի* նկատմամբ, որի հետազոտումը թողնում ենք ընթերցողին:

Իսկ երբ $bx + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{b}(b \neq 0) \Leftrightarrow (a^2-d)x^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a^2 - d = 0 \\ x^4 = 0 \end{array}\right.$

եթե $d = a^2 \Longrightarrow x = -\frac{c}{b}$, իսկ եթե $d \neq a^2 \Longrightarrow x = 0$ *և* $x^2 = -\frac{c}{b} \Longrightarrow c = 0$:

Օրինակ 6. Լուծել $(x+a)^8 + (x^2+a^2)^4 = a^4x^4$ հավասարումը, որտեղ a – *ն* պարամետր է:

Լուծում: Ունենք՝

$$((x+a)^2)^4 + (x^2+a^2)^4 = a^4x^4 \Rightarrow (x^2+a^2+2ax)^4 + (x^2+a^2)^4 = a^4x^4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{x^2+a^2}{ax} + 2\right)^4 + \left(\frac{x^2+a^2}{ax}\right)^4 = 1, ax \neq 0:$$

Նշանակենք $\frac{x^2+a^2}{ax} = y - 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+a^2}{ax} + 2 = y + 1$, կստանանք $(y+1)^4 + (y-1)^4 = 1$ ոչ պարամետրային հավասարումն y անհայտի նկատմամբ:

$$y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 = 1 \Leftrightarrow 2y^4 + 12y^4 + 12y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = \sqrt{8,5} - 3 < 0 \\ y^2 = -\sqrt{8,5} - 3 < 3 \end{array}\right.$, $y^4 + 6y^2 + 0,5 = 0 \Longrightarrow y^2 = -3 \pm \sqrt{9 - 0,5} \Longrightarrow$ քանի որ $y^2 = 0$, ապա $y \in \emptyset$, հետևաբար՝ հավասարումը լուծում ունի, երբ $a = 0$, *իսկ լուծումը կլինի*՝ $x = 0$:

Կետ 4. Պարամետրական հավասարումներ, որոնք լուծում են, երբ պարամետրերը դիտվում են որպես անհայտ, իսկ անհայտը՝ որպես պարակետր

Օրինակ 7. Լուծել $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$ հավասարումը, որտեղ a – *ն* պարամետր է:

Լուծում: Քանի որ հավասարման մեջ a պարամետրը մասնակցում է 2 աստիճանով, իսկ x անհայտը՝ 4 աստիճանով, հավասարումը կլուծենք a պարամետրի նկատմամբ: Այսպիսով՝ հավասարման անհայտն a – *ն* է, իսկ պարամետրը՝ x – *ը*:

Ունենք՝

$$a^2 - 2a(x^2-1) + (x^4 - 6x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = (x^2-1) \pm \sqrt{(x^2-1)^2 - (x^4 - 6x^2 + 4x)} = (x^2-1) \pm \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + 6x^2 - 4x}:$$

$$a = (x^2-1) \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = (x^2-1) \pm \sqrt{(2x-1)^2} = (x^2-1) \pm (2x-1):$$

Ստացանք՝

$$a=x^2-1+2x-1=x^2+2x-2 \atop a=x^2-1-2x+1=x^2-2x \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-2-a=0 \\ x^2-2x-a=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\pm\sqrt{1+2+a} \\ x=1\pm\sqrt{1+a} \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\pm\sqrt{a+3} \\ x=1\pm\sqrt{a+1} \end{array}\right.:$$

Հետաքրքիր է $a=-\frac{3}{4}$ *դեպքը*.

$x_1=-1+\sqrt{-\frac{3}{4}+3}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$, $x_2=1-\sqrt{-\frac{3}{4}+1}=\frac{1}{2}$ արմատները համընկնում են:

Հետազոտումը թողնում ենք ընթերցողին:

Օրինակ 8. Լուծել $x^6-(a^2+1)x^2-a=0$ հավասարումը, որտեղ $a-$ *ն* պարամետր է:

Լուծում: Ունենք՝ $a^2x^2+a+x^2-x^6=0$: Լուծելով որպես քառակուսի հավասարում a արմատների նկատմամբ ($a-$ *ն* ՝անհայտ, իսկ $x-$ *ը* ՝պարամետր), կստանանք՝

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1-4x^2(x^2-x^6)}}{2x^2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4x^4+4x^8}}{2x^2}=\frac{-1\pm\sqrt{(1-2x^4)^2}}{2x^2}=\frac{-1\pm(1-2x^4)}{2x^2}$$

$$=\left[\begin{array}{l} -x^2 \\ \dfrac{x^4-1}{x^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-a \\ x^4-1=ax^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-a \\ x^4-ax^2-1=0: \end{array}\right.$$

Այժմ, եթե $\begin{cases} a\le 0 \\ a\ge -1 \end{cases}$, ապա հավասարումը կունենա 4 (չորս) լուծում՝

$$x^2=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}}; x=\pm\sqrt{-a}:$$

Գրականություն

1. Գ.Գ.Գևորգյան, Ա.Ա.Սահակյան, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր-10 (բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի համար): Երևան, Տիգրան Մեծ, 2009:

2. Գ.Գ.Գևորգյան, Ա.Ա.Սահակյան, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր-11 (հումանիտար և ընդհանուր հոսքերի համար): Երևան, Էդիտ Պրինտ, 2010:

3. Գ.Գ.Գևորգյան, Ա.Ա.Սահակյան, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր-12 (հումանիտար և ընդհանուր հոսքերի համար): Երևան, Էդիտ Պրինտ, 2011:

4. Մաթեմատիկական մրցութային խնդիրների ժողովածու: ԲՏՈւՀ ընդունվողների համար, Մ.Խ.Սկանավի խմբագրությամբ: Երևան, Լույս, 1990:

5. 2017թ. պետական ավարտական և միասնական քննությունների առաջադրանքների Շտեմարան (մաթեմատիկա) Մաս 1: Երևան, 2016:

6. Գ.Ա.Տոնոյան, Մաթեմատիկական ընտրովի թեորեմներ և խնդիրներ: Երևան, Լույս, 1970:

7. Ա.Ս.Միքայելյան, Նախընտրելի լուծում: Բնագետ, թիվ 3, 2015, էջ 20-31:

8. WWW.graph.tk