Ավարտական հետազոտական աշխատանք

Թեմա՝ Քառակուսի հավասարումների լուծման ստանդարտ և ոչ ստանդարտ եղանակները

Կատարող՝ Սիլվա Ավետիսյան

Դպրոց՝ Երևանի 160 հիմնական դպրոց

Առարկա՝ մաթեմատիկա

Կազմակերպություն՝ «Կրթություն առանց սահմանի» ՀԿ

Խմբի պատասխանատու՝ Զինա Խաչատրյան

ԵՐԵՎԱՆ 2023

Բովանդակություն

Ներածություն

Ժամանակակից հասարակությունն ու մարդկային գործունեության ոլորտները, գիտությունն եւ տեխնիկական առաջընթացն անհնար է պատկերացնել առանց մաթեմատիկայի: Մարդկության ողջ պատմության ընթացքում Մաթեմատիկան եղել է շրջակա աշխարհի ճանաչման միջոց, գործիք, որն օգնել է մի շարք հումանիտար ոլորտներում հաշվարկներ և հետազոտություններ անելու համար:

Մաթեմատիկական կրթությունը մարդու անհատականությունը, մտավոր և ստեղծագործական պոտենցիալը ձևավորող կարևոր միջոց է: Մարդկային գործունեության ցանկացած ոլորտում մաթեմատիկայի միջոցով ձևավորվում ու զարգանում են տրամաբանորեն մտածելու կարողություն, փաստարկները ճիշտ և հետևողականորեն կառուցելու, մտքերը ճգրիտ և պարզ արտահայտելու ունակություններ, իրավիճկը քննադատաբար գնահատելու, վերլուծելու , կարևորն ու երկրորդականը զանազանելու, անջատ փաստերը համադրելու, ընդհանրացումներ անելու հմտություններ:

Մթեմատիկայի ուսումնասիրման առանցքային թեմաներից մեկն է՝ հավասարումները: Դրանք բազմազան են, որոնց մեջ յուրահատուկ տեղ են զբաղեցնում քառակուսային հավասարումները, որոնք ունեն կիրառման լայն բնագավառ:

Պատմական ակնարկ

Մեր թվարկությունից առաջ երկրորդ հազարամյակին բաբելոնացիները գիտեիրն ինչպես լուծել քառակուսայի հավասարումներ: Հին Բաբելոնում նրանց լուծումը կապված էր գործնական խնդիրների հետ, հիմնականում այնպիսին, ինչպես հողատարածքների մակերեսների չափումը, ռազմական նշանակության հողատարածքների և վարելահողերի աշխատանքների հետ կապված խնդիրներ լուծելիս: Անհրաժեշտությունը զգացվել է նաև աստղագիտության և մաթեմատիկայի զարգացման գործընթացում:

Բաբելոնացիների ձեռագիր գրություններում հայտնաբերված ձեռագիր լուծումները համընկնում էին ժամանակակից ներկա լուծումների հետ: Սակայն բացակայում են փաստեր, թե ինչ տրամաբանությամբ են հանգել լուծման գաղափարին:

Դիոֆանտի «Մաթեմատիկայում» չկա հանրահաշվական համակարգված բացատրություն, բայց այն պարունակում է մի շարք խնդիրներ, որոնք ուղեկցվում են բացատրությյուեններով, տարբեր աստիճանի հավասարումների լուծումներով: Դիոֆանտը հավասարումների կազմման ժամանակ հմուտ ձևով օգտագործում է անհայտներ:

Օրինակ՝ «գտնել երկու թվեր, եթե գիտենք, որ դրանց գումարը հավասար է 20-ի իսկ արտադրյալը՝ 96»:

Դիոֆանտը խնդիրը բացատրում է հետևյալ կերպ: Խնդրի պայմանից երևում է, որ անհայտ թվերը իրար հավասար չեն, քանի որ եթե հավասար լինեին, ապա դրանց արտադրյալը կլիներ ոչ թե 96 այլ 100: Այսպիսով դրանցից մեկը կլինի ավելի մեծ դրանց գումարի կեսից, այսինքն՝ 10+x: Մյուսը տրամաբանորեն կլինի 10-x, տարբերությունը՝

Այստեղից բխում է՝ (10-x)(10+x)=96:

Այստեղից երևում է, որ x=2: Անհայտ թվերից մեկը 12 է, մյուսը՝ 8: Որպես լուծում չի դիտարկվում x=-2, քանի որ հունական մաթեմատիկայում բացակայում էին բացասական թվերը:

Հնդկաստանում քառակուսի հավասարմամաբ լուծվող խնդիրները հանդիպում են «Այրաբիաթիամ» աստղագիտության տրակտատում, որը գրել էր հնդիկ աստղագետ և մաթեմատիկոս Այրաբիաթը մ.թ.ա. 499 թվականին: Մեկ այլ հնդիկ գիտնական Բրահապուդրայի կողմից ներկայացվել է քառակուսային հավասարման լուծման ունիվերսալ կանոն, որը բերվում է հավասարման կանոնավոր տեսքին.

Ընդ որում ենթադրվում էր, որ բոլոր գործակիցները բացի a-ից կարող են լինել բացասական: Գիտնականի միտքը համընկնում է ժամանականակից մատուցման հետ:

.Քառակուսային հավասարումների սահմանումը և տեսակները

Այն գրառումները, որտեղ երկու արտահայտություններ միացված են հավասարման նշանով կոչվում է հավասարություն:

Օրինակ՝

$x^2-3=5x+4$

$=5$

$=6$

$^2-1=(x-1)(x+1)$

Նշված օրինակներից մեկը ճիշտ է x-ի միայն որոշակի արժեքների դեպքում, 2-րդը ճիշտ է, 3-րդը սխալ է, իսկ 4-րդը ճիշտ է x-ի բոլոր արժեքների դեպքում:

Հետևաբար՝ հավասարությունը կարող է լինել ճիշտ կամ սխալ:

Այն հավասարությունը, որը ճիշտ է իր մեջ մտնող փոփոխականների բոլոր արժեքների դեպքում, կոչվում է նույնություն,,

Օրինակ՝ $a^2+2ab= a(a+2b)$

Այն հավասարությունը, որը ճիշտ է իր մեջ մտնող փոփոխականների միայն որոշակի արժեքների դեպքում, կոչվում է հավասարում:

Օրինակ՝ $2x+5=7$, $x^2-2x+4=0$

Հավասարման մեջ մտնող փոփոխականների այն արժեքները, որոնց դեպքում ստացվում է ճիշտ թվային հավասարություն, կոչվում են հավասարման արմատներ:

Օրինակ՝ 2-ը $x-2=0$ հավասարման արմատ է, 3-ը այդ հավասարման արմատ չէ:

Լուծել հավասարում նշանակում է գտնել նրա բոլոր արմատները, կամ ապացուցել, որ արմատ չունի:

անհայտով քառակուսային հավասարում անվանում են այն հավասարումը, որի ձախ մասը x-ի նկատմամբ քառակուսային եռանդամ է, իսկ աջ մասը՝ 0:

Քառակուսային հավասարման ընդհանուր տեսքն է՝ $ax^2+bx+c=0$ (1) որտեղ a,b, c-ն տրված թվեր են($a\neq0$):

Օրինակ՝

ն կոչվում է x^2-ու կամ ավագ անդամի գործակից, b-ն x-ի գործակից, c-ն ազատ անդամ:

և c արտահայտությունները անվանում են (1) հավասարման անդամներ: $D=b^2-4ac$ թիվն անվանում են (1) հավասարման տարբերիչ կամ դիսկրիմինանտ:

Եթե քառակուսային հավասարման մեջ a=1, ապա հավասարումը կոչվում է բերված տեսքի քառակուսային հավասարում: Այն ունի հետևյալ տեսքը՝ $x^2+bx+c=0$

Քառակուսային հավասարումն անվանում են թերի, եթե b և c թվերից գոնե մեկը հավասար է 0-ի:

Դրանք կարող են ունենալ հետևյալ տեսքը՝

$x^2=0$, երբ $b=0$, $c=0$

$x^2+c=0$, երբ $b=0$

=0, երբ c=0

O

ր

ի

ն

ա

կ

՝

.Քառակուսային հավասարումների լուծման սրանդարտ եղանակները

.1 Քառակուսային հավասարումների լուծումը բանաձևով

Դիցուք տրված է հավասարում՝ $ax^2+bx+c=0$

Լուծել ք,առակուսային հավասարումը նշանակում է գտնել x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում քառակուսային եռանիդամի արժեքը հավասար է 0-ի:

ավասարումը լուծելու համար a-ն փակագծից դուրս բերենք, կստանանք

bax+ca)=0: Փակագծում ստացված քառակուսային եռանդամից անջատենք լրիվ քառակուսի: Դրա համար կատարենք համապատասխան ձևափոխություններ՝

$$a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$a(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)) = 0$$

Նշանակենք՝ $b^2 - 4ac = D$

Ստացված վերջին հավասարումը արտագրենք օգտագործելով այդ նշանակումը՝

x+b2a2−D4a2)=0(2)

Ստացված հավասարման լուծումը կախված է D-ի նշանից՝

թ

ե

ա

թ

ե

$\frac{b}{2a}$

D4a2>0, հետևաբար *x+b2a2−D4a2* արտահայտության արժեքը բոլոր x-երի

Այսինքն հավասարումն ունի մեկ լուծում

համար միշտ կլինի դրական և չի կարող 0 լինել: Հետևաբար՝ D<0 դեպքում (1) հավասարումը լուծում չունի:

D4a2=0 և երկրորդ հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ *ax+b2a2*=0

P
A
G
E

D4a2-ն կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝ *D4a2=(D2a)²* և երկրորդ

Օգտվելով երկու արտահայտությունների քառակուսիների տարբերության բանաձևից կստանանք՝

$$a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0$$

$$x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

Այսինքն՝ երբ D>0, ապա (1) քառակուսային հավասարումը ունի տարբեր արմատներ, որոնք կարող ենք գտնել ստացված բանաձևով

x1=−b−D2a,   x2=−b+D2a :

Թերի քառակուսային հավասարումները լուծելու համար կարելի է օգտվել արմատների բանաձևից, բայց նախընտրելի է լուծել ավելի կարճ եղանակներով:

b2a+D2a=0 կամ *x+b2a−D2a=0*

=0, c=0

$ax^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

2. b=0, c≠0

$ax^2+c=0$

$ax^2=-c$

$x^2=-\frac{c}{a}$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

a0, c>0, ապա հավասարումն ունի երկու իրական արմատներ

a=0, ապա x=0

$ax^2+bx=0$ *c/a<0*, ապա հավասարումը չունի իրական արմատներ:

x(ax+b)=0

x=0 կամ ax+b=0

$x=-\frac{b}{a}$

x+b2a2−D2a2=0:

.2 Քառակուսային հավասարումների լուծումը Վիետի թեորեմով (ուղիղ և հակադարձ)

Նախորդ գլխում մենք $ax^2+bx+c=0$ (1) քառակուսային հավասարումից նույնական

ավասարման մեջ ազատվելով փակագծերից կստանանք՝

$ax^2 - ax x_2 - ax_1 x + ax_1 x x_2 = 0$

$ax^2 - (x_2 + x_1)ax + ax_1 x_2 = 0$ (3)

Քանի որ (1) և (3) հավասարումները համարժեք են, ապա նրանց գործակիցները հավասարեցնելով կստանանք

$ax_1 * x_2 = c$

)a=b

Այսինքն ստացանք Վիետի թեորեմը:

Եթե ընդհանուր տեսքի (1) քառակուսային հավասարումն ունի ոչ բացասական տարբերիչ և եթե x_1-ը և - x_2-ը նրա արմատներն են, ապա

a, $x_1 * x_2 = ca$

Բերված տեսքի քառակուսային հավասարման համար Վիետի թեորեմը կընդունի հետևյալ տեսքը.

Այսինքն եթե $x^2+bx + c = 0$ քառակուսային հավասարման տարբերիչը ոչ բացասական է, ապա այդ հավասարման արմատների գումարը հավասար է x-ի գործակցին հակադիր նշանով իսկ արմատների արտադրյալը հավասար է ազատ անդամին: Օգտվելով Վիետի թեորեմից կարելի է բերված տեսքի հավասարումները լուծել բանավոր: Տեղի ունի նաև Վիետի թեորեմի հակադարձը: Եթե x_1 և x_2 թվերը այնպիսին են, որ տեղի ունի $x_1 + x_2 = -p$ և $x_1 * x_2 = q$ ապա նրանք հանդիսանում են $x^2 + px + q = 0$ հավասարման լուծումներ:

a, $x_1 x_2 = ca$

Օգտվելով Վիետի ուղիղ և հակադարձ թեորեմներից կարելի է բանավոր լուծել բերված տեսքի քառակուսային հավասարումները՝ առանց բանաձևային հաշվարկներ կատարելու: Օրինակ $x^2 + 8x + 15 = 0$; $x_1 + x_2 = - 8$ և $x_1 * x_2 = 15$: Հեշտությամբ կարող ենք որոշել, որ $x_1 = - 3$, $x_2 = - 5$:

$x-x1x-x2=0$ (2) հավասարումը, որտեղ $x1=-b-D2a$, $x2=-b+D2a$ D>0 դեպքում:

.Քառակուսային հավասարումների լուծման ոչ ստանդարտ եղանակները

.1 **Գործակիցների մասնակի հարաբերակցությունների օգտագործում**

Գոյություն ունեն քառակուսային հավասարումներ, որոնց գործակիցները գտնվում են միմյանց հետ որոշակի հարաբերակցության մեջ: Այդ դեպքում գոյություն ունեն լուծման այնպիսի եղանակներ, որոնք անհամեմատ պարզ են քան արմատների միջոցով լուծումները: Եթե $ax^2+bx + c = 0$ քառակուսային հավասարման ավագ անդամի և ազատ անդամի գումարը հավասար է միջին անդամի գործակցին՝ $a + c = b$, ապա նրա

Նախ պարզենք իրոք այդպիսի հաավասարումը ունի արմատ: Գտնենք D-ն: $D = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$:

Գտնենք այդ արմատները.

$$-b \pm D2a = -(a+c) \pm a-c22a = -a-c \pm |a-c|2a = -a-c \pm a \pm c2a$$

$$-a-c- a+c2a = - 2a2a = -1$$

$$a-c+ a-c2a = - 2c2a = - ca$$

Մասնաորապես եթե $a = c$, ապա կլինի -1 արմատը:

Օրինակ. $5x^2 + 7x + 2 = 0$, քանի որ $b = a + c$ պայմանը տեղի ունի, այսինքն $7 = 5+2$ ըստ

Այժմ դիտարկենք 2-րդ մասնավոր դեպքը, երբ $ax^2+bx + c = 0$ քառակուսային հավասարման բոլոր գործակիցների գումարը հավասար է 0-ի՝ $a + b + c = 0$, ապա այդպիսի հավասարման արմատը հանդիսանում է 1-ը և ազատ անդամի ca-ը:

Այս պնդման ապացույցը կարող ենք կատարել նույն դատողություններով ինչպես նախորդը:

Օրինակ $-7x^2 + 3x + 4 = 0$, քանի որ $-7 + 3 + 4 = 0$ ապա հավասարման արմատները կլինեն՝

.2 Տեղափոխումների մեթոդ

Դիտարկենք $ax^2+bx + c = 0$ քառակուսային հավասարումը: Բազմապատկենք 2 մասը a-ով, կստանանք $(ax)^2+b(ax) + ac = 0$: Ներմուծենք նոր փոփոխական $y = ax$: Կստանանք Այս հավասարումը բերված տեսքի է, այն կլուծենք բանավոր օգտվելով Վիետի թեորեմից: Դառնալով մեր ներմուծմանը կգտնենք հավասարման արմատները: Օրինակ լուծենք $2x^2 - 17x - 18 = 0$: Բազմապատկենք երկու մասը 2-ով կստանանք. $- 2*17x - 18 = 0$ Նշանակենք $y = 2x$, $y^2+17y - 18 = 0$

Վիետի թեորեմի միջոցով գտնում ենք արմատները՝

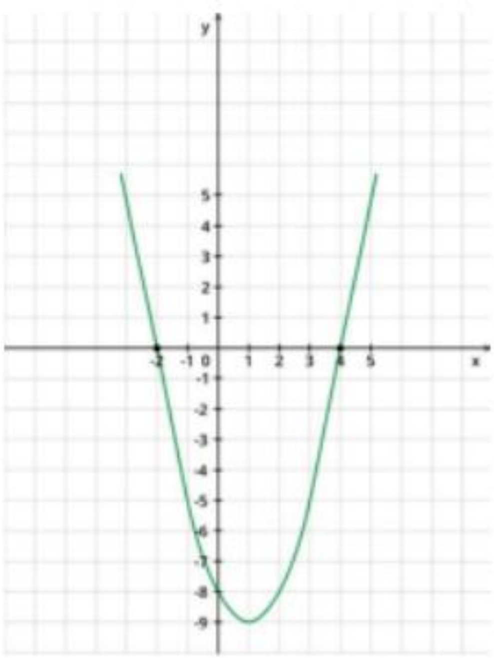
կ
ս
տ
ա
ն
ա
ն
ք
1
2

.3 Քառակուսային հավասարումների լուծման գրաֆիկական եղանակ

Քառակուսային հավասարումների լուծման գրաֆիկական եղանակի էությունը կայանում է նրանում, որ միևնույն կոորդինատային հարթությունում կառուցվում են ֆունկցիաների գրաֆիկները և գտնում են նրանց հատման կետի աբցիսը, որն էլ կլինի հավասարման արմատը: Կան քառակուսային հավասարման գրաֆիկական լուծման 5 եղանակներ, որոնք կդիտարկենք օրինակների վրա:

Առաջին եղանակ

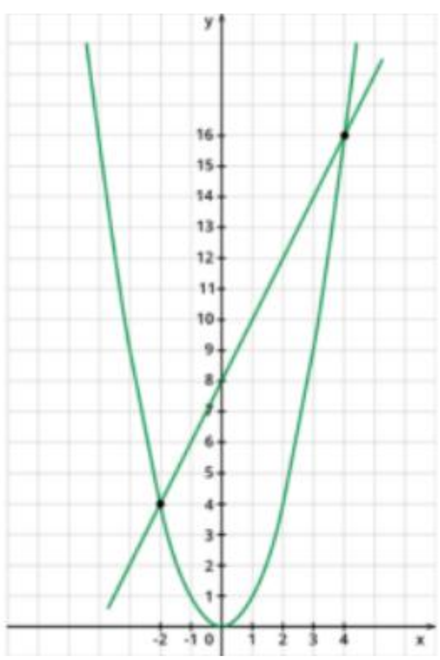
Դիտարկենք $x^2-2x-8=0$ հավասարումը: Կառուցում ենք $y= x^2-2x-8$ քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը և գտնում x-երի առանցքի հետ գրաֆիկի հատման կետի աբցիսը՝



Ֆունկցիայի գրաֆիկը x-երի առանցքի հետ հատվել է (-2,0) և (4,0) կետերում: Հետևաբար հավասարումը ունի 2 արմատ, այն է՝ -2, 4:

Երկրորդ եղանակ

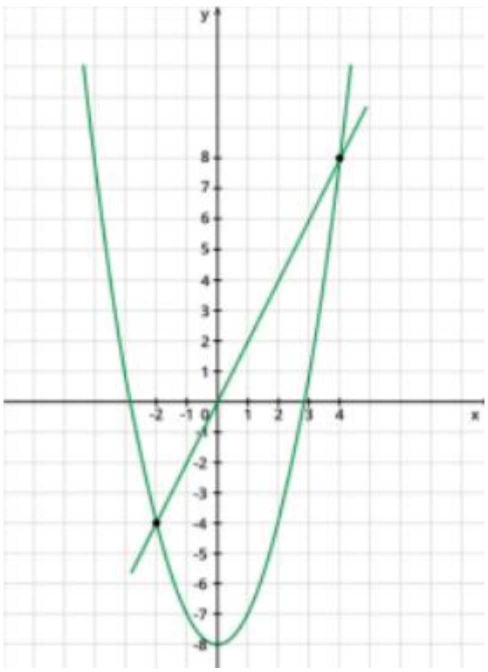
հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝ $x^2=2x+8$: Միևնույն կոորդինական համակարգում կառուցենք $y= x^2$ և $y= 2x+8$ ֆունկցիաների գրաֆիկները՝



Այս գրաֆիկները հատվում են (-2, 4) և (4, 16) կետերում: Հետևաբար հավասարման արմատներն են -2; 4:

Երրորդ եղանակ

Ձևափոխենք x^2-2x-8=0 հավասարումը հետևյալ տեսքով՝ x^2-8=2x: Կառուցենք y= x^2-8 և ֆունկցիաների գրաֆիկները՝

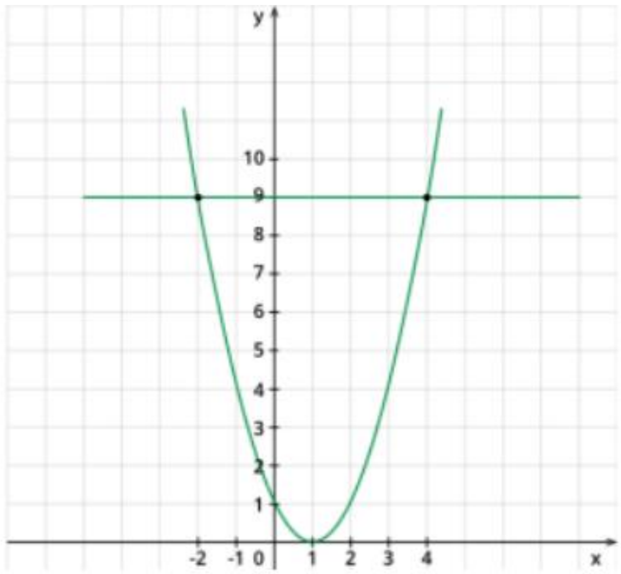


Նրանց հատման կետի կոորդինատներն են (-2,-4) և (4, 8): Ուրեմն՝ հավասարման լուծումներն են՝ -2 և 4:

Չորրորդ եղանակ

հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝

Կառուցենք y=(x-1)², y=9 ֆունկցիաների գրաֆիկները՝



Ստացանք գրաֆիկների հատման երկու կետ՝ (-2, 9) և (4, 9)։ Որպես լուծում հանդիսանում են այդ կետերի աբսցիսները, այսինքն -2 և 4։

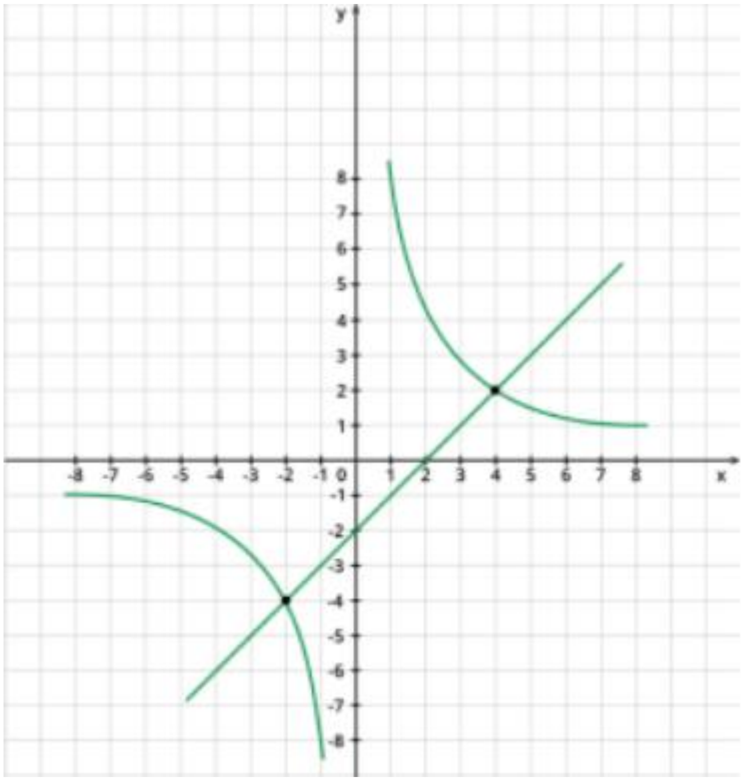
Հինգերորդ եղանակ

Նորից դիտարկենք x^2-2x-8=0 հավասարումը։ Քանի որ 0-ն հավասարման արմատ չէ, ապա կարող ենք հավասարման աջ և ձախ մասերը բաժանել x-ի վրա։

$x-2-\frac{8}{x}$=0

$x-2=\frac{8}{x}$

Կառուցենք y = 2 և y = x ֆունկցիաների գրաֆիկները և գտնենք դրանց հատման կետի կոորդինատները՝



Գրաֆիկների հատման կետերի կոորդինատներն են (-2, -4) և (4, 2)։ Հավասարման լուծումները կլինեն՝ -2 և 4։

Եզրակացություն

Հավասարումները դա հանրահաշվի լեզուն են, իսկ քառակուսային հավասարումները՝ հիմքն են որի վրա կառուցվում է հանրահաշվի բարձր գիտելիքների շինությունը: Ուսումնասիրված մեթոդները կօգտագործվեն նաև մաթեմատիկայի հետագա ուսումնասիրությունների ժամանակ: Աշխատանքի կատարման ժամանակ նախնական դրված բոլոր խնդիրները լուծվել են և ներկայացվել աշակերտների համար մատչելի լեզվով: Նոր մեթոդները հետազոտելու ընթացքում պարզ դարձավ, որ չի կարելի միանշանակ ասել, թե որ մեթոդն է ավելի հարմարավետ կամ ժամանակակից:

Հետազոտական աշխատանքի իրականացումը նպաստեց տվյալ թեմայի վերաբերյալ իմ գիտելիքների խորացմանը ու թառմացմանը ինչն արդյունավետ կդարձնի իմ հետագա աշխատանքը:

Ուսումնասիրված մեթոդների բազմազանությունը թույլ է տալիս անհատական մոտեցում ցուցաբերել բոլոր աշակերտներին՝ ելնելով իրենց գիտելիքների մակարդակից և նոր նյութի ընկալման ունակություններից: Ինչն էլ իր հերթին թույլ կտա բարձրացնել նոր գիտելիքների ստացման նկատմամբ հետաքրքրության և առաջադիմության մակարդակը:

Օգտագործված գրականության ցանկ

. Մաթեմատիկա առարկային չափորոշիչ և օրինակելի ծրագրեր

Հանրահաշիվ 8-րդ դասարանի դասագիրք. Մ.Մ. Նիկոլսկի, Մ.Կ. Պոտապով, Ն.Ն. Ռեշետնիկով, Ա.Վ. Շևկին

3.Վիքիպեդիա, Ազատ հանրագիտարան