

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ



«Երևանի Լեոյի անվան հ. 65 ավագ դպրոց» ՊՈԱԿ

ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Թեմա՝ Պարամետր պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծման ալգորիտները, որպես սովորողի մոտ սվորել սովորելու, մաթեմատիկական և գիտատեխնիկական կարողունակություն ձևավորելու խթան:

Կատարող՝ Երևանի Հովհ. Ծիրազի անվան հ. 169

հիմնական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցչուհի

Շուշանիկ Փարեմուզյան:

Ղեկավար՝ Զինա Խաչատրյան

ԵՐԵՎԱՆ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ.....	3
ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ.....	4
ԱԾԱՆՅՅԱԼԻ ՀԵՏ ԱՌԵԶՎՈՂ ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ.....	6
ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ.....	8
ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՈՎ.....	9
ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ.....	11
ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ.....	12
ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ.....	14
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ.....	15

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Պարամետր պարունակող խնդիրները մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում դասվում են համեմատաբար բարդերի շարքին: Ավելին, դրանց լուծումը հաճախ պահանջում է ստեղծագործական մոտեցում: Սովորողների մեծամասնությունը դժվարանում է պարամետրով խնդիրներ լուծելիս: Պատճառները տարբեր են: Կարելի է վկայակոչել հետևյալ նկատառումները, որոնք խոչընդոտում են թեմայի յուրացումը:

- ❖ Սովորողների կողմից ֆունկցիաների հատկությունների մեխանիկական սերտումը:
- ❖ «Պարամետր» հասկացության ոչ ճիշտ ըմբռնումը:
- ❖ Ոչ բոլոր արժեքների քննարկումը:
- ❖ Առաջադրանքի պահանջի ոչ ճիշտ ըմբռնումը:

ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

Դիցուք տրված է x և a փոփոխականներ պարունակող

(1) $F(x, a) = G(x; a)$ հավասարությունը a փոփոխականի յուրաքանչյուր սևեռված (ֆիքսված) արժեքի դեպքում, (1) հավասարությունը կարելի է դիտարկել որպես հավասարում x փոփոխականի (անհայտի) նկատմամբ և ընդհակառակը, x -ի յուրաքանչյուր սևեռված արժեքի դեպքում այն կարելի է դիտարկել իբրև հավասարում a փոփոխականի նկատմամբ: Ընդհանրապես (1) հավասարությունը կարելի է դիտարկել նաև որպես երկու՝ x և a փոփոխականներով հավասարում:

Եթե պահանջվում է թվային որևէ A բազմության յուրաքանչյուր a տարրի համար լուծել (1) հավասարումը x փոփոխականի նկատմամբ, ապա (1) հավասարումն անվանում են մեկ՝ x փոփոխականով (անհայտով) և մեկ՝ a պարամետրով հավասարում: A բազմությունը կոչվում է պարամետրի փոփոխման տիրույթ:

Անհայտի ընտրությունը պայմանական է: Պայմանավորվենք դիտարկվող (1) տեսքի հավասարումներն ընդունել որպես x պես x փոփոխականով և a պարամետրով հավասարումներ: Անհայտները կամ փոփոխականները սովորաբար նշանակում են x, y, z տառերով, իսկ պարամետրերը՝ a, b, c, \dots տառերով:

(1) հավասարումը, ըստ էության հավասարումների մի ամբողջ բազմության հակիրճ գրառումն է, որոնցից յուրաքանչյուրը ստացվում է (1) հավասարումից՝ a -ի կոնկրետ արժեքի դեպքում:

Պայմանավորվենք ընդունել, որ հավասարման մեջ պարամետրն ընդունում է ցանկացած իրական արժեք, այսինքն պարամետրի փոփոխման տիրույթը R -ն է, եթե չկան հատուկ վերապահումներ:

Հանրահայտ է, որ պարամետր պարունակող առաջադրանքները համարվում են ոչ պարզ առաջադրանքներ: Նման խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտություն է առաջանում լինել չափից ավելի ուշադիր և զգույշ՝ դիտարկելով բոլոր հնարավոր դեպքերը: Ըստ էության, հետազոտական աշխատանք է պետք ցուցաբերել:

Լուծել (1) հավասարումը, նշանակում է՝ այն լուծել a պարամետրի բոլոր արժեքների դեպքում: Եթե (1) հավասարումը a պարամետրի թեկուզ մեկ արժեքի դեպքում չի քննարկվում, ապա այդ հավասարման լուծումն ավարտված չի համարվում: Երկու և ավելի պարամետրերով և մեկ՝ x փոփոխականով հավասարումների հասկացությունները ներմուծվում են նույն ձևով: Օրինակ՝ մեկ x փոփոխականով և երկու՝ a և b պարամետրերով հավասարման ընդհանուր տեսքն է $F(x, a, b) = G(x, a, b)$:

Համանման ձևով ներմուծվում են նաև պարամետր պարունակող անհավասարումների ($F(x, a) > G(x, a)$, $F(x, a, b) > G(x, a, b)$ և այլն) հասկացությունները: Այստեղ ևս ընդունվում է, որ պարամետրի փոփոխման տիրույթը իրական թվերի բազմությունն է:

Քանի որ պարամետր պարունակող հավասարումն (անհավասարումը) իրենից ներկայացնում է անվերջ շատ հավասարումների համախումբ, ուստի պարզ է, որ անհնար է առանձնացնել նրանցից յուրաքանչյուրը: Լուծման ընթացքում համարում են, որ պարամետրերը հայտնի մեծություններ են:

ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՀԵՏ ԱՌՆՉՎՈՂ ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

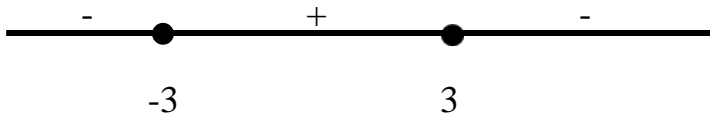
Գտնել a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $f(x) = \frac{ax}{x^2+9}$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը 3 է:

Լուծում.
$$f'(x) = \frac{(ax)'(x^2+9) - ax(x^2+9)'}{(x^2+9)^2} = \frac{9a - ax^2}{(x^2+9)^2}$$

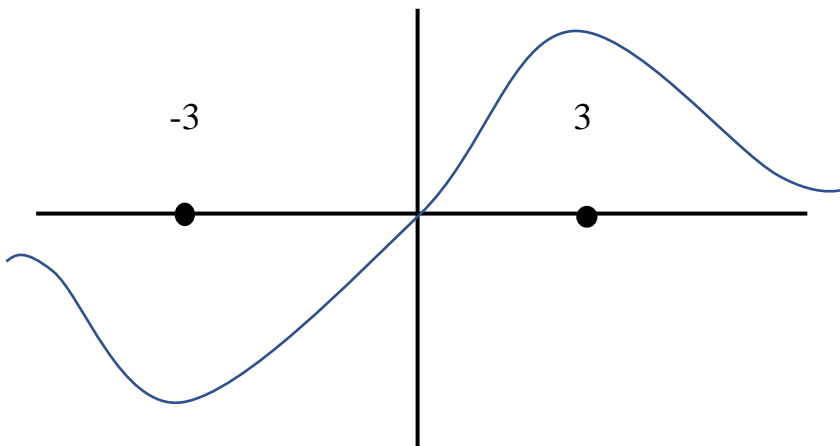
Գտնենք կրիտիկական կետերը՝ $f'(x) = 0 \quad \begin{cases} 9a - ax^2 = 0 & (1) \\ (x^2 + 9)^2 \neq 0 \end{cases}$

Եթե $a = 0$, ապա $f(x) = 0$ x -ի ցանկացած արժեքների համար, ուստի նրա մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը 0 է, այսինքն $a = 0$ -ն չի բավարարում խնդրի պայմանին: Եթե $a \neq 0$ (1)-ից կատանանք $x = \pm 3$:

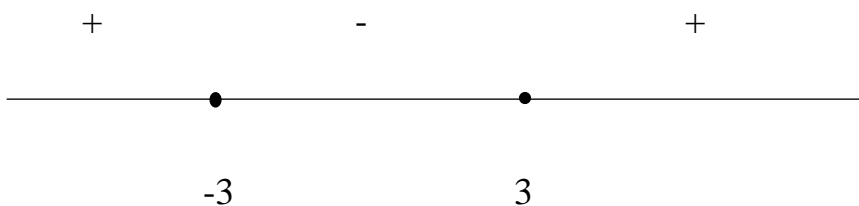
Եթե $a > 0$, ապա f' -ի նշանները կլինեն՝



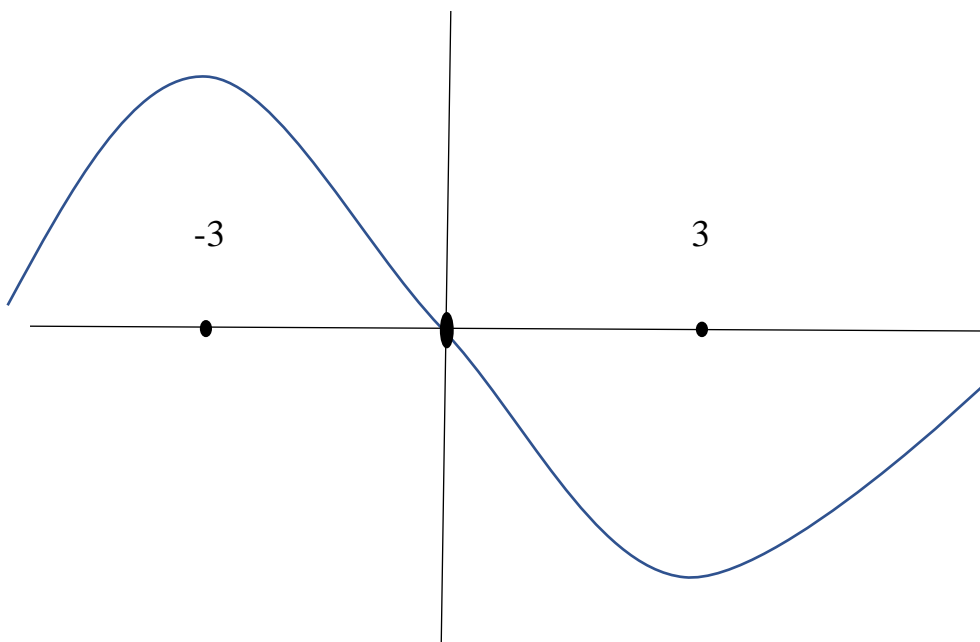
Հաշվի առնելով, որ այս դեպքում $f(x) > 0$, եթե $x > 0$ և $f(x) < 0$, եթե $x < 0$, տեսնում ենք, որ $x=3$ կետում $f(x)$ -ը ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, իսկ $x=3$ կետում փոքրագույն արժեքը: (նկ. 1)



$a < 0$ դեպքում f' -ի նշաններն են՝



Հաշվի առնելով, որ այս դեպքում $f(x) < 0$, եթե $x > 0$ և $f(x) > 0$, եթե $x < 0$, տեսնում ենք, որ $x=3$ կետում $f(x)$ -ը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը, իսկ $x=-3$ կետում մեծագույն արժեքը: (նկ.2)



Այսպիսով խնդրի պահանջը նշանակում է՝

$$|f'(3) - f'(-3)| = 3 \left| \frac{3a}{18} + \frac{3a}{18} \right| = 3$$

Պատ՝ +9, -9:

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Գտնել $y = \frac{2^x - 1}{2^{2x} + 2^x}$

Լուծում պետք է պարզել, թե b -ի ինչ արժեքների դեպքում $\frac{2^x - 1}{2^{2x} + 2^x} = b$

հավասարումը լուծում ունի: Քանի որ $2^{2x} + 2^x \neq 0$, կստանանք

$$(1) \quad b2^{2x} + (b - 1)2^x + 1 = 0$$

Եթե $b=0$, կստանանք $2^x=1$; $x=0$, այսինքն $b=0$ -ն բավարարում է խնդրի պայմանին:

Եթե $b \neq 0$, նշ. $2^x = t$ և (1)-ի երկու մասը բաժանենք b -ի:

$$(2) \quad t^2 + \left(1 - \frac{1}{b}\right)t + \frac{1}{b} = 0$$

Խնդրի պահանջը կայանում է նրանում, որ ստացված քառակուսի հավասարումը (t -ի նկատմամբ) ունենա գոնե մեկ դրական արմատ, իսկ դա իր հերթին նշանակում է, որ (2)-ի մեծ արմատը դրական է, այսինքն՝

$$-\left(1 - \frac{1}{b}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{4}{b}} > 0$$

Լուծելով այս իռացիոնալ անհավասարությունը և ստացված պատասխանին ավելացնելով $b=0$ կետը, կստանանք վերջնական պատասխանը:

Պատ՝ $(-\infty, 3 - 2\sqrt{2})$:

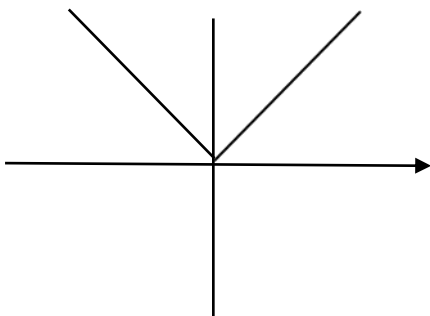
ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՈՎ

Գտնել $||x - 2| - 4| = a^2 + 3a$ հավասարման արմատների քանակը կախված a պարամետրից:

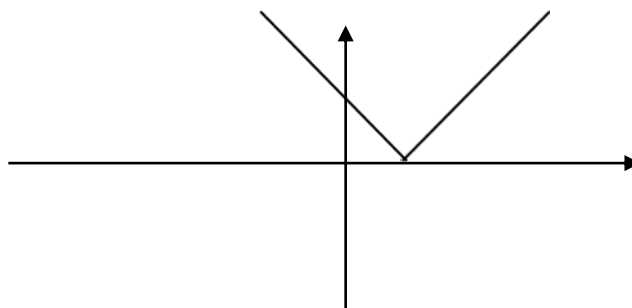
Դիտարկենք $f|x| = ||x - 2| - 4|$ ֆունկցիան և կառուցենք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

$y = f|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կստանանք հետևյալ ձևափոխությունների արդյունքում:

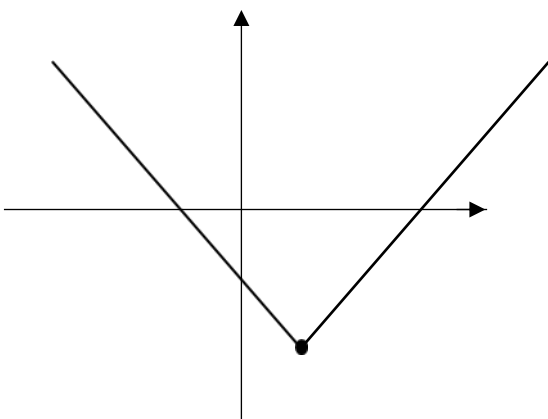
1) $y_1 = |x|$



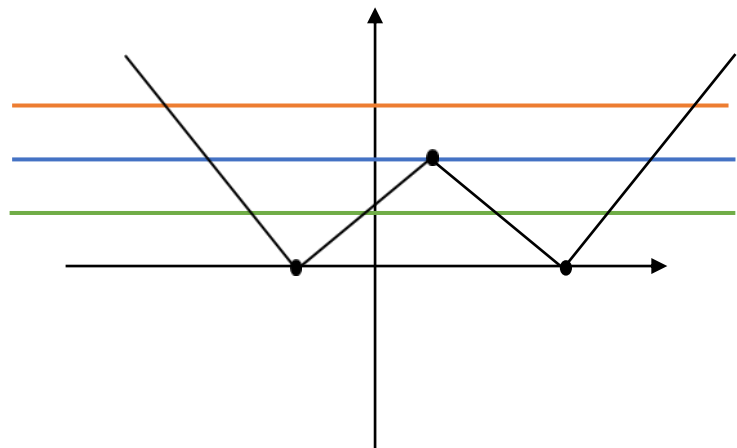
2) $y_2 = |x - 2|$



3) $y_3 = |x - 2| - 4$



4) $y_4 = ||x - 2| - 4|$



Փորձենք հավասարումը լուծել $y_4 = ||x-2|-4|$ ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ:

1) Եթե $a^2 + 3a < 0$ ապա հավասարումն արմատ չունի:

Եթե $a \in (-3, 0)$ ապա $x \in \emptyset$:

2) Եթե $\begin{cases} a^2 + 3a = 0 \\ a^2 + 3a > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, a = -3 \\ a \in (-\infty, -4) \cup (1, \infty) \end{cases}$ ապա

հավասարումն ունի երկու արմատ:

Եթե $\begin{cases} a^2 + 3a > 0 \\ a^2 + 3a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty) \\ a \in (-4; 1) \end{cases} \Leftrightarrow$

$a \in (-4; -3) \cup (0; 1)$, ապա հավասարումն ունի 4 արմատ:

Եթե $a^2 + 3a = 4$

$$a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ապա հավասարումն ունի 3 արմատ:

Այսպիսով՝

Պատասխան՝ Եթե $a \in (-3, 0)$ ապա $x \in \emptyset$

Եթե $a \in (-\infty; -4) \cup \{-3; 0\} \cup (1; \infty)$, ապա հավասարումն ունի 2 արմատ:

Եթե $a \in \{-4; 1\}$, ապա հավասարումն ունի 3 արմատ:

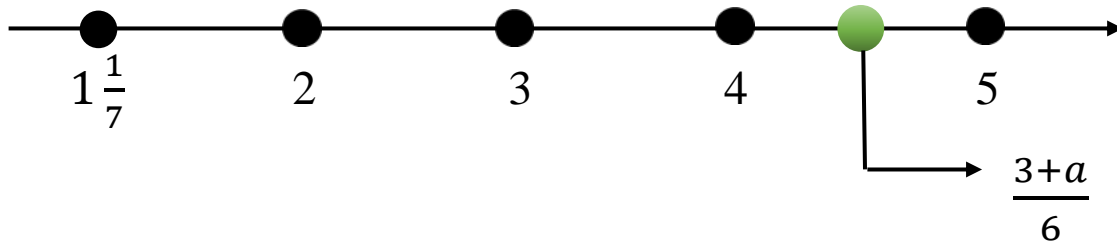
Եթե $a \in (-4, -3) \cup (0; 1)$, ապա հավասարումն ունի 4 արմատ:

ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

a -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգի լուծումների բազմությունում պարունակում է ճիշտ 3 ամբողջ թիվ:

$$\begin{cases} 5 - 3x \leq 0,5(2 + x) \\ 6x - a \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 3x \leq 1 + 0,5x \\ 6x \leq 3 + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3,5x \geq 4 \\ x \leq \frac{3+a}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{40}{35} \\ x \leq \frac{3+a}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{8}{7} \\ x \leq \frac{3+a}{6} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{3+a}{6} \geq 4 \\ \frac{3+a}{6} < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + a \geq 24 \\ 3 + a < 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 21 \\ a < 27 \end{cases} \Rightarrow a \in (21; 27)$$

Պատասխան՝ $a \in (21; 27)$:

ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Լուծել $(a^2 - 9)x^2 - 2(a + 3)x + 1$ հավասարումը:

Ունենք a պարամետրով և x անհայտով հավասարում:

Լուծենք հավասարումը պարամետրի թույլատրելի բոլոր արժեքների համար:

Եթե $a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$, ապա կստանանք x անհայտի նկատմամբ գծային հավասարում:

Եթե $a = 3$ կստանանք $-12x + 1 = 0$
$$x = \frac{1}{12}$$

Եթե $a = -3$ կստանանք $1 \neq 0$

Հետևաբար հավասարումն արմատ չունի:

Գիտարկենք այն դեպքը, երբ $a^2 - 9 \neq 0$

Այդ դեպքում կստանանք x անհայտի նկատմամբ քառակուսի հավասարում:

Հաշվենք քառակուսի հավասարման տարբերիչը:

$$\frac{D}{4} = (a + 3)^2 - (a - 3)(a + 3) = (a + 3)(a + 3 - a + 3) = 6(a + 3)$$

Եթե $a + 3 < 0 \Leftrightarrow a < -3$ ապա հավասարումն արմատ չունի:

Եթե $\begin{cases} a > -3 \\ a \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-3; 3) \cup (3; \infty)$

Ապա հավասարումն ունի 2 արմատ:

$$x_1 = \frac{a+3+\sqrt{6(a+3)}}{a^2-3}$$

$$x_2 = \frac{a+3-\sqrt{6(a+3)}}{a^2-3}$$

Պատասխան՝ Եթե $a = 3$, $x = \frac{1}{12}$

Եթե $a \in [-\infty; -3]$, $x \in \emptyset$

Եթե $a \in (-3; 3) \cup (3; \infty)$,

$$x_1 = \frac{a+3+\sqrt{6(a+3)}}{a^2-3}$$

$$x_2 = \frac{a+3-\sqrt{6(a+3)}}{a^2-3}$$

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Նկարագրված օրինակների նմանությամբ կարելի է կատարել հետազոտական աշխատանքներ նաև բազմաթիվ այլ թեմաների ուսուցման ընթացքում: Դրա համար պետք է կարևորել հետևյալ գործոնները:

- ❖ Հետազոտական աշխատանքը հնարավորություն է տալիս՝ դիտողական դարձնել մաթեմատիկայի վերացական-տեսական գիտելիքների կապը իրականության առօրյա կյանքի հետ, պատրաստի գիտելիքների հաղորդման և ընկալման գործընթացը փոխարինել գիտելիքի հայտնաբերման ստեղծագործական հանելի աշխատանքով, նպաստել համատեղ հետազոտական աշխատանք կատարելու կարողությունների զարգացմանը:
- ❖ Հետազոտական աշխատանքի կատարման կրթական խնդիրներից մեկը կարողունակությունների զարգացումն է: Ընդ որում խոսքը չի վերաբերում միայն այն բանին, որ խմբային հետազոտության ընթացքում աշակերտները մտքեր են փոխանակում միմյանց հետ:
- ❖ Հետազոտական աշխատանքի հիմքում ընկած է սովորել, կատարել սկզբունքը: Ուստի այն պետք է ունենա այնպիսի քայլեր, որոնք կարող են ապահովել բոլոր աշակերտների ակտիվ մասնակցությունը ուսումնական գործընթացին:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Ռ. Ա. Ավետիսյան
Մաթեմատիկայի ձեռնարկ
2. Կորյուն Առաքելյան
Թեստային առաջադրանքների ժողովածու
3. Գ. Գ. Գևորգյան
Ա. Ա. Սահակյան
Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր
բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար 12