«ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆ ԱՌԱՆՑ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ»
ՀԱՍԱՐԱԿԱԿԱՆ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ
ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ
ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2023

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

ԱՌԱՐԿԱ ՝ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ
ՀԵՂԻՆԱԿ՝ ԷՄՄԱ ՂԱՐԻԲՅԱՆ
ՄԱՐԶ ՝Երևան
ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ՝ հմ. 160 հիմնական դպրոց

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Հեղինակ՝ ԷՄՄԱ ՂԱՐԻԲՅԱՆ
Առարկա՝ Հանրահաշիվ

Ղեկավար՝ Զինա Խաչատրյան

ԵՐԵՎԱՆ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Աշխատանքում դիտարկվում են պարամետրական հավասարումների և պարամետրական հավասարումների համակարգերի որոշ տեսակներ, որոնց լուծումների իմանալը կօգնեն աշակերտներին դպրոցական դասընթացում ներկայացված այդ դժվարամարս թեման լավ ըմբռնելու:

<u>Սահմանում.</u> Այն հավասարումները, կամ հավասարումների համակարգերը, որոնց մեջ տված (նախապես հայտնի) թվերը փոխարինված են տառով (տառերով) անվանում են պարամետրական հավասարումներ կամ պարամետրից (պարամետրերից) կախված հավասարումներ և հավասարումների համակարգեր:

Քանի որ պարամետրերի (տառերի) կոնկրետ թվային արժեքների դեպքում կստանանք կոնկրետ հավասարումներ, որոնց անհայտները կլինեն կոնկրետ թվեր, ապա այդպիսի հավասարումների լուծումները կախված կլինեն հավասարման մեջ մասնակցող տառերից՝ պարամետրերից: Հետևաբար այս կամ այն պարամետրական ունի իր հերթին տված հավասարումների մի ամբողջ դաս՝ (տեսակի) լուծման ալգորիտմական ներկայացումն է:

Դպրոցական դասընթացում դիտարկվում են $px+q=0$ (1) գծային և $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ (2) քառակուսային՝ պարամետրական հավասարումները և իհարկե նրանցով կազմված պարամետրական համակարգերը:

Մասնավարաբար՝ (1) –ում, երբ

ա) $p\neq 0$, ապա $x=\dfrac{q}{p}$ -ն միակ լուծումն է,

բ) $p\neq 0$, $q=0$, ապա $x\in(-\infty;+\infty)$, այսինքն բոլոր թվերը (1) լուծումներ են, կամ որ նույնն է (1) լինում է նույնություն, և վերջապես

գ) $p=0$, $q\neq 0$, ապա $x\in\varnothing$ (հավասարումը լուծում չունի):

(2) հավասարմանը համաձայն նախապես հաշվում են $D=b^2-4ac$ տարբերիչը: Այժմ եթե

ա) $D>0$, ապա ունի երկու տարբեր լուծումներ

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{և} \quad x_2=\frac{b-\sqrt{D}}{2a},$$

բ) $D=0$, ապա (2) ունի $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$ միակ լուծում,

գ) $D<0$ ապա $x\in\varnothing$, (2) հավասարումը լուծում չունի իրական թվերով:

Դիտարկենք (1) և (2) հավասարումների օրինակներ:

Օրինակ 1. Պարզել a պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում

$$4x-1=a(x+2)-6$$

հավասարումը. *ա) կունենա մեկ լուծում, բ) ցանկացած թիվ լուծում է (անվերջ լուծումներ), գ) չի ունենա լուծում:*

Լուծում: Նախ տրված հավասարումը ձևափոխելով բերենք (1) տեսքի.

$$4x-1=ax+2a-6 \Leftrightarrow 4x-ax=2a-6+1 \Leftrightarrow x(4-a)=2a-5$$

ա) դեպքը $4-a\neq 0 \Leftrightarrow 4\neq a \Leftrightarrow x$ միակ լուծումն է,

բ) դեպքը $\begin{cases}4-a=0\\2a-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=4\\a=2.5\end{cases}$ և համաձայն համակարգի սահմանմանը $a\in\varnothing$:

Եզրակացություն.

բ) դեպքը տեղի չունի և ոչ մի a թվի համար:

գ) դեպքը $\begin{cases}4-a=0\\2a-5\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=4\\a\neq 2.5\end{cases} \Leftrightarrow a=4$ թվի համար հավասարումը լուծում չունի:

Օրինակ 2. a պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում է

$$x^2+2ax+a(a+1)=0 \quad \text{հավասարումը}$$

ա) արմատ չունի:

Լուծում: $\frac{D}{4}=a^2-a(a+1)=-a<0 \Leftrightarrow a>0$:

Պատ.՝ $a>0 \Leftrightarrow a\in(0;\infty)$ դեպքը հավասարումը լուծումներ չունի,

բ) ունի մեկ արմատ $D=0 \Leftrightarrow -a=0 \Leftrightarrow a=0$:

Պատ. ՝ $a = 0$ դեպքում հավասարումը ունի միակ $x = 0$ արմատ:

գ) ունի երկու արմատ $\frac{D}{4} > 0 \iff -a > 0 \iff a < 0 \iff a \in (-\infty; a)$ դեպքում հավա-

սարումը ունի $x = -a + \sqrt{-a} x = -a - \sqrt{-a}$ արժեքները,

դ) ունի մեկից ոչ ավելի արմատ $\frac{D}{4} = -a \le 0 \iff -a \ge 0$:

Պատ.՝ $a \in (0; \infty)$:

ե) ունի մեկից ոչ պակաս արմատ $\frac{D}{4} = -a \ge 0 \iff a \le 0$:

Պատ.՝ $a \in (-\infty; 0)$:

զ) երկուսից ոչ պակաս արմատ $\frac{D}{4} = -a > 0 \iff a < 0$:

Պատ.՝ $a \in (-\infty; 0)$:

է) ունի երկուսից ոչ ավելի արմատ:

Պատ.՝ $a \in R$, $(-\infty; \infty)$:

§ 1. ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Այս պարագրաֆում կդիտարկենք երեք և ավելի բարձր աստիճանի հավասարումներ մեկ և ավելի պարամետրներից կախված:

Օրինակ 3. Լուծել

$$\boldsymbol{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0}$$

հավասարումը, որտեղ a-ն, b-ն, c-ն նախապես տրված իրական թվեր են:

Լուծում: Ունենք՝

$$x^3-ax^2-(b+c)x^2+(ab+ca)x+bcx-abc=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2(x-a)-(b+c)x^2+ax(b+c)+bc(x-a)=0 \Leftrightarrow x^2(x-a)-(b+c)x(x-a)+bc(x-a)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$(x-a)\left(x^2-(b+c)x+bc\right)=0 \;\Leftrightarrow\; (x-a)(x^2-bx+cx+bc)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$(x-a)(x(x-b)-c(x-b)=0) \;\Leftrightarrow\; (x-a)(x-b)(x-c)=0 \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x-a=0} \\ \boldsymbol{x-b=0} \\ \boldsymbol{x-c=0} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Պատ.՝ $x_1=a$; $x_2=b$; $x_3=c$:

Միաժամանակ մենք ստացանք, ըստ Վիետի հակադարձ թեորեմի, բերված տեսքի խորանարդ հավասարմանման համար՝

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x_1+x_2+x_3=(a+b+c)} \\ \boldsymbol{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=ab+bc+ca} : \\ \boldsymbol{x_1x_2x_3=-abc} \end{array}\right.$$

Այժմ դիտարկենք 3 և ավելի բարձր աստիճանի պարամետրական հավասարումներ, որոնց լուծման հիմքում որպես անհայտ կդիտարկենք պարամետրերը:

Օրինակ 4. Լուծել

$$\boldsymbol{x^3-2x^2-(a^2-a-1)x+(a^2-a)=0}$$

հավասարումը, որտեղ $\boldsymbol{a-0}$ նախապես տրված իրական թիվ է:

Լուծում: Քանի որ տված հավասարումում a պարամետրը 2-րդ աստիճանի է, ապա ծագում է միտք որպես անհայտ դիտարկենք a պարամետրը և լուծենք քառակուսի հավասարում a-ի նկատմամբ:

Ունենք՝

$$-a^2x+a^2+ax-a+x^3-2x^2+x=0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{a^2(1-x)-a(1-x)+x^3-2x^2+x=0}, \text{ երբ } \boldsymbol{(1-x)\neq 0}:$$

$$D=(1-x)^2-4(1-x)(x^3-2x^2+x)=(x-1)^2+4(1-x)x(x^2-2x+1)=$$
$$=(x-1)^2+4x(x-1)(x-1)^2:$$

$$D=(x-1)^2\big(1+4x(x-1)\big)=(x-1)^2(4x^2-4x+1)=(x-1)^2(2x-1)^2;$$

$$a=\frac{(1-x)\pm\sqrt{(x-1)^2(2x-1)^2}}{2(1-x)}=\frac{(1-x)\pm(x-1)(2x-1)}{2(1-x)};$$

$$a=\frac{(1-x)+(x-1)(2x-1)}{2(1-x)}=\frac{(1-x)+(1-x)(1-2x)}{2(1-x)}; \quad a=\frac{1+1-2x}{2}=(1-x)$$

$$\text{և} \quad a=\frac{(1-x)-(x-1)(2x-1)}{2(1-x)}=\frac{1+2x-1}{2}=x:$$

Եթե $1-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$, ստացանք $a=1-x$ կամ $a=x$:

Երբ $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$, կստանանք $0-0+1-2+1=0 \Leftrightarrow 0=0$:

Պատ. ՝ $\boldsymbol{x_1=1;\ \ x_2=1-a;\ \ x_3=a:}$

Օրինակ 5. Լուծել

$$\boldsymbol{(x^2-a^2)-6x^2+4x+2a=0}$$

հավասարումը, որտեղ $\boldsymbol{a\in(-\infty;+\infty)}$:

Լուծում: Նախորդ օրինակի նման, որպես անհայտ համարենք a պարամետրը և լուծենք քառակուսի հավասարում նրա նկատմամբ:

Ունենք՝

$$a^2-2ax^2+2a+x^4-6x^2+4x=0 \Leftrightarrow a^2-2a(x^2-1)+x^4-6x^2+4x=0:$$

$$\boldsymbol{\frac{D}{4}}=\boldsymbol{(x^2-1)^2-(x^4-6x^2+4x)}=x^4-2x^2+1-x^4+6x^2+4x=4x^2+4x+1=(2x+1)^2:$$

Հետևաբար՝

$$a=(x^2-1)\pm(2x+1)\ \Leftrightarrow\ a=x^2-1+2x+1=x^2+2x \quad \text{և}$$

$$a=x^2-1-2x-1=x^2-2x-2:$$

Այժմ վերադառնանք x անհայտին, լուծենք արդեն քառակուսի հավասարումը a պարամետրի նկատմամբ:

$$\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{x^2+2x=a}\\ \boldsymbol{x^2-2x-2=a}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+2x-a=0\\ x^2-2x-2-a=0\end{array}\right.; \left[\begin{array}{ll}x_1=-1+\sqrt{1+a}; & x_2=-1-\sqrt{1+a}\\ x_3=1+\sqrt{1+2+a}; & x_4=1-\sqrt{1+2+a}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$x_1=-1+\sqrt{1+a}\ ;\quad x_2=-1-\sqrt{1+a}\ ;\ x_3=1+\sqrt{3+a}\ ;\ x_4=1-\sqrt{3+a}:$$

<u>Եզրակացություն.</u>

ա) Եթե $\boldsymbol{1+a>0}\ \Rightarrow\ 3+a>0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{a>-1}$ դեպքում հավասարումն ունի **չորս** լուծում:

բ) Եթե $\boldsymbol{1+a=0}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a=-1}$ հավասարումն ունի ճիշտ **երեք** լուծում.

$$x_1=-1;\quad x_2=1-\sqrt{3+a}\ ;\quad x_3=1+\sqrt{3+a}\ :$$

գ) $\begin{cases}\boldsymbol{1+a<0}\\ \boldsymbol{3+a>0}\end{cases} \Leftrightarrow\ \boldsymbol{-3<a<-1}$ դեպքում հավասարումն ունի երկու լուծում.

$$x_3=1+\sqrt{3+a}\ ;\quad x_4=1-\sqrt{3+a}\ :$$

դ) Եթե $\boldsymbol{3+a}=0\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a=-3}$ հավասարումն ունի ճիշտ մեկ լուծում՝ $\boldsymbol{x=-1}$:

ե) Եթե $\boldsymbol{a>-3}$ հավասարումը չունի լուծում:

<u>Օրինակ 6.</u> Լուծել 6-րդ աստիճանի

$$\boldsymbol{x^6-(a^2+1)x^2+a=0}$$

հավասարումը, որտեղ a-ն իրական թիվ է:

<u>Լուծում:</u> Ունենք՝

$$-a^2x^2+a+x^6-x^2=0\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a^2x^2-a-x^6+x^2=0}:$$

Որպես անհայտ դիտենք պարամետրը

$$\boldsymbol{D=1^2-4x^2(-x^6+x^2)},\ \text{եթե իհարկե}\ \boldsymbol{x\neq 0}:$$

$$D=1+4x^8-4x^4=(2x^2-1)^2:$$

Ուստի՝

$$a=\frac{1\pm(2x^4-1)}{2x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1+2x^4-1}{2x^2}=x^2 \\ a=\dfrac{1-2x^4+1}{2x^2}=\dfrac{1-x^4}{x^2} \end{array}\right. :$$

Սա, իհարկե, այն դեպքում, երբ $x\neq 0$: Այժմ, եթե

$$\boldsymbol{x=0},\ \boldsymbol{a=0} \quad \text{ունենք } x^2=a \ \Leftrightarrow\ x_1=\sqrt{a},\quad x_2=-\sqrt{a}:$$

Իսկ

$$a=\frac{1-x^4}{x^2} \ \Rightarrow\ x^4+x^2a-1=0 \quad \text{կամ} \quad x^2=\frac{-a-\sqrt{a^2+1}}{2}$$

$$\text{կամ} \quad x^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+1}}{2} \ \Leftrightarrow\ x^2=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+1}}{2}:$$

Քանի որ $\dfrac{-a-\sqrt{a^2+1}}{2}<0 \ \Rightarrow\ \sqrt{a^2+1}>-a$, ճիշտ է $\forall a$-ի համար, ուստի $x^2=\dfrac{-a-\sqrt{a^2+1}}{2}<0$ հավասարումը լուծում չունի:

Մյուս կողմից՝

$$\frac{-a+\sqrt{a^2+1}}{2}>0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{a^2+1}>a$$

ճիշտ է ցանկացած $a\in R$-ի համար: Ուստի հավասարումը միշտ երկու լուծում կունենա.

$$\boldsymbol{x_1=-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{2}}}; \qquad \boldsymbol{x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{2}}}:$$

Այժմ, եթե $\boldsymbol{a>0}$ կունենանք ևս 2 լուծում՝

$$x_3=\sqrt{a}; \quad x_4=-\sqrt{a}:$$

Եթե $\boldsymbol{a=0}$ կունենանք ճիշտ ***2 լուծում՝*** $\quad \boldsymbol{x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}}$ և $\boldsymbol{x_2=0}$:

Պատ.՝ Հավասարումը կունենա կամ ***չորս լուծում,*** երբ $\boldsymbol{a>0}$, կամ 2 լուծում, երբ $\boldsymbol{a\leq 0}$:

Շատ հետաքրքիր օրինակ էր:

§ 2. ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Օրինակ 7. Լուծել

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}-\dfrac{c+a}{z+x}=1 \\ \dfrac{a+b}{x+y}-\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1 \\ -\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}-\dfrac{c+a}{z+x}=1 \end{cases}$$

համակարգը, որտեղ a,b,c-ն իրական թվեր են:

Լուծում: Զույգ առ զույգ գրանցելով համակարգի հավասարումները, կստանանք՝

$$\frac{a+b}{x+y}=1; \quad \frac{b+c}{y+z}=1; \quad \frac{c+a}{z+x}=1 \iff \begin{cases} x+y=a+b \\ y+z=b+c \\ z+x=c+a \end{cases} :$$

Նոր համակարգի (որը համարժեք է սկզբնականին) բոլոր հավասարումները գումարելով կստանանք՝

$$2(x+y+z)=2(a+b+c) \iff x+y+z=a+b+c :$$

Այժմ $(x+y)$-ի տեղը տեղադրել $a+b$, կստանանք $z=c$; $y+z$-ի տեղը տեղադրելով $(b+c)$, կստանանք $x=a$ և $z+x$-ի տեղը տեղադրելով $c+a$, կստանանք $y=b$:

Պատ. ՝ $x=a$; $y=b$; $z=c$ $z=c$ $\iff$ $(x,y,z)=(a,b,c)$ համակարգի միակ լուծումն է:

Օրինակ 8. Լուծել հավասարումների համակարգը

$$\begin{cases} xy+yz=2a^2 \\ yz+zx=2a^2-a-1 \\ zy+xy=2a^2+a-1 \end{cases},$$

որտեղ a-ն կամայական իրական թիվ է:

Լուծում: Գումարելով համակարգի բոլոր հավասարումները, կստանանք՝

$$2(xy+yz+zx)=6a^2-2 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{xy+yz+zx=3a^2-1}:$$

Այժմ համակարգի համար, հերթով՝ սկզբում $(xy+yz)$-ի, հետո $(yz+zx)$-ի, վերջում $(zx+xy)$-ի փոխարեն տեղադրելով իրենց արժեքները, կստանանք

$$\boldsymbol{zx=a^2-1}; \quad \boldsymbol{xy=a^2+1}; \quad \boldsymbol{zy=a^2-a}:$$

Տված համակարգը բերվեց նրան համարժեք համակարգի:

$$\begin{cases} \boldsymbol{xy=a^2+a} \\ \boldsymbol{yz=a^2-a} \\ \boldsymbol{zy=a^2-1} \end{cases}:$$

Բազմապատկելով նոր համակարգի բոլոր հավասարումները, կստանանք՝

$$(xyz)^2=(a^2+a)(a^2-a)(a^2-1)=a^2(a^2-1)^2 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{xyz=a(a^2-1)} \\ \boldsymbol{xyz=a(1-a^2)} \end{array}\right.:$$

Այժմ հերթով xy-ի, yz-ի, zx-ի տեղը տեղադրելով իրենց արժեքները, կստանանք՝

$$\boldsymbol{z}=\frac{\boldsymbol{a(a^2-1)}}{\boldsymbol{a^2+a}}=a-1; \quad x=\frac{a(a^2-1)}{a^2-a}=a+1; \quad y=\frac{a(a^2-1)}{a^2-1}=a; \quad (x,y,z)=(a+1;a;a-1):$$

Ճիշտ նույն կերպ էլ համակարգի երկրորդ հավասարումից կստանանք $(x,y,z)=(-a-1;-a;-a+1)$: Սրանք ճիշտ են, դեռ երբ $a^2+a\neq 0$, $a^2-a\neq 0$, $a^2-1\neq 0$: Ստուգումից կարելի է համոզվել, որ նրանք ճիշտ են նաև, երբ $a^2+a=0$ կամ $a^2-a=0$ կամ $a^2-1=0$ դեպքերում:

Պատ.՝ $\boldsymbol{(x,y,z)=(a+1;a;a-1)}$; $\boldsymbol{(x,y,z)=(-a-1;-a;-a-1)}$, $\boldsymbol{a\in(-\infty;+\infty)}$:

Օրինակ 9. Լուծել հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2+2ay=a^2} \\ \boldsymbol{y^2+2bx=b^2} \end{cases}, \quad \text{որտեղ} \quad a,b\in R:$$

Լուծում: Համակարգի առաջին հավասարումից հանելով երկրորդը, կստանանք՝

$$x^2+2ay-y^2-2bx=a^2-b^2 \iff (x^2-2bx+b^2)-(y^2-2ay+a^2)=0 \iff$$

$$(x-b)^2-(y-a)^2=0 \iff (x-b-y+a)(x-b+y-a)=0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} x-b-y+a=0 \\ x-b+y-a=0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x-y=b-a \\ x+y=a+b \end{array}\right.:$$

Տվյալ համակարգը համարժեք է լինում մի համախմբի հետ, որը կստացվի երկու համակարգերից՝

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+2ay=a^2 \\ x-y=b-a \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2ay=a^2 \\ x+y=a+b \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+2a(x+a-b)=a^2 \\ y=x+a-b \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2a(a+b-x)=a^2 \\ y=a+b-x \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+2ax+a^2-2ab=0 \\ y=x+a-b \end{cases} \Rightarrow \dfrac{D}{4}=a^2-a^2+2ab=2ab \\ \begin{cases} x^2-2ax+a^2+3ab=0 \\ y=a+b-x \end{cases} \Rightarrow \dfrac{D}{4}=a^2-a^2-2ab=-2ab \end{array}\right.:$$

Ստացված թվերը միաժամանակ կլինի ոչ բացասական, եթե a կամ b թվերից մեկը լինի զրո:

Այժմ, եթե

$$a=0 \Rightarrow x^2=0 \iff x=0 \text{ և } y^2=b^2 \iff y=\pm b;\ (x,y)=(0;\pm b):$$

Իսկ, եթե

$$b=0 \Rightarrow y^2=0 \iff y=0 \text{ և } x^2=a^2 \iff x=\pm a;\ (x,y)=(\pm a;0):$$

Եթե $\boldsymbol{ab>0}$, ապա

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=-a\pm\sqrt{2ab}} \\ \boldsymbol{y=b\pm\sqrt{2ab}} \end{cases};$$

իսկ եթե $\boldsymbol{ab<0}$, ապա

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=a\pm\sqrt{-2ab}} \\ \boldsymbol{y=b\pm\sqrt{-2ab}} \end{cases}:$$

§ 3. ՏԻՊԱՅԻՆ ՍԽԱԼՆԵՐ, ՈՐՈՆՔ ԱՌԱՋԱՆՈՒՄ ԵՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԺԱՄԱՆԱԿ

Սկսենք պարզագույն օրինակի դիտարկումից:

<u>*Օրինակ 10.*</u> a թվի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում 2-ը

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} + \mathbf{5{,}1}\boldsymbol{a} = \mathbf{7}$$

հավասարման լուծումը ***չէ:***

Հնարավոր մոտեցում: «*Տեղադրենք* $x = 2$, *կստանանք* $\frac{1}{2} + 5{,}1a = 7$ *բանաձևը, որում հավասարություն չէ: Իսկ դա հնարավոր է, եթե* a *-ն հավասար չէ* $\left(7 - \frac{1}{2}\right) : 5{,}1$ *թվին:*

Պատ.՝ a *թիվը հավասար չէ* $\frac{65}{51}$ »: Լուծումն ավարտվեց:

Այսինքն, ըստ պատասխանի, եթե $a \neq \frac{65}{51}$, ապա $x = 2$ -ը լուծում ***չէ:*** Եվ քանի որ այլ բան չի ասվում, ապա մենք կարող ենք ենթադրել, որ մնացած a թվերի համար այն լուծում է, ինչին լուծողը ինքն էլ չի համաձայնվի, քանի որ, օրինակ, $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ դեպքում կստանանք՝ $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}} \neq 2$ -ի: Ուստի $x = 2$ դեպքում ստանալով $a = \frac{65}{61}$, պետք էր պատասխանը գրվեր այսպես՝

Պատ.՝ a ***թվի բոլոր արժեքների դեպքում, բացի*** $\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{65}}{\mathbf{51}}$ ***-ից***՝ $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ ***թիվը այդ հավասարությունում լուծում չէ:***

Կամ որ նույն է՝ $a \in (-\infty;+\infty) \setminus \left\{\frac{65}{61}\right\}$-ը: Եվ վերջ:

<u>*Օրինակ 11.*</u> a պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում է

$$\boldsymbol{(1-a)t^2 + 2at + 3(1-a) = 0}$$

հավասարումը ունենում է լուծում:

Հնարավոր մոտեցում:

«Որպեսզի հավասարումը լուծում ունենա, անհրաժեշտ և բավարար է, որ նրա տարբերիչը ոչ բացասական լինի.

$$D=4a^2-4\cdot 3(1-a)^2\geq 0 \ \Leftrightarrow\ a^2-3a^2+6a-3\geq 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2a^2-6a+3\leq 0; \quad \frac{D}{4}=3^2-6=3 \ \Leftrightarrow\ x_1=\frac{3+\sqrt{3}}{2};\ x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2}:$$

Պատ. ՝ $\frac{3-\sqrt{3}}{2}\leq a\leq\frac{3+\sqrt{3}}{2}$: Լուծումն ավարտվեց:

Այս լուծման մեջ կա սխալ: Բանն այն է, որ հավասարումը տարբերիչ կարող է ունենալ, եթե այն քառակուսի հավասարում է: Սակայն մեր հավասարումը կախված է պարամետրից և հետևաբար այն կլինի քառակուսի հավասարում, երբ

$$\mathbf{1}-\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a}\neq\mathbf{1}:$$

Ուստի նշված պատասխանը պետք է գրվի $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$, քանի որ $\frac{3-\sqrt{3}}{2}<1<\frac{3+\sqrt{3}}{2}$: Սա նշանակում է, որ $\boldsymbol{a}=\mathbf{1}$ արժեքը պետք է դիտարկել առանձին: Տեղադրելով $a=1$, կստանանք $2t=0\Leftrightarrow t=0$: Այսինքն հավասարումի այս դեպքում էլ լուծում ունեցավ: Միացնելով $a=1$ արժեքը նոր կստանանք վերջնական պատասխանը: Սա այն դեպքերից է, որ ***լուծումը սխալ է, բայց պատասխանը՝ ճիշտ:*** Սա նշանակում է, որ թեստային համակարգով գիտելիքների ստացումը կարող է ստեղծել խաբուսիկ իրավիճակ:

Հաջորդ օրինակը արդեն պատահականությունը լուծողին չի փրկում:

__Օրինակ 12.__ a պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում

$$\boldsymbol{(a-1)x^2+2(a-1)x+1=0}$$

հավասարումը կունենա լուծում:

Շարժվելով վերը նշված դատողությամբ միանգամից գրելով

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a-1)=(a-1)(a-1-1)=(a-1)(a-2)\geq 0,$$

կստանանք $a\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$: Մինչդեռ $\boldsymbol{a=1}$ դեպքում հավասարում $0\cdot x^2+0x+1=0$ լուծում չունի, ուստի ճիշտ պատասխանը կլինի.

Պատ. ՝ $\boldsymbol{a\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)}$:

Երբեմն գրում են պարամետրական հավասարումը առանց պարամետրի մասին որևէ բան ասելու, այնուհետև գրում պատասխանը:

__Օրինակ 13.__ ***Լուծել*** $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x-\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x=1$ ***հավասարումը:***

Պատ. ՝ $\boldsymbol{x=2}$:

Ինքնստինքյան հասկանալի է, որ $a\neq 0$ (թեպետ կարելի էր և այն նշել), ուստի a թվի, բացի 0 արժեքից, մնացած բոլոր դեպքերում ըստ գրված պատասխանի պետք է $x=2$-ը լինի դրա լուծում, ինչը կարելի է համոզվել նաև անմիջական տեղադրմամբ:

Սա նշանակում է, որ օրինակ $\boldsymbol{a=1}$ արժեքի դեպքում էլ այդ հավասարման լուծումները ***սպառվում*** են $x=2$ թվով: Մինչդեռ պարզ ստուգումը բերում է $1^x-0^x=1$, հետևաբար $x>0$: Նույն կերպ $\boldsymbol{a=-1}$ դեպքում ստանում ենք $(-1)^x-0^x=1$, որը ճիշտ է, երբ $x=2n$; $n\in N$: Հետևաբար a պարամետրի մասին նախապես կարծիք չտալով նշված պատասխանը լինում է սխալ:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Պարամետրական հավասարումները և հավասարումների համակարգերը աշակերտները դժվարությամբեն հասկանում;Փորձելեմ այս օրինակների միջոցով առաջացնեմ հետաքրքրություն տվյալ թեմային:

Դիտարկվող աշխատանքը կօգնի երեխաներին «Պարամետրական հավասարումներ և հավասարումների համակարգեր» թեման լավ հասկա-նալուն:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Հանրահաշիվ – 6 դասարան, Միքայելյան Հ., Երևան, 2005 թ.

[2] Հանրահաշիվ – 7 դասարան, Միքայելյան Հ., Երևան, 2006 թ.

[3] Հանրահաշիվ – 8 դասարան, Միքայելյան Հ., Երևան, 2007 թ.

[4] Հանրահաշիվ – 9 դասարան, Միքայելյան Հ., Երևան, 1999 թ.

[5] «Մաթեմատիկայի մրցույթային խնդիրների ժողովածու» Մ.Ի.Սկանավու խմբագրությամբ, Երևան, Լույս, 1990 թ.

[6] Ուսուցիչների վերապատրաստման դասընթացներում լսարանային ժամերին տրված ինքնուրույն աշխատանքի խնդիրներից (դասախոս՝ Ա.Ս. Միքայելյան)