Վերապատրաստող կազմակերպություն

ՀՀԿԳՄՍՆ «Շիրակի Մ. Նալբանդյանի անվան պետական համալսարան»

Հիմնադրամ

Հետազոտական աշխատանք

Թեմա-Վեկտորների կիրառությունները հանրահաշվի և երկրաչափության դպրոցական դասընթացում

Ուսուցչուհի - Լուսինե Նազարյան

Ղեկավար- Ալվարդ Սարուխանյան

Դպրոց- ՀՀ ԿԳՄՍՆ « Գյումրու թիվ 1 ավագ դպրոց» ՊՈԱԿ

Գյումրի 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ներածություն

Դպրոցական դասընթացում դիտարկվում է նաև օժանդակ մեթոդներ, ինչպես օրինակ վեկտորները և կորդինատների մեթոդը: Վերջիններս, մի կողմից, լրացնում են տարածական պատկերացումների բացթողումներն ու սահմանափակությունները և,մյուս կողմից, նպաստում են բացահայտելու էական կապեր երկրաչափության, հանրահաշվի և ֆիզիկայի միջև` այդպիսով կատարելով միջառարկայական ինտեգրման դեր:

Մաթեմատիկա առարկայի ՀՊՉ -ում Կոորդինատներ, վեկտորներ (ԿՎ) թեմայից 1-4-րդ դասարանների չափորոշչային վերջնարդյունքներում /մաթեմատիկայի/՝ աշակերտները պետք է կարողանան , թվերը պատկերն ճառագայթի վրա (նաև համակարգչային ծրագրերով): Որոշեն կոորդինատային ճառագայթի վրա պատկերված կետի կոորդինատը:

5-6-րդ դասարանների չափորոշչային վերջնարդյունքներում / մաթեմատիկա/՝ աշակերտները պետք է կարողանան, ներկայացնեն ռացիոնալ թվերը կոորդինատային առանցքի վրա: Գտնեն կոորդինատային հարթության տրված կետի կոորդինատները, նշեն կետը կոորդինատային հարթության վրա:

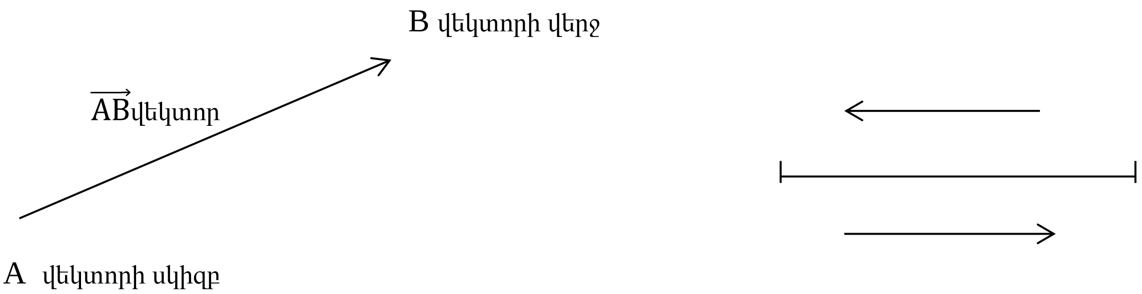
7-9-րդ դասարանների չափորոշչային վերջնարդյունքներում/ հանրահաշիվ, երկրաչափություն/՝ աշակերտները պետք է կարողանան, սահմանեն վեկտոր հասկացությունը, տարբերեն սկալյար և վեկտորական մեծությունները, բերեն համապատասխան օրինակներ: Սահմանեն հավասար, համագիծ, տարագիծ, համուղղված, հակուղղված, հակադիր վեկտորներ հասկացությունները և կառուցեն դրանց օրինակներ նաև դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերով: Գտնեն վեկտորների գումարը, տարբերությունը, երկու վեկտորների կազմած անկյունը, վեկտորի մոդուլը, վեկտորի ու թվի, վեկտորների սկալյար արտադրյալը (նաև դրանց կոորդինատներով), վեկտորի պրոյեկցիան տրված ուղղի վրա: Վերածեն վեկտորը ըստ երկու տարագիծ վեկտորների, գտնեն վեկտորի կոորդինատները նաև նրա ծայրակետերի կոորդինատներով: Կիրառեն վեկտորները երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս: Գտնեն հատվածի միջնակետի կոորդինատները, հատվածի երկարությունը ծայրակետերի կոորդինատներով: Գտնեն կետի և կոորդինատային առանցքների նկատմամբ տրված կետի համաչափ կետերի կոորդինատները: Գրեն և մեկնաբանեն տրված երկու կետերով անցնող ուղղի, տրված կենտրոնով և շառավղով շրջանագծի հավասարումները և կիրառեն խնդիրներ լուծելիս:

10-12-րդ դասարանների չափորոշչային վերջնարդյունքներում / հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր , երկրաչափություն (խորացված)/՝ աշակերտները պետք է կարողանան, սահմանեն վեկտոր, հավասար, համագիծ, տարագիծ, համուղղված, հակուղղված, հակադիր, համահարթ, տարահարթ վեկտորներ հասկացությունները և կառուցի դրանց օրինակներ նաև դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերով: Գտնեն երկու վեկտորների գումարը, տարբերությունը, կազմած անկյունը, վեկտորի մոդուլը, վեկտորի ու թվի, երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը (նաև դրանց կոորդինատներով), վեկտորի պրոյեկցիան տրված ուղղի, հարթության վրա: Վերածեն վեկտորը ըստ երեք տարահարթ վեկտորների, գտնեն վեկտորի կոորդինատները: Կիրառեն վեկտորները և կոորդինատային մեթոդը երկրաչափական և բնագիտական խնդիրներ լուծելիս: Գտնեն հատվածի միջնակետի կոորդինատները, հատվածի երկարությունը ծայրակետերի կոորդինատներով: Գտնեն կոորդինատների սկզբնակետի, առանցքների, հարթությունների նկատմամբ տրված կետի համաչափ կետի կոորդինատները: Գրեն ուղղի, հարթության կանոնական հավասարումները, գնդային մակերևույթի հավասարումը, կիրառեն դրանք խնդիրներ լուծելիս: Ծանոթ լինեն հարթության (տարածության) արտապատկերումներին, բերեն օրինակներ (շարժում, զուգահեռ տեղափոխում, պտույտներ), կիրառեն դրանք խնդիրներ լուծելիս:

Այստեղ ներմուծվում է վեկտոր գաղափարը և վեկտորների հետ կատարվող հիմնական գործողությունները (վեկտորների գումարումը, վեկտորի բազմապատկումը թվով), գործողությունների հիմնական օրենքները:

Գաղափար վեկտորների մասին

Դիտենք կամայական հատված: Նրա վրա կարելի է նշել երկու ուղղություն՝ մի ծայից մյուսը և հակառակը:Հատվածի մի ծայրն անվանում ենք սկիզբ (կամ սկզբնակետ), իսկ մյուսը վերջ (կամ վերջնակետ), և հաշնի ենք առնում , որ հատվածն ուղղված է սկզբից դեպի վերջ:



Սահմանում: Այն հատվածը, որի համար նշված է, թե նրա ծայրակետերից որն է սկիզբը, և որը ՝ վերջը կոչվում է ուղղորդված հատված կամ վեկտոր:

Վեկտորը պատկերվում է սլաքավոր հատվածով, որը ցույց է տալիս վեկտորի ուղղությունը: Վեկտորները նշանակվում են լատինական երկու մեծատառով($\overrightarrow{AB}$) կամ մեկ փոքրատառով ($\vec{a}$) : Հարթության ցանկացած կետ նույնպես վեկտոր է, որոնք կոչվում են զերոյական($\vec{0}$) : Զերոյական վեկտորի սկիզբը և վերջը համընկնում են:

Ոչ զերոյական վեկտորի երկարություն կամ մոդուլ կոչվում է AB (a) հատվածի երկարությունը և նշանակվում է այսպես՝ $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$): Իսկ զերոյական վեկտորի երկարությունը հավասար է զրոյի:

Սահմանում: Ոչ զերոյական վեկտորները կոչվում են համագիծ, եթե նրանք գտնվում են մեկ ուղղի վրա , կամ զուգահեռ ուղղների վրա: Զերոյական վեկտորը համագիծ է ցանկացած վեկտորին:

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ զերոյական վեկտորները համագիծ են, ապա նրանք կարող են ուղղված լինել կամ միանման , կամ հակադիր: Առաջին դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կոչվում են համուղղված և գրվում է $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, իսկ մյուս դեպքում հակուղղված և գրվում է $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$: Ընդունված է ,որ զերոյական վեկտորը համուղղված է ցանկացած վեկտորին:

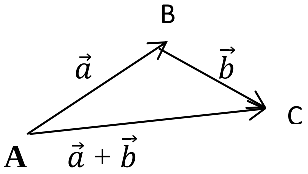
Սահմանում: վեկտորները կոչվում են հավասար , եթե նրանք համուղղված են և նրանց երկարությունները հավասար են:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների հավասարությունը նշանակվում է .$\vec{a} = \vec{b}$:

Ցանկացած M կետից կարելի է տեղադրել $\vec{a}$ վեկտորին հավասար վեկտոր, ընդ որում՝ մակը: Տարբեր կետերից տեղադրված հավասար վեկտորները հաճախ նշանակում են միևնույն տառով:

Վեկտորների գումարումը և հանումը

Դիցուք՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$-ն երկու վեկտորներ են: Վերցնենք կամայական A կետ և այդ կետից տեղադրենք $\vec{a}$ վեկտորին հավասար $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ վեկտորը: Այնուհետև B կետից տեղադրենք $\vec{b}$ վեկտորին հավասար $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ վեկտորը: $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ վեկտորը կոչվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների **գումար** և այն նշանակվում՝ $\vec{a}+\vec{b}$: Վեկտորների գումարման այս կանոնը կոչվում է **եռանկյան կանոն:**



Նկ.1

Ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի համար ՝ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$:

Եռանկյան կանոնը կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ կերպ.

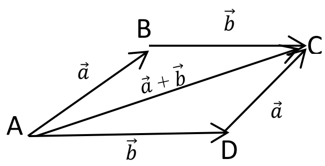
Եթե A-ն, B-ն, C-ն կամայական կետեր են, ապա $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$:

Վեկտորների գումարման օրենքները: Ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

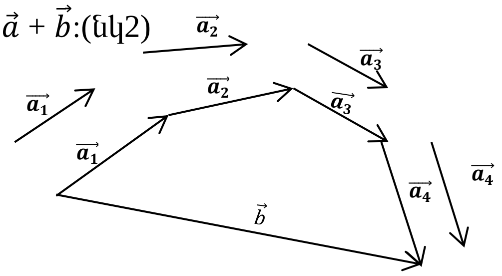
1.$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$(տեղափոխական օրենք)

2.$(\vec{a}+\overrightarrow{b)}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (զուգորդական օրենք):

Զուգահեռագծի կանոնը:՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$-ն տարազիծ վեկտորները գումարելու համար բավական է ինչ-որ A կետից տեղադրել $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ և $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ վեկտորները և կառուցել ABCD զուգահեռագիծը: Այդ դեպքում $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$:(նկ2)



Նկ 2



Նկ 3

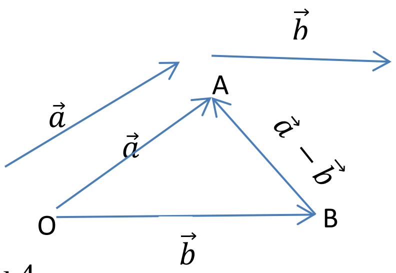
Մի քանի վեկտորների գումարումը կատարվում է այսպես. առաջին վեկտորը գումարվում է երկրորդին , այնուհետև նրանց գումարը գումարվում է երրորդ վեկտորին և այլն: Վեկտորների գումարման օրենքից հետևում է, որ մի քանի վեկտորների գումարը կախված չէ նրանց գումարման հերթականությունից: $\vec{b} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3} + \vec{a_4}$ (նկ3):

Մի քանի վեկտորների գումարի կառուցման կանոնը կոչվում է **բազմանկյան կանոն**:

Վեկտորների հանումը: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը է կոչվում այն վեկտորը, որի և $\vec{b}$ վեկտորի գումարը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը նշանակվում է` $\vec{a}$ - $\vec{b}$:

Այն կառուցվում է այսպես: Հարթության վրա վերցնենք կամայական O կետ և այդ կետից տեղադրենք $\vec{a}$ վեկտորին հավասար $\overrightarrow{AO}$ վեկտորը, տեղադրենք $\vec{b}$ վեկտորին հավասար $\overrightarrow{OB}$ վեկտորը: $\overrightarrow{BA}$ վեկտորը կլինի $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը և այն նշանակվում է` $\vec{a}$ - $\vec{b}$: $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$: (նկ4)



Նկ 4

Դիցուք` $\vec{a}$ –ն ոչ զրոյական կամայական վեկտոր է: $\vec{a_1}$ վեկտորը կոչվում է $\vec{a}$ վեկտորին **հակադիր** վեկտոր , եթե $\vec{a}$ և $\vec{a_1}$ վեկտորներն ունեն հավասար երկարություն և հակուղղված են:

Զերոյական վեկտորին հակադիր վեկտոր է համարվում զերոյական վեկտորը:

$\vec{a}$ վեկտորին հակադիր վեկտորը նշանակվում է -$\vec{a}$: Ակնհայտ է , որ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$:

Ցանկացած $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համար ճիշտ է $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ հավասարությունը:

Վեկտորի բազմապատկումը թվով

$\vec{a}$ ոչ զրոյական կամայական վեկտորի և k թվի արտադրյալ է կոչվում այն $\vec{b}$ վեկտորը որի երկարությունը հավասար է $|k| \cdot |\vec{a}|$, ընդվորում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, եթե $k \geq 0$, հակուղղված են, եթե k<0: Զերոյական վեկտորի և կամայական թվի արտադրյալը համարվում է զրոյական վեկտոր:

$\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալը նշանակվում է k$\vec{a}$:

Վեկտորի և թվի արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ.

1) Ցանկացած վեկտորի և 0 թվի արտադրյալը զերոյական վեկտոր է:

2) Ցանկացած k թվի և ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի համար $\vec{a}$ և k$\vec{a}$ վեկտորները համագիծ են:

Ցանկացած k , m թվերի և ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$ վեկտորների համար ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները.

1) (km) $\vec{a}$ = k(m$\vec{a}$) (զուգորդական օրենք):
2) (k+m) $\vec{a}$ = k$\vec{a}$ +m$\vec{a}$ (առաջին բաշխական օրենք):
3) k ($\vec{a}$ + $\vec{b}$) = k$\vec{a}$ +k$\vec{b}$ (երկրորդ բաշխական օրենք):

Վեկտորի վերածումն ըստ երկու տարագիծ (ոչ համագիծ) վեկտորների

Դիցուք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ –ն տրված վեկտորներն են: Եթե $\vec{c}$ վեկտորը ներկայացված է

$\vec{c}$ = x$\vec{a}$ +y$\vec{b}$ տեսքով, որտեղ x-ը և y-ը կամայական թվեր են, ապա ասում ենք ,որ $\vec{c}$ վեկտորը վերածված է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների:

x- և y թվերը կոչվում են վերածման գործակիցներ:

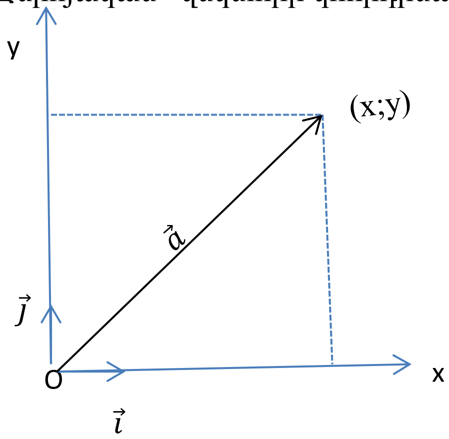
Ցանկացած վեկտոր կարելի է վերածել ըստ տրված երկու տարագիծ վեկտորների, ընդ որում՝ վերածման գործակիցները որոշվում են միակ ձևով:

Վեկտորի կոորդինատները

Կոորդինատների 0 սկզբնակետից տեղադրենք $\vec{i}$ և $\vec{j}$ միավոր վեկտորները, այնպես, որ $\vec{i}$ վեկտի ուղղությունը համընկնի ox առանցքի ուղղության հետ, իսկ $\vec{j}$ վեկտորի ուղղությունը oy առանցքի ուղղության հետ: $\vec{i}$ և $\vec{j}$ վեկտորներն անվանում են կոորդինատային վեկտորներ: Կոորդինատային վեկտորները տարագիծ են , և , ուրեմն , ցանկացած $\vec{a}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ տրված կոորդինատային վեկտորների միջոցով՝ $\vec{a}$ = x$\vec{i}$ +y$\vec{j}$, ընդվորում x և y գործակիցները որոշվում են միակ ձևով:

x և y թվերը թվերը կոչվում են $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներ և գրվում է $\vec{a}${x,y }: նկ 5

Զերոյական վեկտորի կոորդինատները հավասար են զրոյի՝ $\vec{0}\{0,0\}$:



Նկ 5

1) երկու վեկտորներ կոչվում են հավասար, եթե հավասար են նրանց համապատասխան կոորդինատները:
2) երկու կամ ավելի մեծ թվով վեկտորների գումարի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին:
3) երկու վեկտորների տարբերության յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների տարբերությանը :
4) Ցանկացած k թվի և $\vec{a}$ վեկտորի արտադրյալի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է՝ այդ վեկտորի համապատասխան կոորդինատների և k թվի արտադրյալին :
5) Դիցուք եթե տված է A(x_1;y_1) և B(x_2;y_2)կետերը, ապա $\overrightarrow{AB} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$:
6) AB հատվածի միջնակետի կոորդինատները հավասար է համապատասխան կոորդինատների կիսագումարին՝ x=$\frac{x_1+x_2}{2}$; y =$\frac{y_1+y_2}{2}$:

Վեկտորների սկալյար արտադրյալ

Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալ կոչվում է նրանց երկարությունների և նրանց կազմած անկյան կոսինուսի արտադրյալը:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալ նշանակվում է այսպես՝ $\vec{a}\cdot\vec{b}$: Ըստ սահմանման՝ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}\text{ և }\vec{b}}\right)$:

- Ոչ զրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի այն և միայն դեպքում , երբ այդ վեկտորներն ուղղահայաց են:
- $\vec{a}\cdot\vec{a}$ սկալյար արտադրյալը կոչվում է **սկալյար քառակուսի** և նշանակվում է $\vec{a}^2$ –ով: $\vec{a}^2$=|$\vec{a}^2$|

- $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ և $\vec{b}\{x_2;y_2\}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալն արտահատվում է $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2$ բանաձով:
- $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ և $\vec{b}\{x_2;y_2\}$ ոչ զրոյական վեկտորներն ուղղահայաց են այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2 = 0$:
- $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ և $\vec{b}\{x_2;y_2\}$ ոչ զրոյական վեկտորների կազմած α անկյան կոսինուսը հաշվվում է $\cos\alpha=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}$ բանաձով:
- Վեկտորների սկալյար արտադրյալն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1. $\vec{a}^2 \geq 0$, ընդ որում $\vec{a}^2=0$, $\vec{a}= \vec{0}$:

2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$(տեղափոխական օրենք)
3. $(\vec{a} + \overrightarrow{b)\cdot\vec{c}} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c})$ (բաշխական օրենք):
4. $(k\vec{a})\,\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (զուգորդական օրենք):

- A$(x_1;y_1)$ և B$(x_2;y_2)$ կետերի հեռավորությունը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձով՝ AB=$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$:
- r շառավղով և C$(x_0;y_0)$ կենտրոնն ունեցող շրջանագծի հավասարումը կլինի $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$:
- r շառավղով և կոորդինատների սկզբնակետին համընկնող շրջանագծի հավասարումը կլինի՝ $x^2+y^2 = r^2$:

Վեկտորներ և վեկտորի կոորդինատները տարածության մեջ

Վեկտորի հասկացությունը և նրա հետ կատարվող գործողությունները տարածության մեջ ներմուծվում են այնպես, ինչպես հարթաչափության մեջ: Ավելացնենք նոր հասկացություններ:

Համահարթ վեկտորներ: Վեկտորները կոչվում են համահարթ, եթե միևնույն կետից տեղադրելուց նրանք գտնվում են մի հարթության մեջ:

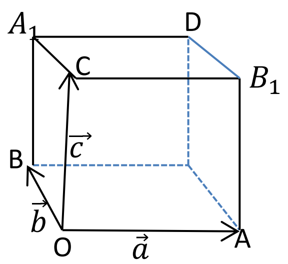
Ցանկացած երկու վեկտորները համահարթ են: Երեք վեկտորներ, որոնց մեջ կան երկու համագիծ վեկտորներ, ևս համահարթ են:

Եթե $\vec{c}$ վեկտորը կարելի է վերածել ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների, այսինքն՝ $\vec{c} = x\vec{a}+y\vec{b}$ տեսքով, որտեղ x-ը և y-ը կամայական թվեր են, ապա ասում ենք ,որ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներ համահարթ են :

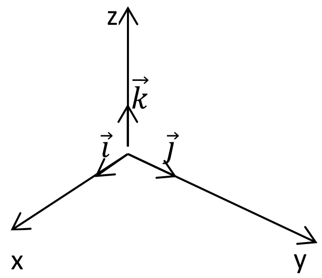
Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը: Եթե $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներ համահարթ են , իսկ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները ոչ համագիծ, ապա $\vec{c}$ վեկտորը կարելի է վերածել ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների՝ $\vec{c}$ = x$\vec{a}$ +y$\vec{b}$ տեսքով, ընդ որում գործակիցները որոշվում են միակ ձևով:

Զուգահեռանիստի կանոնը: Երեք ոչ համահարթ վեկտորները գումարելիս օգտվում ենք

զուգահեռանիստի կանոնից: Դիցուք $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ ոչ համահարթ վեկտորներ են: Տարածության վրա վերցնենք կամայական O կետ և այդ կետից տեղադրենք $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, և $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ վեկտորները և կառուցենք զուգահեռանիստ այնպես, որ OA, OB, OC հատվածները լինեն նրա կողերը (նկ6):



նկ6



նկ7

Ապա զուգահեռանիստի OD անկյունագիծը կպատկերի $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների գումարը՝ $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$:

Վեկտորի վեածումն ըստ երեք՝ ոչ համահարթ վեկտորների: Եթե $\vec{p}$ վեկտորը ներկայացվում է $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ +z $\vec{c}$ տեսքով, որտեղ x, y և z կամայական թվեր են, ապա ասում են, որ $\vec{p}$ վեկտորը վեածված $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների: x, y , z թվերը կոչվում են վեածման գործակիցներ:

Վեկտորի կոորդինատները

Դիցուք՝ տարածության մեջ տրված է կոորդինատային ուղղանկյուն՝ oxyz համակարգը: Դրական կիսառանցքներից յուրաքանչյուրի վրա, կոորդինատների O սկզբնակետից տեղադրենք միավոր վեկտորներ: Նշանակենք $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ միավոր վեկտորները, այնպես, որ $\vec{i}$ վեկտի ուղղությունը համընկնի ox առանցքի ուղղության հետ, իսկ $\vec{j}$ վեկտորի ուղղությունը oy առանցքի ուղղության հետ, $\vec{k}$ վեկտորի ուղղությունը oz առանցքի ուղղության հետ: (նկ7): $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ վեկտորներն անվանում են կոորդինատային վեկտորներ: Կոորդինատային վեկտորները համահարթ չեն , և , ուրեմն , ցանկացած $\vec{a}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ տրված կոորդինատային վեկտորների միջոցով՝ $\vec{a}$ =

$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, ընդվորում x , y , z գործակիցները որոշվում են միակ ձևով: x , y , z թվերը թվերը կոչվում են $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներ և գրվում է $\vec{a}\{x,y,z\}$: Զերոյական վեկտորի կոորդինատները հավասար են զրոյի՝ $\vec{0}\{0,0,0\}$:

1) երկու վեկտորներ կոչվում են հավասար, եթե հավասար են նրանց համապատասխան կոորդինատները:
2) երկու կամ ավելի մեծ թվով վեկտորների գումարի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին:
3) երկու վեկտորների տարբերության յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների տարբերությանը :
4) Ցանկացած k թվի և $\vec{a}$ վեկտորի արտադրյալի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է՝ այդ վեկտորի համապատասխան կոորդինատների և k թվի արտադրյալին :
5) Դիցուք եթե տված է $A(x_1;y_1;z_1)$ և $B(x_2;y_2;z_2)$կետերը, ապա $\overrightarrow{AB}=\{x_1-x_2;y_1-y_2;z_2-z_1\}$:
6) AB հատվածի միջնակետի կոորդինատները հավասար է համապատասխան կոորդինատների կիսագումարին՝ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$; $z=\frac{z_1+z_2}{2}$:
7) $A(x_1;y_1;z_1)$) և $B(x_2;y_2;z_2)$ կետերի հեռավորությունը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
8) $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ և $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալն արտահատվում է $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$ բանաձով:
9) $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ և $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ ոչ զրոյական վեկտորներն ուղղահայաց են այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$:
10) $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ և $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ ոչ զրոյական վեկտորների կազմած α անկյան կոսինուսը հաշվվում է $\cos\alpha=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ բանաձով:
11) R շառավղով և $C(x_0;y_0;z_0)$ կենտրոնն ունեցող գնդի հավասարումը կլինի $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$:
12) R շառավղով և կոորդինատների սկզբնակետին համընկնող շրջանագծի հավասարումը կլինի՝ $x^2+y^2+z^2=R^2$:

Խնդիրների լուծում

Օրինակ 1: Հետևյալ վեկտորական հավասարություններին տալ երկրաչափական մեկնաբանություն.

ա)$(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2\vec{a}^2+2\vec{b}^2$,որտեղ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ -ն ոչ համագիծ վեկտորներ են,

բ) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2+(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{b}+\vec{c})^2-\vec{a}^2-\vec{b}^2-\vec{c}^2$,որտեղ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներ համարթ չեն:

Լուծում: Դիտարկենք կամայական ABCD զուգահեռագիծ. նշանակենք՝ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$: Քանի որ $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, իսկ $\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}$, ուստի տրված հավասարությանը կարելի է տալ այսպիսի երկրաչափական մեկնաբանություն՝ զուգահեռագծի անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարին:

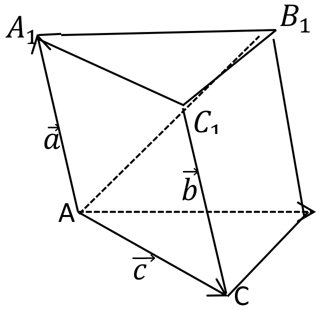
բ) $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ վեկտորների վրա կառուցենք ABCD$A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Այս դեպքում տրված հավասարությանը կարելի է տալ այսպիսի մեկնաբանություն՝ զուգահեռանիստի որևէ գագաթից ելնող անկյունագծի քառակուսին հավասար է այդ գագաթից ելնող նիստերի անկյունագծերի քառակուսիների գումարին՝ առանց այդ գագաթից ելնող կողերի քառակուսիների գումարի: Իրոք, քանի որ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AC_1}$, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AA_1}$, $\vec{a}+\vec{c}=\overrightarrow{AD_1}$, $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AC_1}$ հետևաբար տրված հավասարությունը կարելի է ներկայացնել այսպես՝ $AC_1{}^2=AA_1{}^2+AD_1{}^2+AC^2-AA_1{}^2-AB^2-AD^2$, որն էլ տվյալ պնդման մաթեմատիկական գրառումն է:

Օրինակ 2: ABC$A_1B_1C_1$-ը եռանկյուն պրիզմա է: Հնարավո՞ր է, որ այդ պրիզմայի կողմնային նիստերի AB_1, BC_1 և CA_1 անկյունագծերը զուգահեռ լինեն միևնույն հարթությանը:

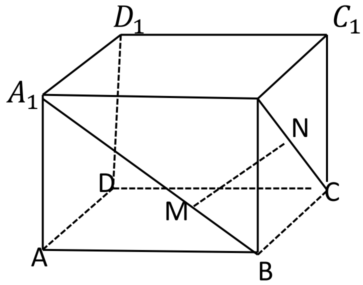
Լուծում: Ընտրենք բազիսային վեկտորները՝ $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$:

Այս դեպքում՝ $\overrightarrow{AB_1}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{BC_1}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CA_1}=\vec{a}-\vec{c}$:

Եթե AB_1, BC_1 և CA_1 անկյունագծերը (նկ8) զուգահեռ լինեն որևէ հարթությանը, ապա AB_1, BC_1 և CA_1 վեկտորները կլինեն կոմպլանար (համահարթ): Ցույց տանք, որ դա հնարավոր չէ: Եթե նրանք լինեն համահարթ, ապա գոյություն կունենային այնպիսի x և y թվեր , որոնց համար տեղի կունենար $AB_1=\mathrm{x}\overrightarrow{BC_1}+\mathrm{y}\overrightarrow{CA_1}$, այսինքն՝ $\vec{a}+\vec{b}=\mathrm{x}(\overrightarrow{a}+\vec{c}-\vec{b})+\mathrm{y}(\overrightarrow{a-\vec{c}})$ հավասարությունը: Հաշվի առնելով այն փաստը, որ բազիսային վեկտորների միջոցով վերլուծումը միակն է, կունենանք՝ x+y= 1, x= −1, x-y= 0, որոնք անհամատեղելի են:



Նկ 8



Նկ 9

Օրինակ 3: Կառուցել խորանարդի երկու կից նիստերի խաչվող անկյունագծերի ընդհանուր ուղղահայացը: Գտնել այդ անկյունագծերի հեռավորությունը, եթե խորանարդի կողի երկարությունը հավասար է 1-ի:

Լուծում: Դիտարկենք ABCD$A_1B_1C_1D_1$ խորանարդը (նկ9): Դիցուք , պահանջվում է կառուցել BA_1 և CB_1 խաչվող ուղիղների ընդհանու MN ուղղահայացը: Նշանակենք՝ $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$: Ենթադրենք՝ $\overrightarrow{BM} = \mathrm{x}\overrightarrow{BA_1}$ $\overrightarrow{CN} = \mathrm{y}\overrightarrow{CB_1}$:

$\overrightarrow{BM}$ և $\overrightarrow{CN}$ վեկտորները վերածենք ըստ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ բազիսային վեկտորների: Քանի որ

$\vec{a}+\vec{c} = \overrightarrow{BA_1}$,$\vec{c} - \vec{b} = \overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{BM} = \mathrm{x}(\vec{a}+\vec{c})$, $\overrightarrow{CN} = \mathrm{y}(\vec{c} - \vec{b})$, հետևաբար

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN} = -\mathrm{x}\vec{a} + (1-\mathrm{y})\,\vec{b} + (y-x)\vec{c}$:

Քանի որ $\overrightarrow{MN}$ և $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{MN}$ և $\overrightarrow{CB_1}$ զույգերից յուրաքանչյուրը փոխուղղահայաց ուղիղներ են, ուստի $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0$, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0$: (1)

Քանի որ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները զույգ առ զույգ ուղղահայաց են, ուստի $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = 0$: Մյուս կողմից $\vec{a}^2$=$\vec{b}^2$=$\vec{c}^2 = 1$:

Այս նկատարումներով (1) հավասարություններիմեջ տեղադրելով համապատասխան արժեքները և կատարելով գործողություններ,կստանանք՝

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

Հետևաբար, M և N կետերը BA_1և CB_1 անկյունագծերը բաժանվում են 1:2 հարաբերությամբ՝ սկսած B և B_1 կետերից, որից էլ հետևում է MN-ի կառուցումը: Մյուս կողմից, ստացել ենք՝ $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$: Դժվար չէ համոզվել , որ MN = $\frac{\sqrt{3}}{3}$:

Օրինակ 4: Տրված են քառակուսու A(-2;3) , B(3;8), C (8;3) գագաթները:

ա)Գտեք քառակուսու BD անկյունագծի երկարությունը:

բ) Գտեք քառակուսու անկյունագծերի հատման կետի աբցիսը:

գ) Գտեք քառակուսու մակերեսը:

դ) Գտեք քառակուսու A և B գագաթներով անցնող ուղղի անկյունային գործակիցը:

Լուծում: ա) Քանի որ քառակուսու անկյունագծերը հավասար են, ապա

BD=AC= $\sqrt{\left(8-(-2)\right)^2+(3-3)^2}$ =10:

բ) Այդ կետը AC անկյունագծի միջնակետն է: Ուրեմն, x=$\frac{-2+8}{2}$ $= 3$:

գ) Քանի որ քառակուսու անկյունագծերը փոխուղղահայաց են և դրանց երկարությունները 10 են, ապա S=$\frac{1}{2}$ $d^2 = \frac{1}{2}$ 10^2=50:

դ) Եթե այդ ուղղը y=kx=b ուղիղն է, ապա $y_2 = kx_2 + b, y_1 = kx_1 + b$: Հետևաբար, $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{8-3}{3-(-2)} = 1$:

Օրինակ 5: $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են և նրանց երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են 3;6 և4:

ա) Գտնել $\vec{c}$ և $\vec{a}$ վեկտորներ տարբերության երկարույունը:

բ) Գտնել $\vec{c}$ -$\vec{a}$ և $\vec{c}$ +$\vec{a}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:

գ) Գտնել $\vec{a}$ և $\vec{c}$ +$\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյան աստիճանային չափը:

Լուծում: ա) $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$ բանաձևից: $|\vec{c}-\vec{a}|^2$ =$(\vec{c}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a}) = |\vec{c}|^2$-2 $\vec{c}\vec{a}$ +$|\vec{a}|^2 = 25$: Քանի որ $\vec{c}$ և $\vec{a}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են $\vec{c}\vec{a} = 0$:

բ)$(\vec{c}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a}) = |\vec{c}|^2$-$|\vec{a}|^2 = 4^2 - 3^2 = 7$:

գ) $\vec{a}\cdot(\vec{c}$ +$\vec{b}$)= $\vec{a}$ $\vec{c}$ +$\vec{a}\vec{b}$ $= 0$ Քանի որ վեկտորները զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են

Եզրակացություն

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացի էական առանձնահատկություններից մեկն այն է, որ ուսուցման ընթացքում թեորեմներն ապացուցելիս և խնդիրներ լուծելիս իր ուրույն տեղն ունի «Վեկտոր» հասկացությունն իր կիրառություններով: Վեկտորների մեթոդին տիրապետելու համար բավարար չէ միայն տեսական փաստերի իմացությունը:

Հաճախ նպատակահարմար է դիտարկել միավոր վեկտորներ. հատկապես այն դեպքերում, երբ հարկ է լինում հաստատել ուղիղների ուղղահայացությունը, անկյունների հավասարությունը, բացահայտել պատկերներում առաջացած անկյունների միջև եղած առնչությունները և այլն:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում «Վեկտորներ» թեման ուսումնասիրվում է երկրաչափության մեջ (և՝ հարթաչափության, և՝ տարածաչափության մեջ): Առաջադրված խնդիրների տեքստերը, որոնք վերաբերվում են այդ թեմային, որպես կանոն, պարունակում են վեկտորներ: Այդ խնդիրները, ըստ էության, նպատակաուղղված են «վեկտոր» հասկացության հետ կապված սահմանումների, գործողությունների և կանոնների յուրացմանը: Վեկտորների ուսուցումը կդառնա ինքնանպատակ, եթե այդ հասկացության հետ կապված առնչությունները սահմանափակվեն միայն այդպիսի խնդիրներով: Ինչ խոսք, նման խնդիրներն անհրաժեշտ են, որպեսզի սովորողները կարողանան ազատ գործողություններ կատարել վեկտորների հետ: Սակայն, սահմանափակվել միայն այդ խնդիրներով, սովորողները հնարավորություն չեն ունենա հասկանալու այդ թեմայի ներմուծման անհրաժեշտությունը, ինչպես նաև նրա դերն ու նշանակությունը երկրաչափության մեջ: Վեկտորների կարևորությունն ու օգտակարությունը ի հայտ են գալիս այն ժամանակ, երբ նրանք կիրառվում են այնպիսի երկրաչափական խնդիրներում, որոնց պայմաններում վեկտորներ հանդես չեն գալիս:

Հոսքային դասարաններում երկրաչափության դասընթացում կարելի է ընդգրկել բազմաթիվ խնդիրներ, որոնք ավելի հաջողությամբ են լուծվում վեկտորների կիրառմամբ և որի շնորհիվ լուծումը դառնում ավելի արդյունավետ և հետաքրքիր:

Երկրաչափական խնդիրների լուծման վեկտորական մեթոդը կարևոր մեթոդներից մեկն է դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացում: Փորձը ցույց է տալիս, որ այդ մեթոդը դժվարամատչելի է սովորողներից շատերի համար: Վեկտորական մեթոդի դժվարություններից մեկն այն է, որ սովորողները ոչ բավարար չափով են տիրապետում այն կիրառելու կարողություններին և հմտություններին:

Վեկտորների կիրառմամբ խնդիրներ լուծելու կարողությունը պահանջում է որոշակի հմտություններ: Վեկտորների մեթոդը, ինչպես և ցանկացած այլ մեթոդ, միշտ չէ, որ կիրառելի է տվյալ խնդիրը լուծելիս: Խնդիրների լուծման հարուստ փորձով միայն կարելի է նախապես կռահել, թե տվյալ խնդրի լուծման համար վեկտորների մեթոդը կիրառելի է, թե` ոչ:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1. https://escs.am ՀՀ ԿԳՄՍՆ « Մաթեմատիկա առարկայի չափորոշիչ և օրինակելի ծրագրեր»
2. Կորյուն Առաքելյան «Երկրաչափության խնդրագիրք (7-12)»
3. Մաթեմատիկան դպրոցում, (գիտամեթոդական ամսագիր) թիվ 4(91) , 2013
4. Գ. Վ. Աղեկյան «Մաթեմատիկայի շտեմարան, Երկրաչափություն » 2021
5. Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ. Կադոմցև, Է. Հ. Պոզնյակ, Ի. Ի. Յուդինա՝ [Երկրաչափություն 9] 2005
6. Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ. Կադոմցև, Է. Գ. Պոզնյակ՝ [Երկրաչափություն 9, 10] 2001