ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՂ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅՈՒՆ՝

ՇԻՐԱԿԻ ՄԱՐԶԻ ՄԻՔԱՅԵԼ ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՆ՝

ՀԱԿԱՍՈՂ ԵՆԹԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ

Հետազոտող ուսուցիչ՝ Կիմա Սարգսյան

Շիրակի մարզի Հովիտի միջնականգ դպրոց

Ղեկավար՝ Ալվարդ Սարուխանյան

ԳՅՈՒՄՐԻ 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Նախաբան

Գերմանացի մաթեմատիկոս Կառլ Գուսը մաթեմատիկան անվանել է "Գիտությունների թագուհի":

Մաթեմատիկայով զբաղվածներից շատերի համար մաթեմատիկան որոշակի գեղագիտական գրավչություն ունի: Շատ մաթեմատիկոսներ խոսում են մաթեմատիկայի էլեգանտության, ներքին էսթետիկայի և ներքին գեղեցկության մասին:

Ժամանակակից կրթական հայեցակարգերում ավելի է կարևորվում սովորողների բարձրակարգ մտածողության զարգացման խնդիրը: Աշխարհում տեղի ունեցող արագընթաց զարգացումները իրենց անմիջական ներգործությունն են ունենում կրթական համակարգերի վրա՝ առաջադրելով գիտելիքահեն տնտեսության և տեղեկատվական հասարակության պայմաններում գործող և ապրող մարդու ձևավորման նոր պահանջ: Եվ դա իր հերթին առաջ է բերում կրթության բովանդակության վերանայման ու արդիականացման խնդիր: Հանրահայտ է, որ հանրակրթության առանցքային նպատակներից մեկը աշակերտին մտածել սովորեցնելն է: Առանձնացվում են այդ նպատակին հասնելու երկու հիմնական ուղիներ. մտածողության մասին գիտության՝ տրամաբանության տարրերի իմացությունը և մաթեմատիկայի ուսումնասիրությունը, ինչը բոլոր ժամանակներում դիտվել է որպես սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման լավագույն միջոց:

Հայտնի է, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի դաստիարակչական նպատակներից հիմնականը սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումն է, որին հասնելու հնարավորությունների հարցում մաթեմատիկան շահեկանորեն տարբերվում է մնացած բոլոր հանրակրթական առարկաներից:

Միջնականգ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացի հայաստանյան և արտասահմանյան բազմաթիվ երկրների տարբեր տարիների պետական ծրագրերի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ նրանցում միշտ էլ այս կամ այն չափով կարևորվել և ընդգծվել է սովորողների տրամաբանական մտածողության և նրա կարևորագույն բաղադրիչի՝ ապացուցելու ունակության ձևավորման անհրաժեշտությունը: Այդ ծրագրերին համապատասխան՝ մաթեմատիկայի դասընթացը այս կամ այն հաջողությամբ մշտապես փորձել են լուծել այդ կարևորագույն հիմնահարցը, որը մաթեմատիկայի դասընթացի կարևորագույն նպատակի՝ մտածել սովորեցնելու հենկային բաղադրիչներից մեկն է:

Սակայն իրականում այդ հիմնախնդրի լուծման հիմնական ծանրությունը մինչև վերջին տարիները արհեստականորեն վերագրվել էր 8-12-րդ (նախկինում 6-10-րդ) դասարանների երկրաչափփության դասընթացին: Դեռ ավելին, եթե ավանդաբար երկրաչափության դասընթացի հիմնական նպատակը սովորողների տարածական պատկերացումների ու տրամաբանական մտածոցության ձևավորումն է, ապա երկրաչափության որոշ մանկավարժ գիտնականներ (ինչպես, օրինակ՝ Ա. Վ. Պոգորելովը) կարծում են, երկրաչափության դասընթացի առաքելությունը լոկ սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորումն է:

ՀՀ-ում անցում կատարելով տասներկուամյա կրթական համակարգի՝ դպրոցական դասընթացի տարբեր առարկաների ծրագրերում կատարվեցին փոփոխություններ, այն է՝ ավելացան նոր բաժիններ կամ էլ եղած բաժիններում մատուցվող նյութը դարձավ առավել ընդգրկուն: Ավագ դպրոցի նոր դասագրքերի շնորհիվ որոշակիորեն բարելավվեց նաև ″Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր ″ առարկայի ապացուցողական կառույցը, որում արդեն ներդրված հստակ տրամաբանական ապացուցողական ապարատի շնորհիվ ՝ ″կշեռքի նժարը ″ երկրաչության դասընթացից տեղափոխվեց նաև հանրահաշվի դասընթաց:

Մասնավորապես 11-րդ դասարանի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում Տրամաբանության տարրեր գլխում ավելացավ նոր հարագիր (պարագրաֆ) ՝ Ապացուցում և հերքում: Ապացուցման և հերքման հիմնական մեթոդները: Սույն հարագրում, ի թիվս ապացուցման այլ մեթոդների, հակիրճ կերպով խոսվում է նաև մի քանի տիպային խնդիրներ՝ այս մեթոդին վերաբերվող:

Կարծում ենք՝ դասագրքում նյութի առկա ծավալը հնարավորություն չի ընձեռում աշակերտներին հավուր պատշաճի ընկալելու հակասող ենթադրության մեթոդի էությունն ու կիրառելության սահմանները: Մինչդեռ հայտնի է, թե որքան լայն կիրառություն ունեն այս մեթոդը և իր "տարատեսակները" (Դիրիխլեի սկզբունք, ինվարիանտի կիրառման մեթոդ, ներկման մեթոդ, եզրային կանոն, անվերջ և/կամ վերջավոր վայրէջքի մեթոդ և այլն) մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, մասնավորաբար օլիմպիադաներում հանդիպող ապացուցման վերաբերյալ շատ խնդիրների լուծման հիմքում ընկած է հենց այս մեթոդի կիրառումը:

Ըստ այդմ, սույն աշխատանքն վիրված է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հակասող ենթադրության մեթոդի և վերջինիս երկու տարատեսակների (ներկումը և եզրայինի կանոնը), հնարավոր արդյունավետ կիրառությունների վերհանմանը: Ստորև նախապես հակիրճ կներկայացնենք հակասող երթադրության մեթոդի և նրա վերը թվարկած տարատեսակների էությունը, որից հետո աստիճանական բարդացման սկզբունքով կազմված ընտրովի խնդիրների միջոցով վեր կհանենք ներկման և եզրայինի կանոնի հնարավոր արդյունավետ կիրառությունները մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում:

§ 1. Տրամաբանության, մտածողության, ապացուցման պատմական և ժամանակակից փորձը

Տրամաբանությունը որպես գիտություն սկզբնավորվել է Հին Հունաստանում, ավելի քան երկու հազար տարի առաջ փիլիսոփայության ընդերքում, որտեղ տրամաբանությանը հատկացվող յուրահատուկ տեղը պայմանավորված էր հիմնականում այն հանգամանքով, որ այն կապված էր բանավիճելու արվեստի հետ, որը հին հունական քաղաք-պետություններում, իսկ հետագայում նաև Հին Հռոմում հասարակական կյանքի կազմակերպման առանձնահատկությունն էր: Այստեղ ստեղծվում էին դպրոցներ, որոնցում մարդիկ սովորում էին ճշմարիտը փնտրելու, բանավիճելու և դիմացինին իր տեսակետի մեջ համոզելու արվեստը: Նրանք սովորում էին բազմաթիվ փաստերից ընտրել ճշմարիտները, կառուցել դրանք իրար հետ կապող դատողությունների տրամաբանական շղթա, հանգել ճշմարիտ դատողությունների: Սկզբում ճշմարիտ մտածողության օրենքներն ու ձևերը սովորում էին հռետորական արվեստի շրջանակներում, որը համարվում էր մարդկանց մտածողության, համոզմունքների ներգործության միջոցներից մեկը: Այդ ժամանակներից էլ ընդունված է, որ տրամաբանությունը գիտություն է ոչ միայն մտածողության, այլև օբյեկտիվ իրականության առարկաների մասին: Այդպես էր նաև Հին Հնդկաստանում, Հին Հռոմում և այլ երկրներում: Հին Հունաստանում ապացուցման տրամաբանական ձևը՝ դեդուկտիվ մտահանգումների շղթայի տեսքով մենք հանդիպում ենք Էլեաթների դպրոցում (Պարմենիդեսի և Զենոնի մոտ): Այդ դպրոցի հիմնադիրն է համարվում Քսենոփանեսը:

Ապացուցման հիմնախնդիրը վերաբերում է ճանաչողության հիմնական՝ «ինչու՞» հարցադրմանը: Այս հարցադրումը հավանաբար ծագել է մարդկության պատմության վաղնջնական շրջաններից, բայց իր բուռն զարգացումն է ստացել միայն անտիկ Հունաստանում, հասարակական կյանքի կազմակերպման յուրահատուկ պայմաններում: Հունական պոլիսների կառավարման ժողովրդավարական ձևը ենթադրում էր առաջադրվող հարցերի հրապարակային քննարկում, որտեղ բանախոսին անհրաժեշտ էր մարդկանց համոզել, ցույց տալ իր տեսակետի ճշմարտացիությունը: Ճարտասանությունը համարվում էր կարևոր առաքինություն, այն հունական կրթության կարևոր բաղադրիչ էր՝ կրթությունը կազմող յոթ ազատ արվեստներից մեկը: Եվ, բնականաբար, հարցադրման պատասխանի, համոզիչ խոսքի հիմնական արժանիքներից մեկը, թերևս՝ գլխավորը, դրա փաստարկվածությունն էր, հիմնավորվածությունը, ապացուցելիությունը: Նման խոսքի կառուցման առաջին գիտական օրինակները տվեց մաթեմատիկան, որին էլ հաջորդեց Արիստոտելի կողմից տրամաբանության ստեղծումը, որը փաստորեն նաև գիտություն էր ապացուցման մասին: Անշուշտ, տարբեր գիտություններ, իրականացնելով ճանաչողության իրենց գործառույթները, օգտվում էին

ապացուցման իրենց զինանոցից, բայց բոլորի համար տրամաբանությունը տալիս էր ապացուցման համընդհանուր կաղապարներ, որոնց պետք է ենթարկվեին մնացած գիտություններում (և ոչ միայն գիտություններում) առաջդրվող ապացուցումները:
Նախ հստակեցնենք, թե ինչ է ապացուցումը: Ապացուցումը տրամաբանական գործողություն է, որի միջոցով ցույց է տրվում որևէ դատողության ճշմարիտ լինելը՝ այն բխեցնելով ուրիշ այնպիսի դատողություններից, որոնց ճշմարտությունն արդեն ընդունված է (ապացուցված է, հայտնի է, տրված է, գիտենք) : Ապացուցումը կազմված է երեք մասից՝ ապացուցման թեզիս, ապացուցման հիմքեր, ապացուցման եղանակ:
1. Ապացուցման թեզիսը այն դատողությունն է, որի ճշմարտությունը ցույց է տրվում տվյալ ապացուցման մեջ:
2. Ապացուցման հիմքերը (փաստարկները, ապացույցները) այն դատողություններն են, որոնց ճշմարիտ լինելն արդեն ընդունված է և որոնց կապակցությունից բխեցվում է (արտածվում է) ապացուցվող թեզիսը:
3. Ապացուցման եղանակը, որը կոչվում է նաև փաստարկում կամ դեմոնստրացիա, բուն բխեցումն է, որը կատարվում է մտահանգման կամ մի քանի մտահանգումների կապակցված շարքի միջոցով:
Ապացուցման թեզիսը դրանց վերջնական եզրակացությունն է դառնում:
Ապացուցումը լինում է երկու տեսակի՝ ուղղակի և անուղղակի: Ուղղակի կոչվում է այն ապացուցումը, որի մեջ թեզիսի ճշմարիտ լինելը ցույց տալու համար այն բխեցվում է փաստարկներից անմիջականորեն: Բայց երբեմն դժվար է գտնել փաստարկներ, որոնցից թեզիսը բխեր անմիջականորեն, և այդ դեպքում դիմում են անուղղակի ապացուցմանը: Անուղղակի ապացուցման դեպքում օգտագործվում են թեզիսի նկատմամբ այլընտրական դրույթ կամ դրույթներ, որոնց կեղծ լինելը ցույց տալու միջոցով բխեցվում է թեզիսի ճշմարիտ լինելը: Անուղղակի ապացուցման մի տեսակը, որ կոչվում է հակառակից կամ հանգեցում անհեթեթության, դպրոցական դասընթացներում հայտնի է հակասող ենթադրության մեթոդով ապացուցում անվանումով: Իսկ ի՞նչ հասկանալ ապացուցման ուսուցման տակ: Հարցն այն է, թե ինչպե՞ս ենք մենք ապացուցում, ինչպե՞ս է ապացուցվող թեզիսը ստացվում տրված տեսության արդեն հայտնի ճշմարիտ պնդումներից, ուսուցման պրակտիկայում մնում է ոչ լիարժեք պարզաբանված: Հաճախ է հանդիպում պատասխան՝ «ակնհայտ

է», որը ոչինչ չի պարզաբանում: Պարզվում է, որ մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդիկայի տարբեր շրջաններում ապացուցման ուսուցմանը վերագրվել են տարբեր իմաստներ: Մոտավորապես 20-րդ դարի 60-ական թվականներին այն նույնացվում էր պատրաստի ապացույցների ուսուցման հետ: Քանի որ սովորողները չէին տիրապետում արտածման կանոններին, ապա ապացուցման ուսուցման տակ կարելի էր հասկանալ միայն մաթեմատիկայի դասագրքերում տեղադրված ապացուցումները անգիր սովորելը և վերարտադրելը: Այդ միտքը շատ վառ արտահայտված էր այդ ժամանակների աշխատանքներում : Զ. Ի. Սլեպկանը նշում էր. «Ապացույցի ուսուցման տակ անհրաժեշտ է հասկանալ սովորողներին պատրաստի ապացույցների ուսուցումը, որը առաջարկվում է ուսուցչի կամ դասագրքի կողմից, և ապացուցման ինքնուրույն որոնման ուսուցումը» : Պատրաստի ապացույցները, ընդգծում է Զ. Ի. Սլեպկանը, պետք է որպես մոդել հանդես գան, որոնց վրա աշակերտները սովորում են մտավոր գործունեության այնպիսի գործողություններ, որոնք ընկած են ապացուցելու կարողությունների հիմքում (ապացույցների տարբեր մեթոդների կիրառումը, ապացուցման ինքնուրույն փնտրտուք և այլն) : Սակայն այս մտքերը պրակտիկայում չիրականացվեցին: Զարմանալի է, որ շատ տարիներ մնում էր և, հավանաբար, կմնա աննկատ Ի. Լակատոսի «Ապացուցում և հերքում» գիրքը, որում արտահայտվում են կարևոր դրույթներ ապացուցման ուսուցման վերաբերյալ : Մասնավորապես, հեղինակը առանձնացնում էր ապացուցման տիրապետման հետևյալ մակարդակները.

1. պատրաստի ապացույցների հասկացում և վերարտադրություն,
2. պատրաստի ապացույցների ինքնուրույն վերլուծություն,
3. ապացույցների ինքնուրույն իրականացում,
4. առաջարկված թվացյալ ապացույցների հերքումը:

Հին հույն մաթեմատիկոսները հաճախ որպես մաթեմատիկական ապացույցի մեթոդ օգտագործել են մտավոր փորձը, որը ներառել է հիպոթեզի առաջքաշումն ու հետևանքների դեդուկցիայի միջոցով դրանից եզրակացություններ անելը՝ նպատակ ունենալով ստուգել սկզբնական ենթադրությունների ճշմարտությունը: Այսօր այդպիսի դատողությունները կոչվում են հակառակից ապացույցի մեթոդ: Պլատոնը հիպոթեզները համարել է իր կողմից մշակված ապացույցի վերլուծական սինթետիկ մեթոդի նախադրյալ, որը ունակ է ապահովել եզրակացության բացարձակ ճշմարիտ բնույթը: Այնուամենայնիվ, հիպոթեզը՝ որպես հետազոտական մեթոդ, մերժվել է Արիստոտելի կողմից, որը, որպես որպես սիլլոգիստական ապացույցի հիմք ընդունել է միայն ընդհանուր, անհրաժեշտ և բացարձակ ճշմարտությունները: Սա հանգեցրել է գիտնականների հետագա բացասական վերաբերմունքին հիպոթեզների նկատամբ՝ որպես կեղծ կամ հավանական գիտելիքների ձև[1]: Հիպոթեզների և բացարձակ ճշգրիտ գիտելիքների հակադրությունը և որպես հետևանք հիպոթեզների անտեսումը հաղթահարվել է միայն 19-րդ դարում: Մասնավորապես, Էնգելսը, հիպոթեզը դիտարկելով որպես «բնագիտության զարգացման» ձև, առաջ է քաշել դրույթ հիպոթեզներին օրենքների ու տեսությունների՝ որպես հարաբերականորեն իրական գիտելիքի տարբեր ձևերի փոխադարձ կապի մասին:

§ 2. Հակասող ենթադրության մեթոդի բնույթը

Եթե ձեր անունը "կով է", ուրեմն դուք պետ է ունենաք կաթ և կուրծք:
Իսկ եթե դու առանց կաթի և առանց կրծքի ես, ուրեմն սատանան քո կովի անունով է:
Մայակովսկի

Մեթոդ բառը ունի հունական ծագում և թարգմանաբար նշանակում է նպատակին հասնելու միջոց, ճանապարհ, եղանակ, և ուղի: Այն տրամաբանական տեղեկատուներում սահմանվում է , որպես բնության, հասարակության, մտածողության երևույթների ու օրինաչափությունների ուսումնասիրությանն ուղղված կանոնների ու հնարքների համակարգ:

Առհասարակ, ապացուցման մեթոդները, ըստ գործադրման եղանակի, դասակարգում են ուղիղ և (անուղղակի ոչ ուղիղ) տեսակների: Ապացույցը, որը հիմնված է ինչ-որ անտարակուսելի սկզբի վրա, որից անմիջականորեն արտածվում է դրույթի ճշմարիտ լինելը, կոչվում է ուղիղ ապացույց: Ապացույցը կոչվում է անուղղակի (ոչ ուղիղ), եթե դրույթի ճշմարիտ լինելը հիմնավորվում է դրույթին հակադիր պնդման ճշմարտացիության հերքման միջոցով: Անուղղակի ապացուցման ամենատարածված տեսակը հակասող ենթադրության մեթոդն է, որը հաճախ գիտամեթոդական գրականության մեջ անվանվում է հակասող ենթադրության մեթոդ, ապագոգիկ անուղղակի ապացուցում, կամ ապացուցում՝ անհեթեթության հանգեցմամբ: Սա ոչ ուղիղ կամ ասես մի կողմ ուղղված ապացուցում է, որևէ պնդման ճշմարիտ լինելը ուղիղ և դրականորեն հաստատող փաստերի փոխարեն ժամանակավորապես ընդունում է հակադիր պնդման ճշմարտությունը, ենթադրում ենք, որ ապացուցման ենթակա պնդումը սխալ է, այսինքն՝ տրված պնդումը ճշմարիտ չէ, որի արդյունքում մենք հանգում ենք հակասության: Դրա հիման վրա արվում է հետևություն, որ հակադիր պնդումը կեղծ է, և, հետևաբար ճշմարիտ է ապացուցվելիք պնդումը: Այս մեթոդի համաձայն ըստ էության, A պնդման ճշմարտացիությունն ապացուցելու փոխարեն ապացուցում ենք, որ նրա ժխտումը սխալ է, ինչը, երրորդի բացառման օրենքի համաձայն, համարժեք է A-ի ճշմարիտ լինելուն:

Այսպիսով՝ հակասության մեթոդըն ապացուցման այնպիսի եղանակ է, երբ ուղիղ ճանապարհով պայմանից պահանջ գնալու փոխարեն ենթադրվում է պահանջի հակադիր պնդման "ժխտման" ճշմարիտ լինելը, այստեղից այնուհետև արտածվում է հակասություն, որի հիման վրա հայտարարվում է, թե ճշմարիտ է ապացուցվելիք պնդումը:

Հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառման դիպուկ օրինակ կարելի է ծառայել հետևյալը.

Մաթեմատիկոսը ցանկանում է լողանալ, մտնում է լողասենյակ և բացում ծորակը: Ծորկից սառը ջուր է գալիս, բայց շատ է ցանկանում լողանալ: Մտածում է և ասում.

- Կատարենք հակասող ենթադրություն, ենթադրենք ջուրը տաք է:

Լողանում և դուրս է գալիս, բայց հաջորդ օրջ ջերմություն է ունենում, հիվանդանում;

- Եկանք հակասության, ուրեմն ջուրը սառն էր, եզրակացնում է մաթեմատիկոսը:

Ինչպես հայտնի է, ուղիղ ապացույցը հենված է մի ենթադրության վրա, ըստ որի՛ պնդման պայմանը պարունակում է բավարար տեղեկություններ՛ եզրզկացությանը հանգեցնող և տրամաբանորեն իրար հետ կապված քայլերի վերջավոր շղթա "հաջորդականություն" կառուցելու համար: Սակայն առանձին պնդումներն ապացուցելիս հաճախ մեզ չի հաջողվում գտնել ուղիղ ճանապարհով պնդման պայմանից դեպի եզրակացությունը ընթացող դատողություններիշղթան: Նման բան կարող է լինել ոչ թե այն պատճառով, որ մենք պարզապես անկարող ենք դա կատարել, այլ այն պատճառով, որ մարդկությանը պնդման A պայմանից դեպի B եզրակացությունը գնացող ուղիղ ճանապարհ դեռևս հայտնի չէ, կամ էլ պարզապես հնարավոր չէ գտնել:

Օրինակ 1: Դիցուք, պահանջվում է ապացուցել, որ եթե x-ը ռացիոնալ թիվ է, իսկ y-ը ՝ իռացիոնալ, ապա նրանց x +y գումարը իռացիոնալ թիվ է:

Առանձնացնելով պայմանը կամ ենթադրությունը և եզրակացությունը՝ կստանանք՝

A. Տրված են x ռացիոնալ և y իռացիոնալ թվերը /ոչ բացահայտ տեղեկություն/:

B. x +y գումարը իռացիոնալ թիվ է:

Եթե այժմ մենք ցանկանում ենք ուղիղ ճանապարհով ստուգել այս պնդումը, ապա մենք, օրինակ, ստիպված պետք է դիտարկենք ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի բոլոր հնարավոր գումարները, ինչը հնարավոր չէ: Գոյություն ու՞նի արդյոք ավելի կարճ ճանապարհ: Իռացիոնա՞լ է արդյոք x +y գումարը:

Ապացույց: Ենթադրենք B եզրակացությունը ճշմարիտ չէ, այսինքն՝ ճշմարիտ է նրա ոչ B ժխտումը: Այսպիսով՝ մենք ենթադրում ենք, որ x +y թիվը իռացիոնալ չէ: Սակայն իրական թիվը կարող է լինել կա՛մ ռացիոնալ, կա՛մ իռացիոնալ: Հետևաբար x +y թիվը ռացիոնալ է: Ուստի, համաձայն ռացիոնալ թվի սահմանումներից մեկի՝ $x + y = m/n$, որտեղ $n \in N$, $m \in Q$:

Քանի որ, ըստ ենթադրության, x-ը նույնպես ռացիոնալ է, ուստի՝ $x = a/b$, որտեղ $b \neq 0$: Լուծելով a, b, m, n պարամետրերով կստանանք՝ $a/b + y = m/n$ հավասարումը: Լուծելով y-ի նկատմամբ կստանանք $y = (bm - an)/bn$, որտեղ $b \neq 0$, քանի որ $b \neq 0$ և $n \neq 0$: Իսկ քանի որ $(bm - an)$ և bn թվերը ամբողջ թվեր են, ուստի y-ը նույնպես ռացիոնալ թիվ է: Այսինքն՝ ճշմարիտ է ոչ A պնդումը: Այսպիսով՝ մենք ապացուցեցինք, որ ճշմարիտ է ոչ B- ից բխում է ոչ A պնդումը, որն էլ, ինչպես նշել ենք, համարժեք է A –ից հետևում է B պնդումը: Ապացույցն ավարտված է:

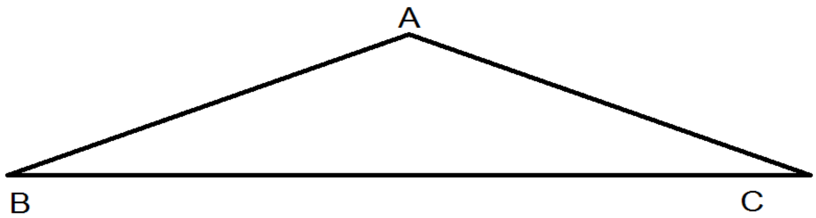
Օրինակ 2: Ապացուցել, որ $\sqrt{3}$ թիվը իռացիոնալ թիվ է:

Ապացույցը տանենք հակասող ենթադրությամբ, այսինքն ընդունենք որ 3 թիվը ռացիոնալ թիվ է: Այդ դեպքում $\sqrt{3}$ թիվը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$\sqrt{3} = m/n$, որտեղ m/n կոտորակը անկրճատելի կոտորակ է : Բարձրացնենք վերջին հավասարման երկու մասը քառակուսի աստիճանի, կստանանք $3n^2 = m^2$, որտեղից կհետևի, որ m-ը 3-ի բազմապատիկ թիվ է, այսինքն m=3k, տեղադրելով արտահայտության մեջ, կստանանք՝ $3k^2 = n^2$, այստեղից դուրս է գալիս, որ n-ը ևս 3-ի բազմապատիկ թիվ է: Արդյունքում կատարված ենթադրությունը հանգեցրեց այն եզրակացության, որ n և m թվերը 3-ի բազմապատիկն են, հետևաբար m/n կոտորակը կլինի կրճատելի, ինչը հակասում է պայմանին: Եկանք հակասության, ուրեմն կատարված ենթադրությունը կեղծ է, իսկ պնդումը ճշմարիտ:

Երկրաչափության դասընթացի համար հատկանշական է այն, որ խնդիր է դրվում զարգացնել ինտուիտիվ՝ պատկերային ընկալումները և տրամաբանական արտահայտչաձևերը, արտածումները, հիմնավորումները: Միջին դպրոցի երկրաչափության բովանդակային միջուկում տրամաբանական հիմունքներին են վերաբերում հետևյալ նյութերը. սահմանում, աքսիոմ, թեորեմ, հետևանք թեորեմից, անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, ուղիղ և հակադարձ թեորեմներ, ապացուցում և հերքում, ուղղակի և անուղղակի ապացուցումներ, ապացուցում հակառակից, անալոգիա, երկրաչափության աքսիոմների մասին, Էվկլիդեսի 5-րդ պոստուլատը և նրա պատմությունը, տեղեկություն ոչ էվկլիդյան երկրաչափության մասին:

Օրինակ 3: Բութանկյուն եռանկյան անկյուններից մեկը միշտ մեծ է մյուս երկու անկյունների գումարից:

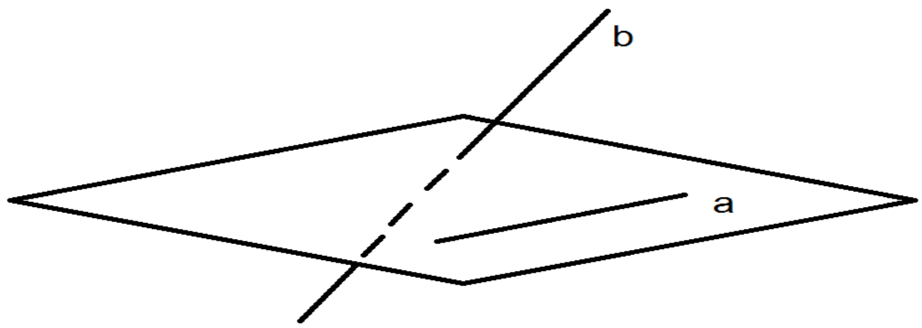


Քանի որ բութանկյուն եռանկյան ամենամեծ անկյունը բութ անկյունն է՝ <A, ուստի կատարենք հակասող ենթադրություն, ենթադրենք , որ բութ անկյունը փոքր, կամ հավասար է մյուս երկու անկյունների գումարից: Այսինքն <A ≤ <B+<C,   դա նույնն է, ինչ   <B+<C ≥ <A: Քանի որ բութանկյունը 90°-ից մեծ անկյունն է, այսինքն   <A> 90°

ուրեմն <B+<C > 90° , իսկ դա կբերի <A + <B+<C >180°, որը հակասում է եռանկյան անկյունները հավասար է 180° պնդմանը: Եկանք հակասության, ուրեմն պնդումը ճիշտ է: Հակասող ենթադրության մեթոդով ապացուցենք խաչվող ուղիղների հայտանիշը:

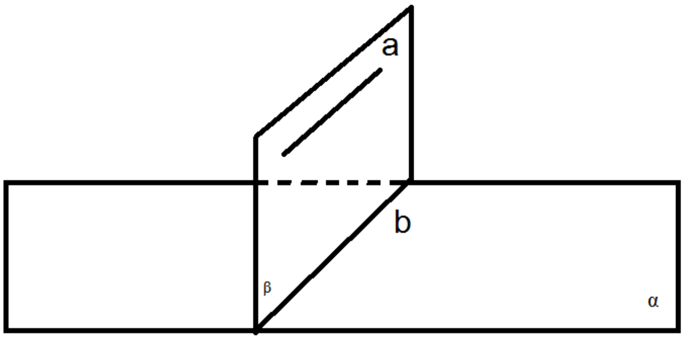
Օրինակ 4 : Եթե երկու ուղիղներից մեկն ընկած է որևէ հարթության մեջ, իսկ մյուս ուղիղն այդ հարթությունը հատում է առաջին ուղղի վրա չգտնվող կետում, ապա այդ ուղիղները խաչվող են:

Հարթության մեջ ընկած ուղիղը նշանակենք a, իսկ հարթությունը հատող ուղիղը նշանակենք b:



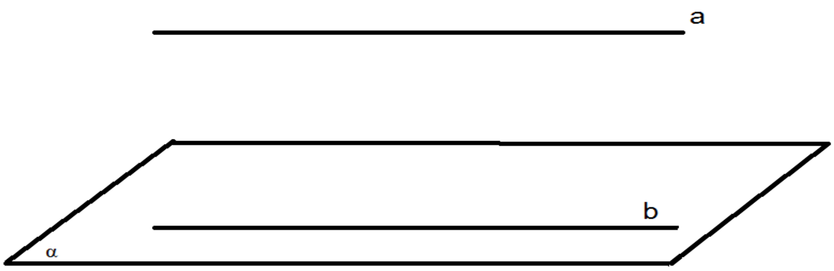
Կատարենք հակասող ենթադրություն, ենթադրենք որ այդ ուղիղները խաչվող չեն, ուրեմն կամ հատվող են կամ զուգահեռ: Հատվող չեն կարող լինել, քանի որ պայմանում նշված է, որ հատվող չեն: Մնում է ենթադրել, որ a և b ուղիղները զուգահեռ են, իսկ մենք գիտենք, որ երկու զուգահեռ ուղիղներով անցնում է հարթություն, այն էլ միայն մեկը: Ուրեմն b ուղիղը պատկանում է հարթությանը, որը հակասում է պայմանին: Եկանք հակասության, ուրեմն ուղիղները խաչվող են: Հակասող ենթադրության մեթոդով ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Օրինակ 5: Եթե ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը և ընկած է այդ հարթությանը հատող մեկ այլ հարթության մեջ, ապա զուգահեռ է նաև այդ հարթությունների հատման գծին:



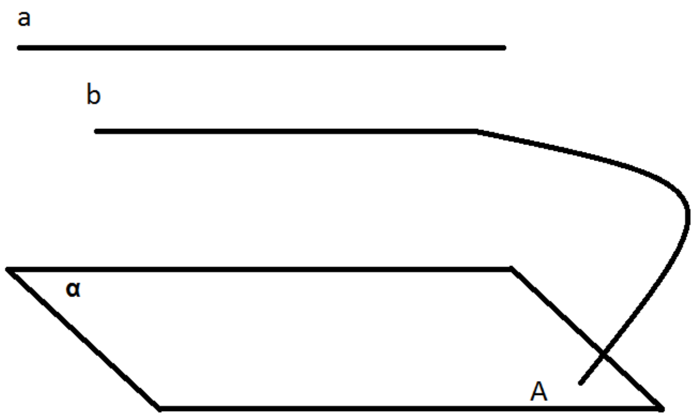
Ապացուցում. Դիցուկ a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, իսկ β-ն այնպիսի հարթություն է, որ անցնում է a ուղիղով և հատում է α հարթությանը: Ցույց տանք, որ a ուղիղը զուգահեռ է α և β հարթությունների հատման b ուղղին: Կատարենք հակասող ենթադրություն, ենթադրենք, որ a ուղիղը զուգահեռ չէ b ուղղին: Խաչվող չեն կարող լինել, քանի որ գտնվում են մի հարթության մեջ: Մնում է դիտարկել a և b ուղիղների հատող լինելուն: Եթե a և b ուղիղները հատվող են, ուրեմն հատման կետը պատկանում է a հարթությանը, իսկ սա նշանակում է որ a ուղիղը հատում է α հարթությունը, որը հակասում է պայմանին: Եկանք հակասության, ուրեմն a և b ուղիղները զուգահեռ են:

Օրինակ 6: Եթե տրված հարթության մեջ չգտնվող ուղիղը զուգահեռ է այդ հարթության մեջ ընկած որևէ ուղղի, ապա այն զուգահեռ է նաև տրված հարթությանը:



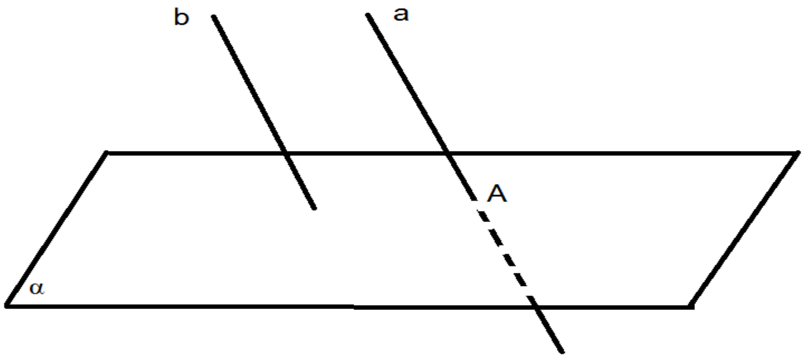
Դիցուկ a և b ուղիղները զուգահեռ են, b ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ a ուղիղը՝ ոչ: : a ուղղի և α հարթության փոխդասավորության համար մնում է հնարավոր երկու դեպք՝ կամ հատվող են կամ զուգահեռ: Կատարենք հակասող ենթադրություն, ենթադրենք a ուղիղը հատում է α հարթությունը և նրանք ունեն ընդհանուր հատման կետ: Այդ կետը գտնվելու է α հարթության և a և b զուգահեռ ուղիղներով անցնող հարթության ընդհանուր ուղղի՝ B ուղղի վրա: Սակայն դա հակասում է պայմանին, քանի որ a և b ուղիղները զուգահեռ են: Եկանք հակասության, ուրեմն a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը:

Օրինակ 7: եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը զուգահեռ է հարթությանը, ապա մյուս ուղիղը ևս զուգահեռ կլինաի այդ հարթությանը, կամ կգտնվի նրա վրա:



Ապացույց: Դիցուկ a‌և b զուգահեռ ուղիղներից a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, ապացուցենք, որ b ուղիղը ևս զուգահեռ է α հարթությանը, կամ գտնվում է նրա վրա: Կատարենք հակասող ենթադրություն, ենթադրենք b ուղիղը զուգահետ չէ α հարթությանը, և հաթությունը հատում է A կետում: Քանի որ a և b ուղիղները զուգահեռ են, ուրեմն նրանցով անցնում է հարթություն, այն էլ միայն մեկը, որն էլ մեր β հարթությունն է: A կետը գտնվում է α և β հարթությունների հատման c ուղղի վրա: Քանի որ a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, ապա զուգահեռ կլինի նաև c ուղղին: Ստացվում է, որ A կետով անցնում է a ուղղին զուգահեռ երկու c և b ուղիղներ: Եկանք հակասության, ուրեմն b ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, կամ գտնվում է նրա վրա:

Օրինակ 8: Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը հատում է որևէ հարթություն, ապա մյուս ուղիղը ևս հատում է այդ հարթությունը:



Դիցուկ զուգահեռ ուղիղներն են a-ն և b-ն, նրանցից a ուղիղը հատում է α հարթությունը A կետում, ապացուցենք որ b ուղիղը ևս հատում է α հարթությունը: Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ, ենթադրենք b ուղիղը չի հատում α հարթությունը՝ այսինքն b ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, կամ գտնվում է նրա վրա: b ուղիղը չի կարող ընկած լինել α հարթության մեջ, քանի որ այդ դեպքում a ուղիղը կլիներ α հարթությանը զուգահեռ, այլ ոչ թե հատող (ըստ ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշի: Եթե երկու ուղիղներից մեկը ընկած է որևէ հարթության մեջ, իսկ մյուս ուղիղն այդ հարթությունը հատում է առաջին ուղղի վրա չգտնվող կետում, ապա այդ ուղիղները խաչվող են): b ուղիղը զուգահեռ չի կարող լինել α հարթությանը, քանի որ a և b ուղիղները զուգահեռ են, և եթե b ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, ապա a ուղիղը նույպես պետք է զուգահեռ լինի α հարթությանը ,(Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը զուգահեռ է հարթությանը, ապա մյուս ուղիղը նույնպես զուգահեռ է հարթությանը, կամ գտնվում է նրա վրա:) որը կհակասի պայմանին: Հաջորդ տարբերակը. a և b զուգահեռ ուղիղներով անցնող β հարթությունը α հարթության հետ կունենար հատման c ուղիղը, որը կլիներ b ուղղին զուգահեռ: Կստացվեր, որ A կետով անցնում են b ուղղին զուգահեռ երկու ուղիղներ a և c: Իսկ դա հակասում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին: Քանի որ բացառվում են b ուղղի α հարթության մեջ ընկած լինելու և a ուղղին զուգահեռ լինելու դեպքերը, մնում է եզրակացնել, որ b ուղիղը հատում է α հարթությանը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Հակասող երթաղրության մեթոդի անմիջական կիրառմամբ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ՝

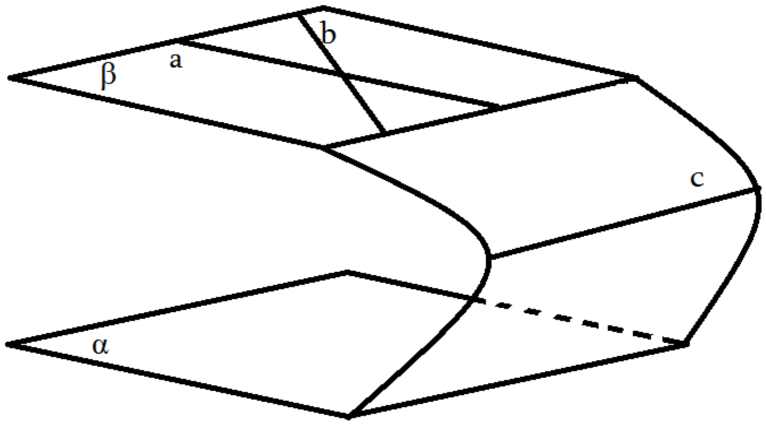
Օրինակ 9: եթե քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց չեն, ապա այն շեղանկյուն չէ:

Բավական է կատարել հակասող ենթադրություն, այն է՝ դիցուկ ունենք շեղանկյուն,որի անկյունագծերը փոխուղղահայաց չեն, անմիջականորեն կհանգենք հակասության:

Օրինակ 10: եթե բնական թվի քառակուսին զույգ է, ապա այդ թիվը զույգ է:

Բավական է կատարել հակասող ենթադրություն, այն է՝ դիցուկ ունենք ոչ զույգ բնական թիվ, որի քառակուսին զույգ է, անմիջականորեն կհանգենք հակասության:

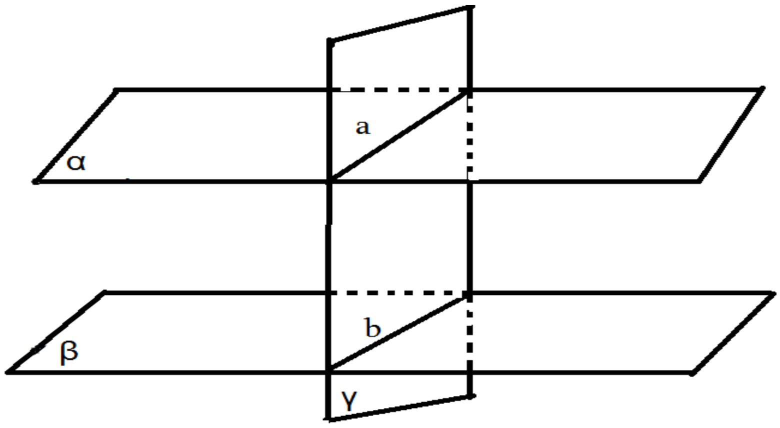
Օրինակ 11: Թեորեմ. Եթե մի հրթության մեջ ընկած երկու հատվող ուղիղներ զուգահեռ են մյուս հարթությանը, ապա այդպիսի հարթությունները զուգահեռ են:



Ապացուցում. Դիցուկ՝ β հարթության մեջ ընկած են a և b հատվող ուղիղները, որոնցից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է α հարթությանը: Ենթադրենք, թե α և β հարթությունները զուգահեռ չեն և հատվում են c ուղղով: Այդ դեպքում կստացվի, որ ինչպես a, այնպես էլ b ուղիղը զուգահեռ է c ուղղին: Իսկապես, β հարթությունն անցնում է α հարթությանը զուգահեռ a ուղղով, ուրեմն՝ α և β հարթությունների հատման գծին՝ c ուղղին, ըստ նրա, որ եթե ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը և ընկած է այդ հարթությանը հատող մեկ այլ հարթության մեջ, ապա զուգահեռ է նաև այդ հարթությունների հատման գծին: Նույն կերպ b ուղիղը ևս զուգահեռ կլինի c ուղղին:

Այսպիսով, մեր ենթադրությունը հանգեցնում է հակասության, քանի որ ստացվում է, որ a և b հատվող ուղիղներից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է միևնույն c ուղղին: Ուրեմն՝ α և β հարթությունները չեն հատվում. Նրանք զուգահեռ են: Թեորեմն ապացուցված է:

Օրինակ 12: Երկու զուգահեռ հարթություններ երրորդ հարթությամբ հատելուց առաջացած ուղիղները զուգահեռ են:



Ապացուցում: Դիցուկ α և β զուգահեռ հարթություններից յուրաքանչյուրը հատում է γ հարթությունը, a ուղիղը α և β հարթությունների, իսկ b ուղիղը β և γ հարթությունների հատման գծերն են: Ապացուցենք, որ a և b հատման գծերը զուգահեռ են: Կատարենք հակասող ենթադրություն, ենթադրենք, որ a և b ուղիղները զուգահեռ չեն: Քանի որ գտնվում են մեկ γ հարթության մեջ, ուրեմն խաչվող լինեկ չեն կարող : Մնում է ենթադրե, որ հատվող են: Եթե aև b ուղիղները հատվող են, ապա հատման կետը պատկանում է α նβ հարթություններին: Իսկ մենք գիտենք, եթե երկու հարթություններ ունեն մեկ ընդհանուր կետ, ապա նրանք ունեն ընդհանուր ուղիղ, որի վրա ընկած ենայդ հարթությունների բոլոր ընդհանուր կետերը: Այսինքն α և β հարթությունները հատվող են, որը հակասում է պայմանին: Եկանք հակասության, ուրեմն a զուգահեռ է b-ին: Այն ինչ պետք էր ապացուցել:

Սակայն հարկ է նշել, մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպում են նաև ապացուցման և/կամ հերքման վերաբերյալ տարբեր խնդիրներ, որոնց լուծման ժամանակ հակասող երթադրության մեթոդի կիրառմամբ դժվար է միանգամից, անմիջականորեն հանգել հակասության, դեռ ավելին, ամեննին պարզ չէ, թե ինչի շնորհիվ կարող ենք հանգել հակասության: Նման դեպքերում երբեմն կիրառվում են հակասող ենթադրության մեթոդի տարբեր տարատեսակներ, երբ այդ մեթոդի կիրառմանը զուգահեռ կիրառվում է նաև այլ մոտեցում:

§ 3. Ներկման մեթոդը որպես հակասող ենթադրության միթոդի տարատեսակ

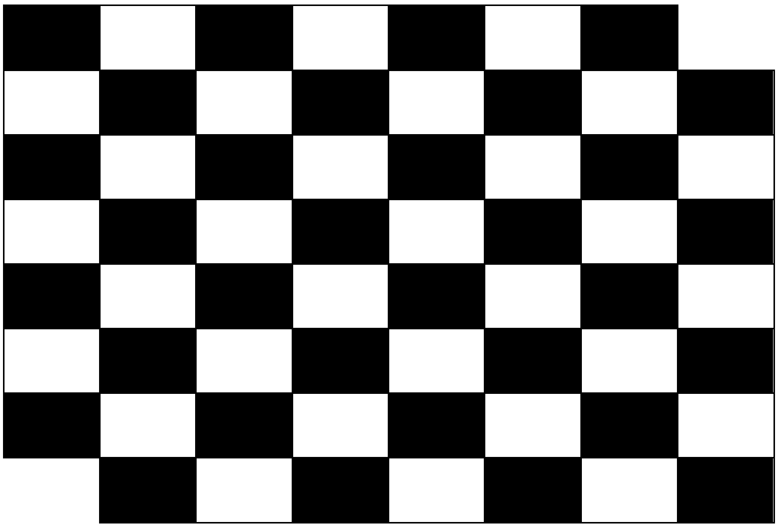
Հակասող ենթադրության մեթոդի այդպիսի գեղեցիկ տարատեսակներից է ներկման մեթոդը: Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպում են տարբեր տիպային քառակուսային վանդակներից կազմված տրված տիրույթը (քառակուսի, ուղղանկյուն կամ այլ տիրույթ) հնարավոր է արդյոք ծածկել առանձին ենթատիրույթների միջոցով (ծածկել ասելով ենթադրվում է , ծածկվում են տիրույթի բոլոր վանդակները, յուրաքանչյուր վանդակ ծածկվում է միայն մեկ ենթատիրույթի միջոցով, և ենթատիրույթները դուրս չեն գալիս ելակետային տիրույթի սահմաններից): Ինչպես ստորև կհամոզվենք , նմանատիպ խնդիրներում իր արդյունավետ կիրառությունը կարող է ունենալ ներկման մեթոդը, համաձայն որի,՛ ելակետայի տիրույթի վանդակները (բոլորը կամ նրանց մի մասը) մտովի ներկում xենք երկու կամ ավելի գույներով և հաշվում յուրաքանչյուր գույնի վանդակների քանակը, որից հետո կատարում ենք ենթադրություն, և տրամաբանական դատողությունների միջոցով հագում ենք հակասության, որի հետևանքով ըստ էության ապացուցում ենք , որ տվյալ տիրույթը առաջարկվող ենթատիրույթներով ծածկել հնարավեր չէ:

Մեթոդի էությունը և կիրառելիության սահմաններն ավելի լավ պատկերացնելու համար դիտարկենք մի քանի խնդիրներ:

Խնդիր 1: 8.8 չափսերի քառակուսուց հեռացրել են անկյունագծային ստորին ամենաձախ և վերին ամենաաջ վանդակները: Հնարավո՞ր է արդյոք ստացված պատկերը ծածկել 31 հատ 1.2 չափսերի ուղղանկյուններով:

Լուծում: Օգտվենք ներկման մեթոդից: Ելակետային տիրույթը շախմատաձև ներկենք սև և սպիտակ գույներովայնպես, ինչպես ցույց է տրված 1-ին նկարում: Անենք ենթադրություն. Դիցուք տրված տիրույթը հնարավոր է ծածակել 31 հատ 1.2 չափսերի ուղղանկյուններով: Հեշտ է նկատել, որ 1x2 չափսերի յուրաքանչյուր ուղղանկյունտվյալ տիրույթում ինչ դիրք էլ զբաղեցնի, կծածկի մեկ սպիտակ և մեկ սև վանդակներ, հետևաբար 31 հատ 1x2 չափսերի ուղղանկյուններով հնարավոր է ծածկել 31 հատ սպիտակ և 31 հատ սև գույնի վանդակներով, մինչդեռ նկատենք, ներկման անդյունքում ելակետային տիրույթում սև և սպիտակ գույներով վանդակների քանակները միմյանց հավասար չեն (ունենք 32 հատ սև և 30 հատ սպիտակ վանդակներ): Կնշանակի՝ մեր ենթադրությունը կեղծ է, և ուրեմն այդպիսի տիրույթը անհնար է ծածկել 31 հատ 1x2 չափսերի ուղղանկյուններով:

Պատասխան: Ոչ, հնարավոր չէ:

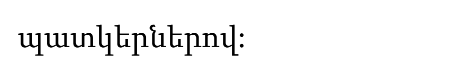


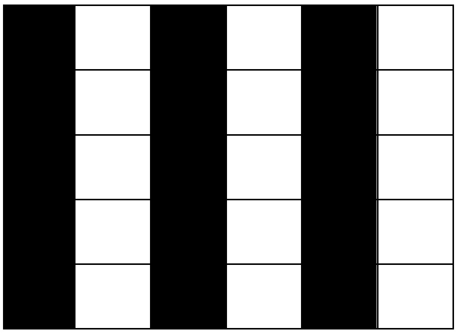
Նկար 1: Եղակետային տիրույթը՝ ներկված սև և սպիտակ գույներով:

Խնդիր 2: 6x6 չափսերի քառակուսին հնարավո՞ր է արդյոք ծածկել նկար 2-րդ պատկերված Г -աձև 9 հատ պատկերները:

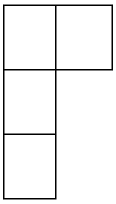
Լուծում: Օգտվենք ներկման մեթոդից: Եղակետային տիրույթը ներկենք սև և սպիտակ գույներով այնպես, ինչպես ցույց է տրված 3-րդ նկարում: Անենք ենթադրություն. Դիցուկ տրված տիրոհյթը հնարավոր է ծածկել -աձև 9հատ պատկերներով: Հեշտ է նկատել, որ -աձև յուրաքանչյուր պատկերտվյալ տիրույթում ինչ դիրք էլ զբաղեցնի, կծածկի կենտ թվով սև վանդակների /1 կամ 3 հատ /, հետևաբար 9 հատ -աձև պատկերները միասին դարձյալ կծածակեն կենտ թվով սև վանդակների, մինչդեռ նկատենք, որ ներկման հետևանքով եղակետային տիրույթում ունենք զույգ քանակի սև գույնի վանդակներ՛ 18 հատ: Կնշանակի մեր ենթադրությունը կեղծ է, և ուրեմն այդպիսի տիրույթը անհնար է ծածկել -աձև 9 հատ պատկերներով:

Պատասխան: Ոչ, հնարավոր չէ:





Նկար 3: Ելակետային 6.6 տիրույթը ներկված սև և սպիտակ գույներով

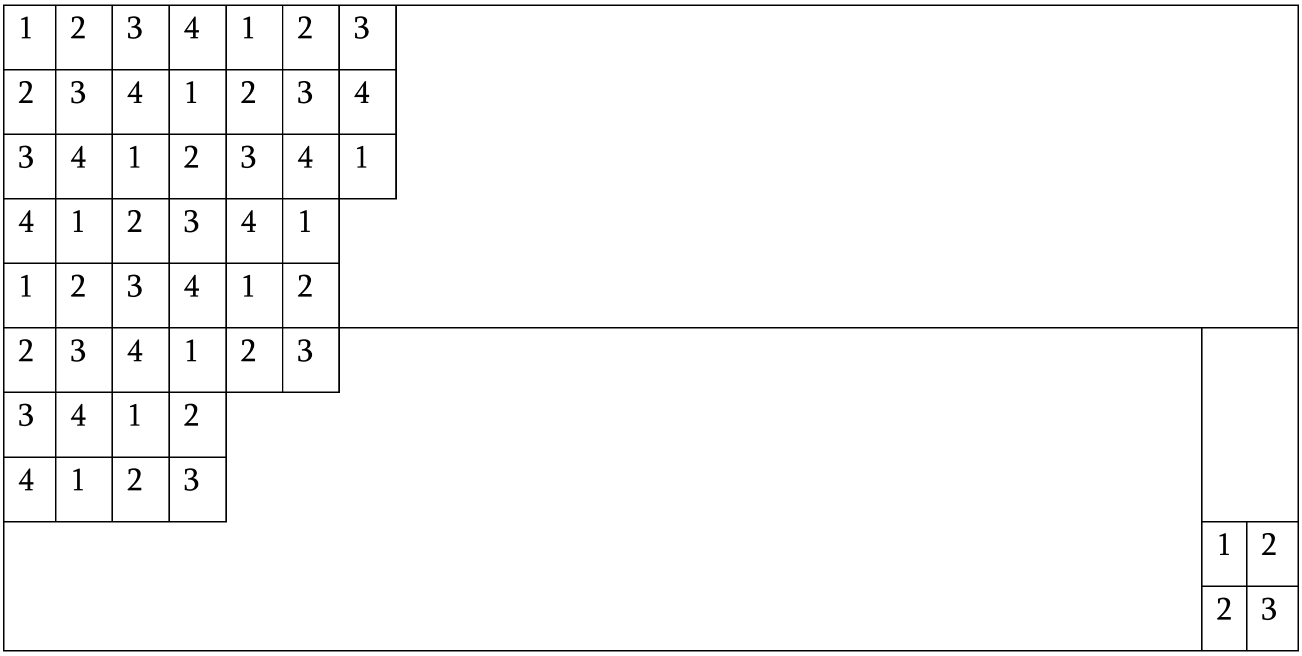


Նկար 4:   Γ -աձև պատկեր

Խնդիր 3: 102x102 չափսերի քառակուսին հնարավո՞ր է արդյոք ծածկել 2601 հատ 1x4 չափսերի ուղղանկյուններով:

Լուծում: Օգտվենք ներկման մեթոդից: Ելակետային տիրոիյթը ներկենք ″ 1″, ″2″ ,″3″ և ″4″ գույներով, ինչպես ցույց է տրված 5-րդ նկարում (նկարում օգտագործված են ելակետային 102x102 չափսերի քառակուսիներին ձախ և աջ անկյունները, նույն օրինաչափությամբ ներկված են տիրոիյթի բոլոր վանդակները): Անենք ենթադրություն. Դիցուկ տրված տիրույթը հնարավոր է ծածկել 2601 հատ 1x4 չափսերի ուղղանկյուններով: Հեշտ է նկատել, որ 1x4 չափսերի յուրաքանչյուր ուղղանյուն տվյալ տիրույթում ինչ դիրք էլ զբաղեցնի, կծածկի բոլոր գույներից մեկական վանդակ, հետևաբար 2601 հատ 1x4 չափսերի ուղղանկյուններով հնարավոր է ծածկել 2601 –ական ″ 1″, ″2″ ,″3″ և ″4″ գույների վանդակներ, մինչդեռ նկատենք, որ ներկման արդյունքում ելակետային տիրույթում ″ 1″, ″2″ ,″3″ և ″4″ գույներով վանդակների քանակները միմյանց հավասար չեն (ունենք 2601-ական ″1″ և ″3 ″ գույների վանդակներ, 2602 հատ ″2″ գույնի վանդակ և 2600 հատ ″4″ գույնի վանդակ): Կնշանակի մեր ենթադրությունը կեղծ է, և ուրեմն այդպիսի տիրույթը անհնար է ծածակել 2601 հատ 1x4 չափսերի ուղղանկյուններով:

Պատասխան: Ոչ, հնարավոր չէ:



Նկար 5: Ելակետային 102x102 տիրույթի ներկումը ″ 1″, ″2″ ,″3″ և ″4″ գույներով:

Նկատենք, որ դիտարկված խնդիրներում փոխվում են ինչպես ներկման եղանակը, այնպես էլ օգտագործվող գույների քանակը, բայց մոտեցումը մնում է անփոփոխ, հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառմամբ ապացուցում և/կամ հերքում ենք խնդրում առաջադրված պնդումը:

§ 4. Եզրային կանոնը

Հակասող ենթադրության մեթոդի մեկ այլ գեղեցիկ տարատեսակ է եզրային կանոնը: Այն կարելի է հակիրճ ամփոփել հետևյալ բառերով, ´´ հաշվի առեք եզրային ծայրահեղը´´: Եզրային կանոնի էությունը հետևյալն է: Որևէ պնդում ապացուցելու կամ հերքելիս, հիմք ընդունելով հակասող ենթադրության մեթոդը, դիտարկել պնդման օբյեկտներից ծայրահեղ հատկություններով օժտվածը: Եթե, օրինակ, խնդիրը վերաբերվում է հորիզոնական ուղղի վրա դասավորված վերջավոր կետերին, ապա առաջարկվում է ուշադրությունը կենտրոնացնել այդ հավաքածուի առավել ծայրահեղ կետի՝ ամենաձախ կամ ամենաաջկետի վրա: Եթե խնդրի մեջ իրական թվերի որոշակի վերջավոր հավաքածու է հայտնվում, ապա եզրային կանոնը առաջարկում է հաշվի առնել այդ թվերից ամենամեծը կամ ամենափեքրը: Եթե խնդրի մեջ հատվածների (շրջանագծերի) որոշակի վերջավոր հավաքածու է հայտնվում, ապա եզրային կանոնը առաջարկում է հաշվի առնել այդ հատվածներից (շրջանագծերից) ամենամեծ կամ ամենափոքր երկարություն (շառավիղ) ունեցողը: Մեթոդի էությունը և կիրառելիության սահմաններն ավելի լավ պատկերացնելու համար դիտարկենք մի քանի խնդիրներ:

Խնդիր 1: Անվերջ շախմատային դաշտիվանդակներում գրված են բնական թվեր այնպես, որ յուրաքանչյուր թիվ հավասար է իր հարևան (այսինքն աջ, ձախ, վերին և ստորին) թվերի միջին թվաբանականին: Ապացուցել, որ գրված բոլոր թվերը միմյանց հավասար են:

Լուծում: Օգտվենք եզրային կանոնից: Քանի որ, ըստ խնդրի պայմանի, անվերջ շախմատային դաշտի վանդակներում գրված են բնական թվեր, կնշանակի գրվածթվերի մեջ անպայման կլինի ամենափոքր բնական թիվ (քանզի, ինչպես բնական թվերի բազմությունը, այպես էլ վերջինիս ցանկացած ենթաբազմություն, պարունակում է ամենափոքր թիվ): Դիցուկ այդ ամենափոքր բնական թիվը n-ն է, որը հանդիպում է անվերջ շախմատային դաշտի ինչ-որ վանդակում (եթե n բնական թիվը հանդիպում է մի քանի և / կամ անվերջ թվով վանդակներում, ապա կդիտարկենք այդ վանդակներից որևէ մեկը), իսկ նրա հարևան վանդակներում գրված թվերն են a-ն, b-ն, c-ն և d-ն: Ըստ խնդրի պայմանի ՝ $n=(a+b+c+d)/4$, որտեղից կունենանք՝ $a+b+c+d=4n$: Մյուս կողից, քանի որ n-ն վանդակներում գրված թվերից ամենափոքրն էր, կնշանակի $n\leq a$, $n \leq b$, $n \leq c$, $n \leq d$, հետևաբար $a+b+c+d \leq 4n$, ընդ որում, եթե $n\leq a$, $n \leq b$, $n \leq c$, $n \leq d$ անհավասարություններից որևէ մեկը տեղի ունի խիստ ձևով, ապա կունենանք $a+b+c+d > 4n$, ինչը կհակասի խնդրի պայմանից բխող $a+b+c+d =4n$ պայմանին, և ուրեմն $n\leq a$, $n \leq b$, $n \leq c$, $n \leq d$ ոչ խիստ անհավասարություններից և ոչ մեկը խիստ ձևով տեղի չունի, այսինքն $a= b= c =d= n$: Համանման դատողությունների շնորհիվ կստացվի, որ n տարրը պարունակող տողի և ամբողջ սյան վրա գրված են միևնույն n-եր, որտեղից էլ անմիջականորեն կհետևի, որ անվերջ շախմատային դաշտի բոլոր վանդակներում գրված են միայն n-եր, այսինքն գրված բոլոր թվերը միմյանց հավասար են: Պնդումն ապացուցված է:

Դիտարկենք ևս մեկ խնդիր:

Խնդիր 2: Հարթության վրա տարված են n>3 հատ կամայականուղիղներ, որոնցից ոչ մի երկուսըմիմյանց զուգահեռ չեն, ևոչ մի երեքը չեն անցնում միևնույն կետով: Արդյունքումինչպես այդ ուղիղները, այնպես էլ հարթությունը, բնականաբար, բաժանվում են մասերի: Ապացուցել, որ այդ n ուղիղներից որ մեկն էլ դիտարկենք, վերջինիս և հարթության հարակից մասերից առնվազն մեկը ունի եռանկյան տեսք:

Լուծում: Դիտարկենք ուղիղներից որևէ մեկը և այն նշանակենք լ –ով: Ըստ խնդրի պայմանի՝ n>3 հատ ուղիղներից յուրաքանչյուր երկուսը հատվում են, և ոչ մի երեք ուղիղ չի հատվում միևնույն կետում, կնշանակի n>3 հատ ուղիղների հատումից կառաջանա n(n-1)/2 հատ (վերջավոր քանակի) կետեր: Համաձայն եզրայինի կանոնի՝ վերը նշված n(n-1)/2 հատ կետերի մեջ առկա է առնվազն մեկ կետ, որը չի պատկանում լ ուղղին և նրանից հեռացվում է նվազագույն չափով: Այդ կետը (կամ այդպիսի կետերից որևէ մեկը) նշանակենք p-ով: Պարզ է , որ p կետն առաջացել է տրված n>3 հատ ուղիղներից որևէ երկուսի (և միայն այդ երկուսի) հատումից: Այդ ուղիղները նշանակենք, համապատասխանաբար , l1 և l2: Ապացուցենք, որ l1, l2, և l ուղիղների հատումից առաջացած եռանկյունը l ուղղի համար խնդրի պայմաններին բավարարող որոնելի եռանկյունն է: Իրոք, եթե անենք հակասող ենթադրություն և ընդունենք, որ տրված n>3 հատ ուղիղների մեջ գոյություն ունի ինչ-որ դ ուղիղ, որը հատում է վերը նշված եռանկյունը, ապա այդ ուղիղը, բնականաբար, կհատի նաև l1 և l2 ուղիղներն ինչ-ոչ p1 և p2 կետերում, որոնք l ուղղից կունենան ավելի փոքր հեռավորություն, քան p կետը, ինչը, եզրայինի կանոնի համաձայն, հակասում է p կետի ընտրության սկզբունքին: Պնդումն ապացուցված է:

Խնդիր 3: Գտնել $x^3-2y^3-4z^3=0$ հավասարման ամբողջ լուծումները:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տրված հավասարումն ունի զրոյական լուծում, x=y=z=0-ն տրված հավասարման լուծում է: Ենթադրենք՝այն ունի նաև ոչ զրոյական լուծում, այսինքն՝ գոյություն ունեն x, y և z ամբողջ թվեր այնպես, որ $x^3-2y^3-4z^3=0$ և $|x|=|y|=|z| \neq 0$: Համաձայն եզրայինի կանոնի՝(x, y , z) հնարավոր ոչ զրոյական լուծումների մեջ կգտնվի այնպիսի լուծում, որի համար $|x|+|y|+|z|$ գումարը՝ որպես բնական թիվ, փոքրագույնն է: Դիցուկ ՝(x', y', z') եռյակը տրված հավասարման այն ոչ զրոյական լուծումն է (կամ լուծումներից որևէ մեկը), որի համար $|x'|+|y'|+|z'| \to min$: Հեշտ է նկատել, որ այս դեպքում $(x')^3$-ը զույգ է, հետևաբար , $x'=2x''$, որտեղից կստանանք, որ $(y')^3$ -ը ևս զույգ է, հետևաբար $y'=2y''$, որտեղից կստանանք, որ $(z')^3$- ը ևս զույգ է, հետևաբար $z'=2z''$, որտեղից կստանանք $(x'')^3-2(y'')^3-4(z'')^3=0$: Փաստորեն ամբողջ թվերի ՝(x'', y'', z'') եռյակը ևս տրված հավասարման լուծում է, ընդ որում $|x''|+|y''|+|z''|= (|x'|+|y'|+|z'|)/2< |x'|+|y'|+|z'|$, ինչը հակասում է $|x'|+|y'|+|z'|\to min$ պայմանին, հետևաբար տրված հավասարումը չի կարող ունենալ ոչ զրոյական լուծում:

Պատասխան: (0,0,0):

Ինչպես տեսնում ենք, եզրային կիրառման պարագայում մենք լրացուցիչ քննարկման առարկա ենք դարձնում խնդրում դիտարկվող օբյեկտներից եզրային կամ ծայրահեղ հատկություններով օժտված օբյեկտը, ընդ որում բուն օբյեկտը կարող է լինել ինչպես առկա, (օրինակ՝4-րդ խնդրում վանդակներում գրված բնական թվերից ամենափոքրը, կամ 5-րդ խնդրում դիտարկված ուղղից նվազագույն չափով հեռացված կետը), այնպես էլ մեր ներմուծած, օրինակ՝6-րդ խնդրում, երբ լուծում ենք տրված անորոշ հավասարումը, ելնելով խնդրի պայմաններից, ներմուծում ենք գումարը և քննարկման առարկա ենք դարձնում վերջինիս նվազագույն լինելը:

Եզրակացություն

Հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառմը նպաստում է դպրոցականների մտավոր տրամաբանության զարգացմանը: Շատ ցանկալի է, որ ուսուցիչը չբավարարվի դասագրքում ներկայացված ապացույցով, այլ առաջարկի աշակերտներին նույն թեորեմի ապացուցման այլ եղանակ ընտրել, ուղղորդելով հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառումը և խրախուսել լավագույններին:

Կարող ենք փաստել, որ ներկման մեթոդը և եզրայինի կանոնը՝ որպես հակասող ենթադրության մեթոդի տարատեսակներ, իրենց օգտակար և արդյունավետ կիրառությունները կարող են ունենալ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ապացուցման և հերքման խնդիրների, ինչպես նաև անորոշ հավասարումների լուծման ժամանակ: Ըստ էության թե ներկման մեթոդը և թե եզրային կանոնը հակասող ենթադրության մեթոդի վերափոխված տարբերակներ են, երբ բուն մեթոդի կիրառմանը զուգընթաց կիրառում ենք նաև մեկ այլ գործիք՝ ներկում կամ ծայրահեղ հատկությամբ օժտված օբյեկտի դիտարկում:

Կարծում ենք՝ ժամանակակից աշակերտը կարիք ունի առարկայական տարբեր մեթոդներով, հնարքներով և սկզբունքներով զինվելու, ինչը կնպաստի ոչ միայն նրա վորոնողական ընդունակությունների և ստեղծագործական մտածողության զարգացմանը, այլ նաև գեղեցիկի իմաստավորված ընկալմանը և շահադրդման բարձրացմանը, ինչն էլ ի վերջո կհանգեցնի ուսուցման արդյունավետության և, ըստ այդմ, կրթության որակի բարձրացմանը:

Գրականություն

1. Այվազյան Է., Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա: Երևան, ԵՊՀ հրատ., 2016,202 էջ:
2. Գևորգյան Գ., Սահակյան Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք, բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար, Երևան, Տիգրան Մեծ, 2010, 208 էջ:
3. Генкин С.А., Итенберг И. В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки. Киров, изд. “АСА”, 1994. 272С.
4. Горбачев Н. В., Сборник олимпиадных задач по математике.- М., МЬНМО, 2004,-560с.
5. Гусев В. А., Теория и мтодика обучения матемарике: психойогопедагогические основы. М.: Лаборатория знаний, 2017.-458с.
6. Довбыш Р. И., Потемкина Л.Л.,Трегуб Н. Л., Лиманский В.В., Оридорога Л.Л., Кулеско Н.А., Математические олимпиады: 906 самых интересных задач и примери с решениями. Ростов н/Д: Феникс, 2008.-331с.
7. Екимова М. А., Кунин Г. П., Задачи на разрезание. М.: МЦНМО, 2002.-120с.
8. Кондаков М. И., Логический словарь-справпчник. М., Наыка, 1975.-717с.
9. Розенталь А., Правило крайнего. Научно-популярный физико-математический журнал Кжант. 1998, 9, стр. 53-57.