

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
«ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ» ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Թեմա՝ «Ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում
ֆիզիկական գաղափարների որոշ կիրառությունների մասին»

Կատարող՝ Մարտիրոսյան Գայանե

Ղեկավար՝ Սարուխանյան Ալվարդ

Դպրոց՝ «Գյումրու թիվ 37 ավագ դպրոց»

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ.....3-4

ԳԼՈՒԽ Ա

ՈՐՈՇ ԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ԿԵՆՏՐՈՆՆԵՐԻ ԵՎ ԾԱՎԱԼՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՄԲ5

1.1. Անհրաժեշտ ֆիզիկական գաղափարներ5-9

1.2. Որոշ մակերևույթների և կորերի զանգվածների կենտրոնների որոշումը.....9-13

1.3. Յիլինդրոիդի ծավալի որոշումը ֆիզիկական բնույթի դատողությունների օգնությամբ13-23

ԳԼՈՒԽ Բ

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՈՐՈՇ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԵՎ ՀԱՐՑԵՐՈՒՄ.....24

2.1.Նյութական կետերի համակարգի զանգվածների կենտրոնի բանաձևի կիրառությունները երկրաչափության դպրոցական դասընթացում.....24-30

2.2. Էներգիայի պահպանման օրենքի որոշ հանրահաշվական մեկնաբանություններ 30-35

Եզրակացություն.....36

Օգտագործված գրականության ցանկ.....37

Ներածություն

Լինում են դեպքեր, երբ մաթեմատիկական պնդումները, որոնք կարիք ունեն ճշգրիտ մաթեմատիկական ապացուցման ֆիզիկական տեսակետից բավականին ակնհայտ են: Օրինակ որոշ դիֆերենցիալ հավասարումների համար ֆիզիկորեն պարզ է, որ Կոշու խնդիրն ունի միակ լուծումը: Անկյան տակ նետված մարմինը կատարում է խիստ որոշակի շարժում, որի տեսքն ու պարամետրերը կախված են միայն սկզբնական դիրքից և արագությունից: Ուստի համապատասխան երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման նախնականի գոյությունն ու միակությունը ֆիզիկական տեսակետից ակնհայտ է: Մինչդեռ մաթեմատիկական տեսակետից դա սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է, որի լուծման գոյությունն ու միակությունը ունեն ապացուցման կարիք: Այս իմաստով ֆիզիկական դատողությունները կարող են լրացուցիչ նպաստող դեր ունենալ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում, իսկ ֆիզիկական գաղափարներն ու իրողությունները կարող են օգտակար լինել որոշ մաթեմատիկական արտածումների և ապացույցների հարցում: Ասվածը վերաբերվում է ինչպես բարձրագույն մաթեմատիկային, այնպես էլ դպրոցականին և հատկապես ավագ դպրոցի երկրաչափության դասընթացին:

Սույն ավարտական հետզոտական աշխատանքը նվիրված է ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում ֆիզիկական գաղափարների հնարավոր կիրառություններին:

Ավարտական հետզոտական աշխատանքի ***թեմայի արդիականությունը*** պայմանավորված է ուսուցման գործընթացում միջառարկայական կապերի վեր հանման կարևորությամբ և ինտեգրատիվ մոտեցումների նկատմամբ օրեցօր աճող հետաքրքրությամբ:

Աշխատանքի նպատակն է՝ ներկայացնել մաթեմատիկայի դասավանդման ընթացքում ֆիզիկական գաղափարների մոտիվացնող կիրառություններ, որոնք կնպաստեն մաթեմատիկայի ուսուցման արդյունավետության բարձրացմանը:

Ավարտական աշխատանքի հիմնական ***խնդիրներն են.***

1. Համապատասխան ուսումնամեթոդական գրականության ուսումնասիրում,
2. Մաթեմատիկական որոշ հասկացությունների և տեսական հարցերի լուսաբանում և մեկնաբանում ֆիզիկական տեսանկյունից:
3. Մաթեմատիկական որոշ վարժությունների և խնդիրների լուծում ֆիզիկական գաղափարների անմիջական կիրառմամբ:

Ավարտական հետազոտական աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երկու գլուխներից եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից: Առաջին գլխում համառոտ կերպով ներկայացված են այն հիմնական բազային ֆիզիկական գաղափարները, որոնց օգնությամբ հետագայում պետք է լուծվեն մաթեմատիկական խնդիրները: Արտածված է ցիլինդրի դաժվար ընդհանուր բանաձևը և հաշվված են որոշ մարմինների ծավալներ: Աշխատանքի երկրորդ գլխում ներկայացված է նյութական կետերի համակարգի զանգվածների կենտրոնի կիրառությունը երկրաչափության խնդիրներում: Երկրորդ գլխում նաև ներկայացված է քառակուսի հավասարման իրական արմատների գոյության հարցի մեկնաբանությունը լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքի միջոցով:

Ավարտական աշխատանքի վերջում համառոտ կերպով բերված են աշխատանքի եզրահանգումներն ու օգտագործված գրականության ցանկը:

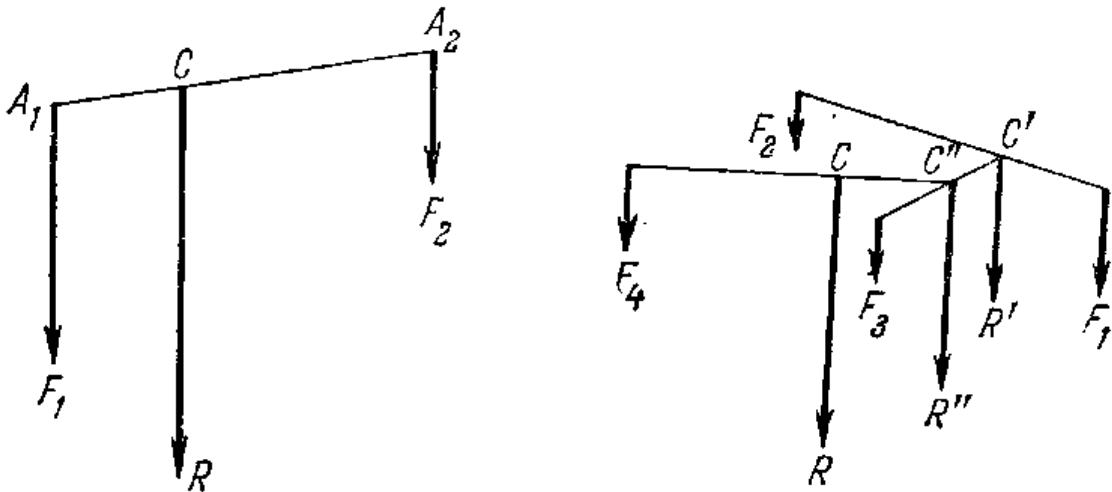
ԳԼՈՒԽ Ա

ՈՐՈՇ ԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ԿԵՆՏՐՈՆՆԵՐԻ ԵՎ ԾԱՎԱԼՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՍԲ

Աշխատանքի առաջին գլխում օգտվելով պոտենցիալ էներգիայի, աշխատանքի և մեխանիկական համակարգի զանգվածների կենտրոնի գաղափարներից կհաշվենք որոշ մարմինների ծավալներ:

1.1. Անհրաժեշտ ֆիզիկական գաղափարներ

Զանգվածների կենտրոն: 27 նկարում պատկերված են երկու զուգահեռ համուղղված ուժեր:



Ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից [Ֆիզ 10] հայտնի է, որ այդ ուժերի համագործի մոդուլը հավասար է գումարելի ուժերի մոդուլների գումարին, ուղղված է դրանց ուղղությամբ, իսկ ազդման գիծն անցնում է C կետով, որը որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ

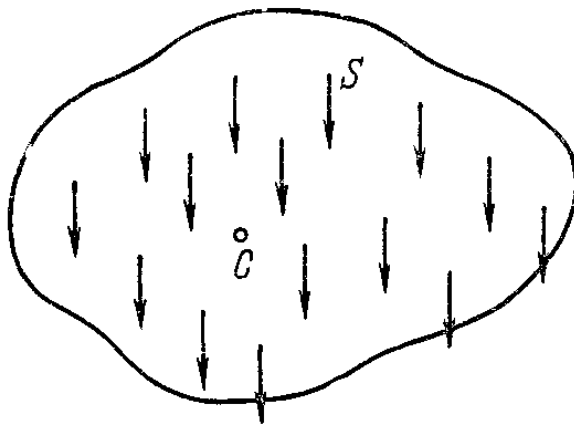
$$\frac{A_1C}{CA_2} = \frac{F_2}{F_1} \quad (1)$$

C կետին երբեմն անվանում են զուգահեռ ուժերի կենտրոն, որն էլ \vec{R} համագոր ուժի կիրառման կետն է:

Դիտարկենք մի քանի, օրինակ չորս զուգահեռ ուժերի համակարգ (Նկ. 28): Որպեսզի գտնենք դրանց համագործը հերթով կգումարենք այդ ուժերը: Ընդ որում յուրաքանչյուր անգամ կգումարենք երկու զուգահեռ ուժեր, ընդունելով, որ դրանց համագործը կիրառված է այդ ուժերի կենտրոնում: Այդ դեպքում գումարելով \vec{F}_1 - ը և \vec{F}_2 - ը կստանանք \vec{R}' ուժը՝ կիրառված C' կետում, այնուհետև \vec{R}' - ը գումարելով \vec{F}_3 - ին՝ \vec{R}'' ուժը՝ կիրառված C'' կետում: Ի վերջո գումարելով \vec{R}'' ուժը \vec{F}_4 ուժին կստանաք բոլոր չորս ուժերի համագործ \vec{R} ուժը: Այն կիրառված կլինի C կետում և կունենա $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ մեծությունը:

Նկարագրված եղանակով կարելի է գումարել կամայական քանակությամբ զուգահեռ ուժեր և ստանալ դրանց համագործը, որը կիրառված կլինի ինչ-որ C կետում: Կարելի է ապացուցել, որ C կետի դիրքը կախված չէ վերադրվող ուժերի գումարման հերթականությունից: Այդ կետին անվանում են տվյալ զուգահեռ ուժերի համակարգի կենտրոն:

Դիտարկենք Երկրին մոտ գտնվող պինդ մարմին (Նկ. 29): Եթե մարմնի չափսերը շատ ավելի փոքր են Երկրի չափսերից, ապա նրա տարբեր մասերի վրա ազդող



ծանրության ուժերը կարելի է համարել զուգահեռ: Այդ պատճառով կա C կետ, որը այդ ուժերի կենտրոնն է: Այդ կետին անվանում են մարմնի զանգվածի կենտրոն: Կարելի է համարել, որ այդ կետի վրա է ազդում ծանրության համագործ ուժը:

Ենթադրենք S մարմնի զանգվածի կենտրոնը C կետն է: Սահմանումից հետևում է, որ մարմնի նկատմամբ նրա դիրքը չի փոխվում այդ մարմնի տեղափոխությունների ընթացքում: Հետևաբար, զանգվածի կենտրոնը «ամուր կապված է» նրա հետ:

(1) հավասարությունից պարզ է, որ C կետի դիրքը չի փոխվի, եթե \vec{F}_1 և \vec{F}_2 ուժերի մոդուլները մեծացնենք, կամ փոքրացնենք նույնքան անգամ (Նկ. 27): Այստեղից հետևում է, որ զուգահեռ ուժերի համակարգի բոլոր բաղադրիչների համաչափ մեծացման կամ փոքրացման արդյունքում դրանց կենտրոնի դիրքը չի փոխվում: Այլ կերպ ասած համասեռ մարմնի զանգվածի կենտրոնի դիրքը կախված չէ նրա խտությունից և կախված է միայն մարմնի ձևից ու չափսերից: Այս պատճառով համասեռ մարմնի ծանրության կենտրոնին անվանում են նաև նրա ծավալի ծանրության կենտրոն:

Լարի և մակերևույթի զանգվածի կենտրոններ: Մեխանիկայում ներմուծում են նյութական կետի գաղափարը, որը այն մարմինն է, որի չափերը կարելի է անտեսել, որը պատկերավոր ասված զանգվածով օժտված կետն է: Համանման ձևով ներմուծում են նաև նյութական գծի և մակերևույթների գաղափարը, որոնցում զանգվածը բաշխված է գծային և մակերևութային կերպով: Նյութական գծի օրինակ է լարը (օրինակ բարակ մետաղալար, բարակ թել): Նյութական մակերևույթի օրինակ է նրբաթիթեղը: Որքան բարակ են լարն ու նրբաթիթեղը, այնքան դրանք մոտ են համապատասխան մոդելներին:

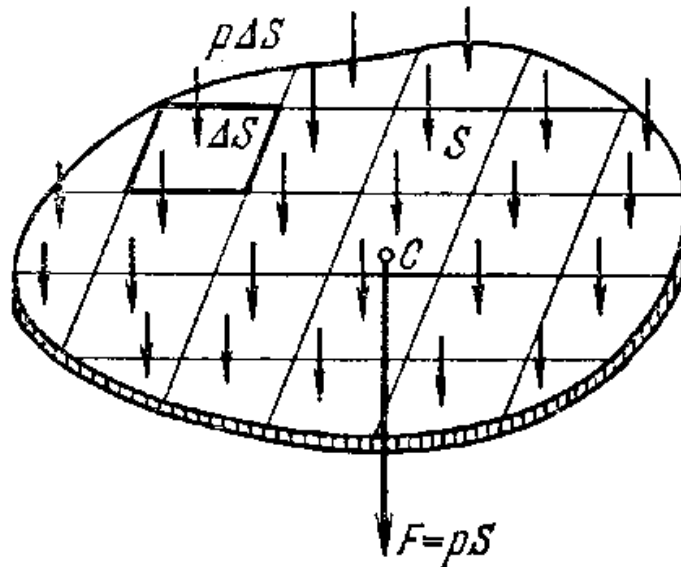
Ինչպես ծավալային մարմինների դեպքում է, այնպես էլ գծային և մակերևութային բաշխումների դեպքում կարելի է ներմուծել խտության գաղափար: Գծային և մակերևութային խտությունները համապատասխանաբար հավասար են մարմնի էլեմենտի զանգվածի և երկարության տարրի ու մակերևույթի տարրական մակերեսի հարաբերությանը՝ $\lambda = \Delta m / \Delta l$, $\sigma = \Delta m / \Delta S$: Եթե մարմինը համասեռ է, ապա $\lambda = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$:

Քանի որ նյութական գծերն ու մակերևույթները օժտված են զանգվածով, կարելի է խոսել դրանց զանգվածների կենտրոնի մասին: Նույն ձևով, հեշտ է ցույց տալ, որ համասեռ գծերի և մակերևույթների զանգվածների կենտրոնների դիրքերը կախված չեն դրանց խտությունից (գծային և մակերևութային): Այդ պատճառով համասեռ նյութական լարի զանգվածի կենտրոնին անվանում են լարի կամ գծի զանգվածի կենտրոն, իսկ նյութական նրբաթիթեղի զանգվածի կենտրոնին համապատասխան մակերևույթի զանգվածի կենտրոն:

Ճնշման կենտրոն: Դիցուք S մակերեսով հարթ մակերևույթի վրա ազդում է P ճնշում (Նկ. 30): Քանի որ մակերևույթի տարբեր մասերի վրա ազդող ճնշման ուժերը միմիանց գուցահեռ են, ապա դրանց համագործը որոշվում է հետևյալ բանաձևով

$$F = PS$$

և կիրառված է դրանց C կենտրոնի վրա: Այդ կետին անվանում են ճնշման կենտրոն: Ակնհայտ է, որ հարթ մակերևույթի վրա գործող հաստատուն ճնշման կենտրոնը



համընկնում է այդ մակերևույթի ծանրության կենտրոնի հետ:

Պոտենցիալ էներգիա: Ավագ դպրոցի Ֆիզիկայի դասընթացից ծանրության ուժով պայմանավորված պոտենցիալ էներգիայի համար հայտնի են հետևյալ սահմանումն ու հատկությունները:

ա/ Նյութական կետի պոտենցիալ էներգիան որոշվում է PH արտահայտությամբ, որտեղ P - ն նրա վրա ազդող ծանրության ուժն է, իսկ H - ը նյութական կետի բարձրությունն է զրոյական մակարդակից:

բ/ Նյութական կետերի համակարգի պոտենցիալ էներգիան հավասար է նրա բոլոր մասնիկների պոտենցիալ էներգիաների գումարին:

գ/ Պինդ մարմնի պոտենցիալ էներգիան որոշվում է PH_C արտահայտությամբ, որտեղ H_C - ն այդ մարմնի զանգվածի կենտրոնի բարձրությունն է զրոյական մակարդակից:

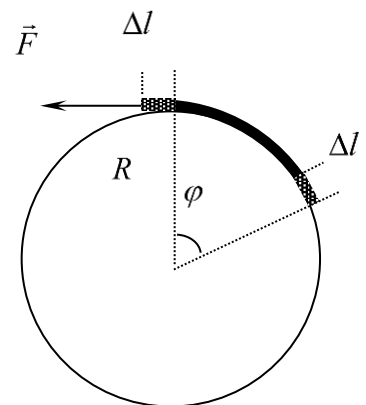
Քանի որ նյութական լարն ու մակերևույթը նույնպես օժտված են զանգվածով և դրանց վրա նույնպես ազդում են ծանրության ուժեր, ապա վերը նշված $p/$ և $q/$ կետերը վերաբերվում են նաև նրանց:

1.2. Որոշ մակերևույթների և կորերի զանգվածների կենտրոնների որոշումը

Դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ համասեռ ուղղանկյան, շրջանի և շրջանագծի զանգվածների կենտրոնները գտնվում են դրանց երկրաչափական կենտրոններում, իսկ եռանկյանը՝ միջնագծերի հատման կետում: Անցնենք առավել բարդ դեպքերի քննարկմանը:

Շրջանային աղեղ: Որոշենք φ կենտրոնական սուր անկյունով և R շառավղով համասեռ շրջանագծային աղեղի զանգվածի կենտրոնը:

Դիտարկենք աղեղի չափերն ու ձևն ունեցող m զանգվածով բարակ համասեռ պարան, որը նկ. 1 - ում պատկերված ձևով հորիզոնական ուղղված \vec{F} ուժի ազդեցության շնորհիվ պահվում է R շառավղով անշարժ ողորկ գլանի վրա: Եթե \vec{F} ուժի մոդուլը հավասարակշռության արժեքից մի փոքր մեծ լինի, ապա պարանը Δl -ով տեղափոխվելիս այն կկատարի



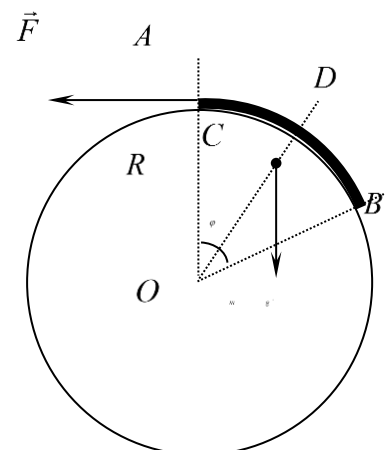
Նկ. 1

$$A = F \Delta l$$

աշխատանք, որի հետևանքով պարանի պոտենցիալ էներգիան կաճի

$$\Delta E_p = \frac{m \Delta l}{l} g R (1 - \cos \varphi)$$

չափով (մտովի պատկերացնենք, որ պարանի Δl երկարությամբ մի կտոր մի ծայրից տեղափոխվում է մյուսը՝ տես նկ. 1): Պարանը բարձրացնող ուժի արժեքը այն դադարի վիճակում պահելու համար անհրաժեշտ արժեքի ձգտեցնելու հետևանքով պարանի կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը ձգտում է զրոյի: Հաշվի առնելով նաև շփման ուժերի բացակայությունը, լրիվ



Նկ. 2

մեխանիկական էներգիայի փոփոխության թեորեմից [Ֆիզ 10] ստանում ենք, որ \vec{F} ուժի կատարած աշխատանքը հավասար է պարանի պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությանը՝

$$A = \Delta E_p,$$

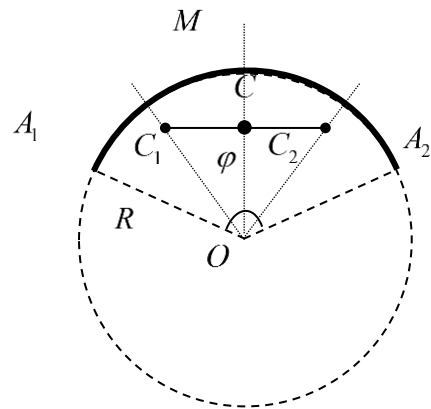
որտեղից էլ ուժի մոդուլի համար ստանում ենք հետևյալ տեսքը.

$$F = \lambda g R (1 - \cos \varphi),$$

որտեղ $\lambda = m/l$ - ն պարանի զծային խտությունն է:

Այժմ, երբ արդեն որոշված է ուժի մոդուլը, պարանի հավասարակշռության համար, O կետով անցնող զլանի համաչափության առանցքի նկատմամբ, կիրառենք

մոմենտների կանոնը: Պարանի տարբեր մասերի վրա ազդող հակազդեցության բոլոր ուժերի ազդման գծերը անցնում են զլանի համաչափության առանցքով և վերջինիս նկատմամբ մոմենտ չեն առաջացնում: Փաստորեն, զլանի համաչափության առանցքի նկատմամբ \vec{F} ուժի մոմենտը համակշռված է $m\vec{g}$ ծանրության ուժի մոմենտով: Վերջինս կիրառված է պարանի



ծանրության C կենտրոնի վրա, որը գտնվում է պարանի համաչափության առանցքի, այսինքն AOB անկյան OD կիսորդի վրա: Զանգվածի C կենտրոնի հեռավորությունը O -ից նշանակենք x_C - ով: Նկար 2 - ից պարզ է, որ զլանի համաչափության առանցքի

նկատմամբ \vec{F} ուժի բազուկը R է, իսկ $m\vec{g}$ ծանրության ուժինը՝ $x_C \sin \frac{\varphi}{2}$: Հետևաբար, համաձայն մոմենտների կանոնի՝

$$FR = mgx_C \sin \frac{\varphi}{2},$$

որտեղից, հաշվի առնելով ուժի համար ստացված $F = \lambda g R (1 - \cos \varphi)$ տեսքը, պարանի զանգվածի կենտրոնի հեռավորության համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը (նկ. 2)՝

$$x_c = \frac{2R}{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (2)$$

որտեղ φ անկյունը արտահայտված է ռադիաններով:

Պարզ է, որ զանգվածի կենտրոնի դիրքի որոշման նկարագրված եղանակը իմաստ ունի երբ $\varphi \leq \pi/2$: Երբ աղեղի կենտրոնական անկյունը մեծ է $\pi/2$ - ից, կարելի է դիտարկել պարանի հավասարակշռության ուրիշ իրավիճակներ և նորից նույն մոտեցմամբ որոշել նրա զանգվածի կենտրոնը: Սակայն նման դեպքերում ավելի հեշտ է աղեղը բաժանել սուր կենտրոնական անկյունով աղեղների և օգտվել դրանց համար վերևում ստացված բանաձևից:

Այսպես, դիցուք $\pi/2 < \varphi < \pi$: Աղեղը OM կիսորդով բաժանենք երկու սուր $\varphi/2$ կենտրոնական անկյուններով հավասարամեծ մասերի, որոնց զանգվածների C_1 և C_2 կենտրոնները, համաձայն վերևում ստացվածի, աղեղի կենտրոնից կունենան $x_{C_1} = x_{C_2} = \frac{4R}{\varphi} \sin \frac{\varphi}{4}$ հեռավորություն: Նկար 3 -ից ակնհայտ է, որ

$$x_c = x_{C_1} \cos \frac{\varphi}{4} = \frac{4R}{\varphi} \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4} = \frac{2R}{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2}:$$

Այսպիսով, ստացանք, որ բուժ և փոված անկյունների դեպքում էլ աղեղի զանգվածի կենտրոնի դիրքը որոշվում է նույն բանաձևով:

Պարանի՝ երկու կեսերի բաժանման վերը նկարագրված եղանակով դժվար չէ ցուց տալ, որ ստացված բանաձևով կարելի է հաշվել նաև $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ կենտրոնային անկյունով աղեղի զանգվածի կենտրոնի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից:

Շրջանային սեկտոր: Որոշենք φ կենտրոնական սուր անկյունով և R շառավղով համասեռ շրջանագծային սեկտորի զանգվածի կենտրոնը:

Դիտարկենք R շառավղով նյութական սեկտոր, որը ազատ կերպով կարող է պտտվել O անշարժ կետով անցնող առանցքի նկատմամբ: Սեկտորի ծայրից, շոշափողի ուղղությամբ նրա վրա ազդում է \vec{F} ուժ, որը սեկտորին պահում է հավասարակշռության վիճակում (Նկ. 4): Եթե F ուժի մեծությունը աննշան չափով մեծացնենք, ապա նրա կիրառման կետի Δl չափով տեղափոխության ընթացքում այն կկատարի

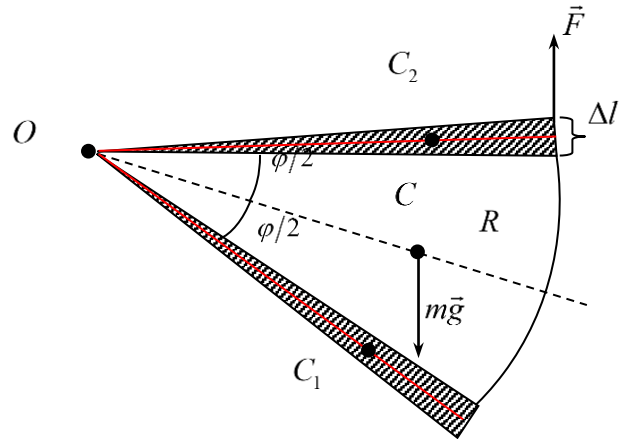
$$\Delta A = F \Delta l, \quad (3)$$

աշխատանք, որի արդյունքում սեկտորի պոտենցիալ էներգիան կաճի

$$\Delta E_p = \Delta mgh, \quad (4)$$

չափով, քանի որ արդյունքում նրա Δl հիմքով նեղ սեկտորյալ կտորը ստորին դիրքից տեղափոխվում է վերին դիրք:

(4) բանաձևում Δm - ը վերը նշված նեղ սեկտորի զանգվածն է, h - ը նրա զանգվածի կենտրոնի C_1 կետից C_2 կետ բարձրացման չափն է: Քանի որ Δl - ը փոքր է ($\Delta l \ll R$) այդ սեկտորը կարելի է համարել եռանկյուն: Այդ պատճառով էլ սեկտորների C_1 և C_2 զանգվածների կենտրոնները գտնվում են իրենց հիմքերից $R/3$ հեռավորության վրա,



Նկ. 4

այսինքն O գագաթից $2R/3$ հեռավորության վրա: Այդ դեպքում h -ի համար ստանում ենք $h = \frac{2}{3} R \sin \varphi$ և (2) արտահայտության համար ստանում ենք

$$\Delta E_p = \Delta m g \frac{2}{3} R \sin \varphi, \quad (5)$$

Լրիվ մեխանիկական էներգիայի փոփոխության օրենքի համաձայն հավասարեցնելով (3) և (5) - ը և հաշվի առնելով, որ

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta S}{S} = \frac{\frac{1}{2} R^2 \Delta \varphi}{\frac{1}{2} R^2 \varphi} = \frac{\Delta \varphi}{\varphi} = \frac{\Delta l}{R \varphi},$$

ստանում ենք

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta l} g \frac{2}{3} R \sin \varphi = \frac{1}{R \varphi} m g \frac{2}{3} R \sin \varphi = \frac{2}{3} m g \frac{\sin \varphi}{\varphi}. \quad (6)$$

Ելնելով համաչափության նկատառումներից կարելի է պնդել, որ սեկտորի զանգվածի C կենտրոնը գտնվում է φ անկյան կիսորդի վրա: r_c - ով նշանակենք

զանգվածի այդ C կենտրոնի հեռավորությունը սեկտորի O կենտրոնից: Գրենք մոմենտների կանոնը O կետով անցնող առանցքի նկատմամբ (Նկ. 4).

$$FR = mgr_c \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (7)$$

(6) – ը տեղադրելով (7) – ի մեջ, ի վերջո ստանում ենք, որ սեկտորի զանգվածի կենտրոնը գտնվում է նրա համաչափության առանցքի վրա, O կետից

$$r_c = \frac{4 \sin(\varphi/2)}{3 \varphi} R. \quad (7)$$

հեռավորության վրա, որտեղ φ անկյան չափն արտահայտված է ռադիաններով:

Պարզ է, որ սեկտորի զանգվածի կենտրոնի դիրքի որոշման նկարագրված եղանակը իմաստ ունի երբ կենտրոնական անկյունը ընդունում է $0 < \varphi \leq \pi$ արժեքներ: $\pi < \varphi < 2\pi$ դեպքում խնդիրը կարելի է լուծել համանման եղանակով, փոխելով միայն ուժի ուղղությունը: Այսպիսով (6) բանաձևի օգնությամբ կարելի է որոշել կամայական կենտրոնական անկյունով սեկտորի զանգվածի կենտրոնի դիրքը:

Նշենք, որ ինչպես շրջանային լարի, այնպես էլ սեկտորի զանգվածների կենտրոնի դիրքը ավանդաբար որոշում են մաթեմատիկական անալիզի դասընթացի շրջանակում՝ ինտեգրալ հաշվի կիրառմամբ [5]: Ներկայացված այս մոտեցումը թույլ է տալիս շրջանցել ինտեգրալի կիրառությունը, դուրս չգալով դպրոցական ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի շրջանակներից:

1.3. Ցիլինդրի դի ծավալի որոշումը ֆիզիկական բնույթի դատողությունների օգնությամբ

Դիտարկենք գլանային մակերևույթով (ոչ պարտադիր շրջանային) և երկու հարթություններով սահմանափակված մարմին: Հարթություններից մեկը ուղղահայաց է գլանի ծնորդին: Նման մարմնին անվանում են ցիլինդրիդ: Որոշենք այդ մարմնի ծավալը:

38 նկարում պատկերված է $ABDF$ գլանակերպը: Պատկերացնենք, որ այն բարձրացնում են փոքր h չափով, որի արդյունքում այն գրավում է $A'B'D'F'$ դիրքը: Մարմնի պոտենցիալ էներգիան մեծանում է հետևյալ չափով

$$E' - E = Ph = \gamma Vh \quad (8)$$

որտեղ P - ն մարմնի կշիռն է, V - ն՝ ծավալը, γ - ն տեսակարար կշիռը: Մյուս կողմից

$$E' = E_{A'BDF'} + E_{BB'D'D}$$

$$E = E_{A'BDF'} + E_{AA'FF}$$

Հետևաբար

$$E' - E = E_{BB'D'D} - E_{AA'FF} : \quad (9)$$

Այսինքն $E' - E$ հավասար է $BB'D'D$ և $AA'FF$ մարմինների պոտենցիալ էներգիաների տարբերությանը: Ակնհայտ է, որ այդ մարմինները ունեն նույն v ծավալը: Պարզ է, որ

$$E_{AA'FF} = v\gamma H_{C_1}, \quad E_{BB'D'D} = v\gamma H_{C_2} \quad (10)$$

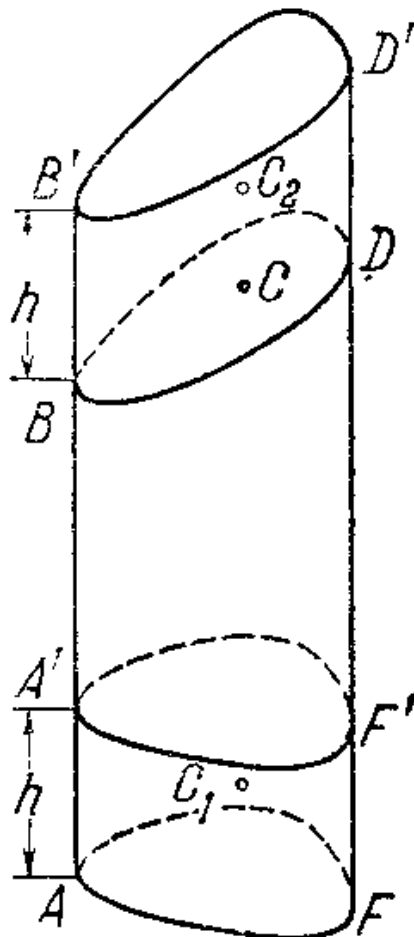
որտեղ C_1 և C_2 համապատասխանաբար $AA'FF$ և $BB'D'D$ ծավալների զանգվածների կենտրոններն են, իսկ H_{C_1} և H_{C_2} այդ զանգվածների կենտրոնների բարձրությունները AF հարթությունից: (10) – ը տեղադրելով (9) – ի մեջ ստանում ենք

$$E' - E = v\gamma(H_{C_2} - H_{C_1})$$

Այնուհետև, քանի որ $AA'FF$ - ը գլան է, ապա $v = Sh$, որտեղ S - ը գլանի AF հիմքի մակերեսն է, և ստանում ենք

$$E' - E = Sh\gamma(H_{C_2} - H_{C_1}) \quad (11)$$

Այսպիսով հաշվելով $E' - E$ մենք ստացանք (8) և (10) արտահայտությունները: Դրանք



հավասարեցնելով ստանում ենք

$$\gamma Vh = Sh\gamma(H_{C_2} - H_{C_1})$$

որտեղից

$$V = S(H_{C_2} - H_{C_1}) \quad (12)$$

Քանի որ (12) հավասարությունը ճիշտ է նաև որքան ասես փոքր h - ի համար, իսկ V - ն h - ից կախված չէ, ապա կարելի է գրել

$$V = \lim_{h \rightarrow 0} [S(H_{C_2} - H_{C_1})] = S(\lim_{h \rightarrow 0} H_{C_2} - \lim_{h \rightarrow 0} H_{C_1}) \quad (13)$$

Առանձին հաշվենք սահմանները: Նախ պարզ է, որ

$$\lim_{h \rightarrow 0} H_{C_1} = 0 \quad (14)$$

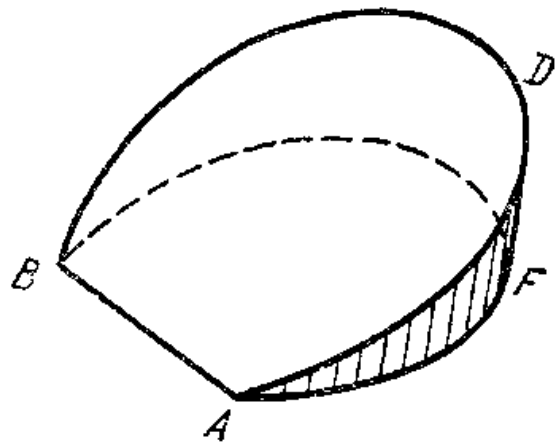
Այնուհետ, երբ $h \rightarrow 0$ B' և D' կետերը ձգտում են B և D կետերին, $BB'D'D$ մարմինը ձգտում է BD հիմքով հաստատուն հաստությամբ թիթեղի: Հետևաբար $h \rightarrow 0$ դեպքում C_2 կետը ձգտում է BD մակերևույթի զանգվածի կենտրոնին: Նշանակելով զանգվածի այդ կենտրոն C - ով ստանում ենք

$$\lim_{h \rightarrow 0} H_{C_2} = H_C \quad (15)$$

որտեղ H_C - ն C կետի բարձրությունն է AF հարթությունից: (14) և (15) տեղադրելով (13) - ի մեջ ստանում ենք

$$V = SH_C \quad (16)$$

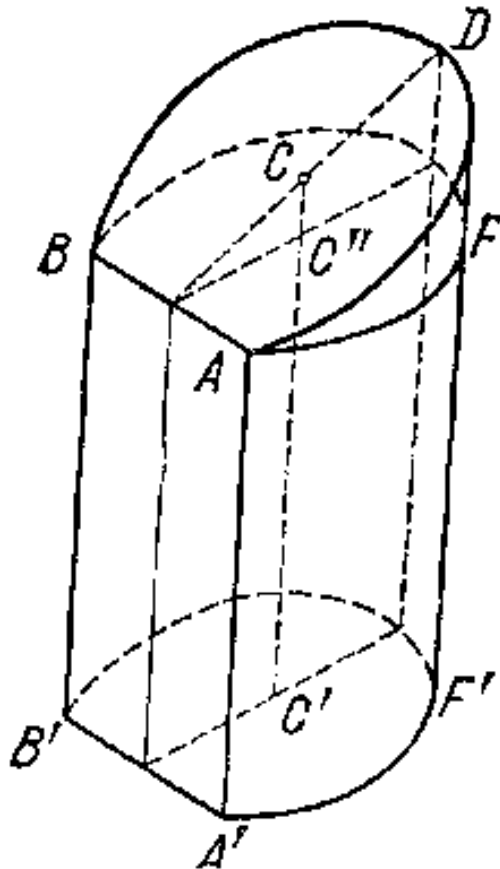
(16) հավասարությունից հետևում է, որ ցիլինդրոիդի ծավալը հավասար է նրա հիմքի մակերեսի և վերնից սահմանափակող մակերևույթի զանգվածի կենտրոնի արտադրյալին: Այս արդյունքը կարելի է կիրառել որոշ մարմինների ծավալների հաշվման համար:



(16) բանաձևի արտաձման հետ կապված անհրաժեշտ է անել մեկ դիտարկում: Արտաձման ժամանակ մենք ընդունել ենք h - ը այնքան փոքր, որ $A'F'$ հարթության

կետերը գտնվեն BD հարթության կետերից ներքև: Սակայն կան ցիլինդրոիդներ, որոնց համար դա հնարավոր չէ անել ոչ մի դրական h - ի համար: Այդպես կլինի այն դեպքում, երբ BD մակերևույթը ընդհանուր կետեր ունենա AF հիմքի հետ, օրինակ ինչպես պատկերված է 39 նկարում: Նման դեպքերը անհրաժեշտ է դիտարկել առանձին:

Կատարելով լրացուցիչ կառուցում $ABDF$ ցիլինդրոիդը լրացնենք՝ ստանալով



$A'B'BDF'$ գլանակերպը (Նկ. 40): Այդ դեպքում կարող ենք գրել

$$V_{ABDF} = V_{A'B'BDF'} - V_{A'B'BDF'F'} = S \cdot CC' - S \cdot C'C'' = S \cdot CC'' \quad (17)$$

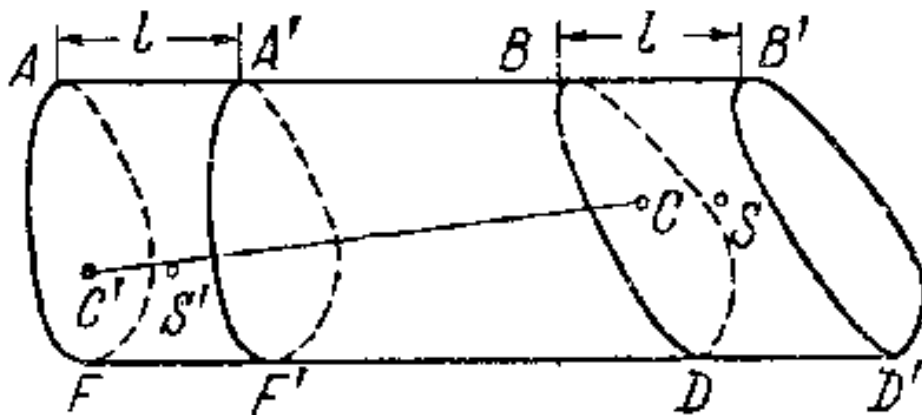
որտեղ $S = S_{ABF} = S_{A'B'F'}$, իսկ C - ն ABD հարթ մակերևույթի զանգվածի կենտրոնն է: Բայց CC'' - ը C կետի բարձրությունն է ABF հարթությունից: Հետևապես, (17) հավասարությունը կարելի է գրել հետևյալ ձևով

$$V_{ABDF} = S \cdot H_C$$

Յրտեղ H_C - ով նշանակել ենք զանգվածի C կենտրոնի բարձրությունը գլանի $ABDF$ հիմքից: Այսպիսով, (16) առնչությունը ճիշտ է նաև նկար 39 – ում պատկերված գլանակերպի համար:

Որպեսզի (16) բանաձևով որոշենք ցիլինդրոիդի ծավալը անհրաժեշտ է գիտենալ նրա վերին հիմքի զանգվածի կենտրոնը: Այդ կապակցությամբ կարող է օգտակար լինել հետևյալ թեորեմը.

Ցիլինդրոիդի հիմքերի զանգվածների կենտրոններով անցնող ուղիղը զուգահեռ է ծնիչին:



Ապացույց: Ցիլինդրոիդի հիմքերի մակերևույթների զանգվածների կենտրոնները նշանակենք C և C' - ով և ենթադրենք, որ CC' ուղիղը ծնիչին զուգահեռ չէ: Այդ դեպքում ցիլինդրոիդը կարելի է տեղադրել այնպես, որ նրա ծնիչները լինեն հորիզոնական ուղղությամբ, իսկ CC' ուղիղը՝ թեք (նկար 41 - ում պատկերված $ABDF$ գլանակերպը): Այդ դեպքում կունենանք՝

$$H_C \neq H_{C'}, \quad (18)$$

որտեղ H_C և $H_{C'}$ որևէ հորիզոնական մակերևույթի նկատմամբ C և C' կետերի բարձրություններն են:

Այժմ l չափով տեղափոխենք ցիլինդրոիդը իր ծնորդների ուղղությամբ: Այդ դեպքում այն կգրավի $A'B'D'F'$ դիրքը և քանի որ նրա յուրաքանչյուր մասնիկ տեղափոխվում է հորիզոնական ուղղությամբ գլանակերպի պոտենցիալ էներգիան կմնա անփոփոխ: Այսպիսով

$$E_{A'B'D'F'} = E_{ABDF} \quad (19)$$

Բայց

$$E_{A'B'D'F'} = E_{A'BDF'} + E_{BB'D'D}, E_{ABDF} = E_{A'BDF'} + E_{AA'F'F}$$

և հետևապես (19) հավասարությունը ընդունում է հետևյալ տեսքը

$$E_{BB'D'D} = E_{AA'F'F} \quad (20)$$

Այնուհետ

$$E_{BB'D'D} = P_{BB'D'D} H_S \quad E_{AA'F'F} = P_{AA'F'F} H_{S'}$$

որտեղ S և S' - ը $BB'D'D$ և $AA'F'F$ զանգվածների կենտրոններն են: Այս արտահայտությունները տեղադրելով (20) - ի մեջ և հաշվի առնելով, որ $P_{BB'D'D} = P_{AA'F'F}$ ստանում ենք

$$H_S = H_{S'} \quad (21)$$

Դիտարկենք $l \rightarrow 0$ դեպքը: Այդ դեպքում $BB'D'D$ մարմինը կարելի է դիտարկել որպես համասեռ BD թիթեղ, իսկ S զանգվածի կենտրոնը կարելի է նույնականացնել C - ի հետ: Այսպիսով երբ $l \rightarrow 0$, S կետը ձգտում է C կետին, հետևաբար

$$\lim_{l \rightarrow 0} H_S = H_C \quad (22)$$

Համանման ձևով ստանում ենք

$$\lim_{l \rightarrow 0} H_{S'} = H_{C'} \quad (23)$$

և (21), (22) ու (23) - ից ստանում ենք

$$H_C = H_{C'}$$

Բայց քանի որ ստացված արդյունքը հակասում է (18) - ին, ապա ենթադրությունը առ այն, որ CC' ուղիղը գուգահեռ չէ ցիլինդրոիդի ծնիչին սխալ է:

Ապացուցված թեորեմը ցույց է տալիս, որ վերին հիմքի զանգվածի կենտրոնը գտնվում է ստորին հիմքի զանգվածի կենտրոնի ճիշտ վերևում: Դիտարկեն ծավալի որոշման երկու խնդիր:

Խնդիր 1: Որոշել նկար 42 –ում պատկերված եռանիստ ցիլինդրոիդի ծավալը:

C և C' - ով նշանակենք նրա ստորին և վերին հիմքերի զանգվածների կենտրոնները:

Այդ դեպքում համաձայն (16) - ի կունենանք

$$V = S \cdot CC' \quad (24)$$

որտեղ S - ը ABD եռանկյան մակերեսն է: Քանի որ եռանկյան ծանրության կենտրոնը գտնվում է նրա միջնագծերի հատման կետում, ապա

$$C'F' = \frac{1}{3} B'F'$$

և հետևապես

$$LC' = \frac{1}{3} KB'$$

Այսպիսով

$$CC' = FF' + \frac{1}{3}(BB' - FF') = \frac{2FF' + BB'}{3},$$

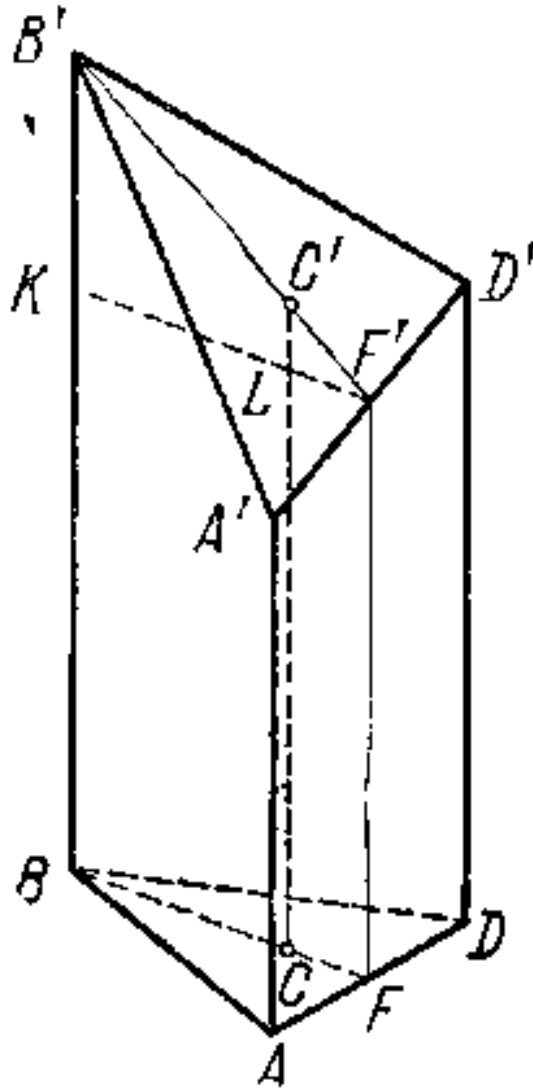
և հաշվի առնելով, որ

$$FF' = \frac{1}{2}(AA' + DD'),$$

ստանում ենք

$$CC' = \frac{AA' + BB' + DD'}{3}$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (24) – ի մեջ կստանանք



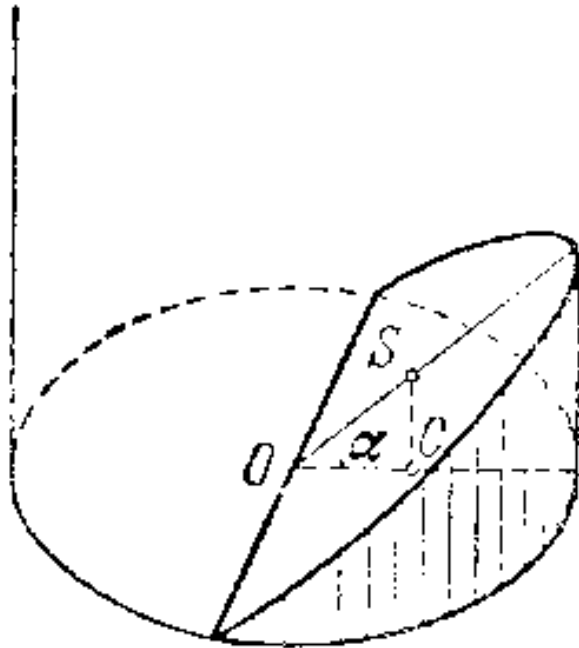
$$V = S \frac{AA' + BB' + DD'}{3} \quad (25)$$

AA' , BB' և DD' բարձրությունները նշանակելով H_1 , H_2 , H_3 կարելի է գրել

$$V = S \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3} \quad (26)$$

Այս արտադրյալի երկրորդ գումարելին կարելի է դիտարկել որպես եռանիստ ցիլինդրի միջին բարձրություն:

Խնդիր 2: Որոշել նկար 43 - ում պատկերված մարմնի ծավալը:



Համաձայն (16) բանաձևի մարմնի ծավալը կլինի

$$V = \frac{\pi R^2}{2} \cdot CS = \frac{\pi R^2}{2} \cdot OC \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

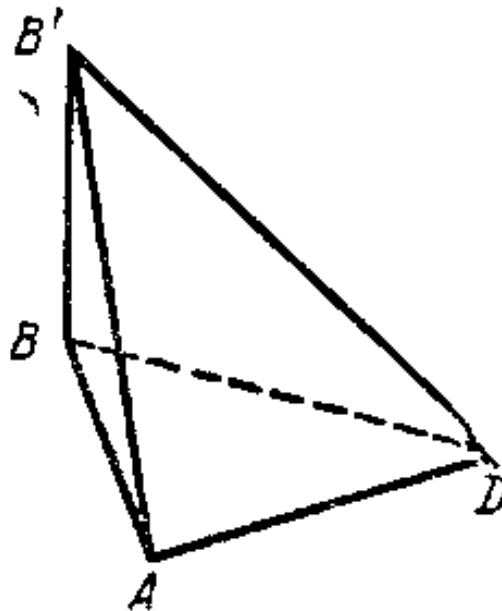
որտեղ C - ն ցիլինդրոիդի հիմք հանդիսացող կիսաշրջանի զանգվածի կենտրոնն է: Կիսաշրջանը շրջանային սեկտորի մասնավոր դեպք է: Օգտվելով (7) բանաձևից կարելի է գրել

$$OC = \frac{4R}{3\pi}$$

Հետևաբար որոնելի մարմնի ծավալի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը

$$V = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{4R}{3\pi} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha$$

Բուրգի ծավալը: Դիտարկենք եռանկյուն պրիզմա, որի կողմնային կողերից մեկը



նւղղահայաց է հիմքին (Նկ. 44): Քանի որ վերջինս հանդիսանում է 42 նկարում պատկերված եռանիստ ցիլինդրի մասնավոր դեպք, ապա նրա ծավալը կարելի է հաշվել (26) բանաձևի օգնությամբ: Այդ բանաձևում տեղադրելով $H_1 = H_3 = 0$, $H_2 = H$ ստանում ենք

$$V = \frac{1}{3}SH :$$

Այժմ դիտարկենք կամայական բուրգ (Նկ. 45): Նրան կարելի է տրոհել նկար 44 – ում պատկերված մի քանի եռանկյուն բուրգերի: Օրինակ, նկար 45 - ում պատկերված բուրգը կարելի է տրոհել ընդհանուր OO' կողով չորս եռանկյուն բուրգերի որոնց ծավալների համար կունենանք

$$V_1 = \frac{1}{3}S_1H,$$

$$V_2 = \frac{1}{3}S_2H,$$

$$V_3 = \frac{1}{3}S_3H,$$

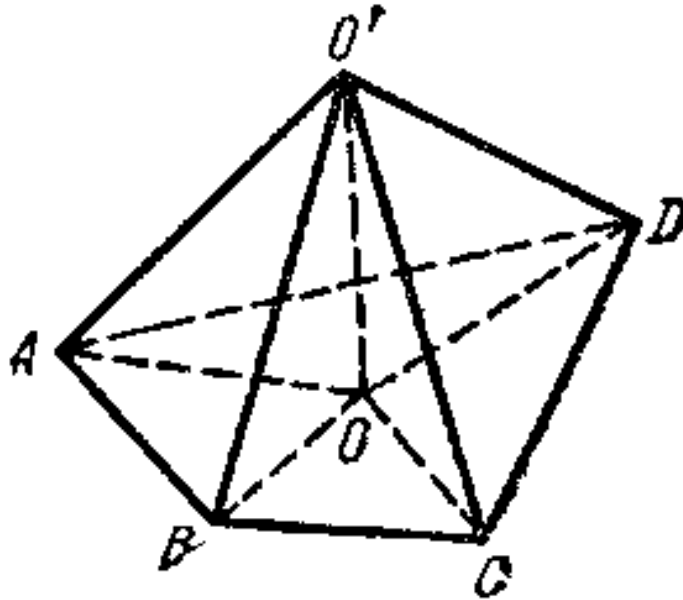
$$V_4 = \frac{1}{3}S_4H,$$

որտեղից

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \dots = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)H,$$

Հետևաբար

$$V = \frac{1}{3}SH:$$



որտեղ S - ը $ABCD$ հիմքի մակերեսն է:

ԳԼՈՒԽ Բ

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՈՐՈՇ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԵՎ ՀԱՐՑԵՐՈՒՄ

2.1. Նյութական կետերի համակարգի զանգվածների կենտրոնի բանաձևի կիրառությունները երկրաչափության դպրոցական դասընթացում:

Միջառարկայական կապերի վեր հանման տեսանկյունից առանձին դեպքերում ֆիզիկական գործիքակազմը ոչ միայն ծառայում է որպես արժեքավոր եվրիստիկ գործիք մաթեմատիկական խնդրի մեկնաբանման համար, այլև թույլ է տալիս ստանալ երկրաչափական և հանրահաշվական խնդիրների մաթեմատիկորեն կատարյալ և ինքնատիպ լուծումներ: Մասնավորապես, զանգվածի կենտրոն հասկացության զուտ մաթեմատիկական սահմանումը թույլ է տալիս նոր ձևով ներկայացնել բազմաթիվ երկրաչափական խնդիրների լուծումները:

Ստորև, օգտագործելով նյութական կետերի զանգվածի կենտրոնի կոորդինատների որոշման բանաձևերը, կառաջարկենք ֆիզիկական «գործիքակազմի» կիրառմամբ լուծումներ երկրաչափական տարբեր բազմամակարդակ խնդիրների համար:

Ինչպես հայտնի է ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից, նյութական կետերի համակարգի վարքագիծն ուսումնասիրելիս հաճախ հարմար է օգտագործել այն կետը, որը բնութագրում է դիտարկվող համակարգի դիրքն ու շարժումը որպես ամբողջություն: Այդ կետը համակարգի զանգվածի կենտրոնն է:

Պայմանավորվենք, համապատասխանաբար $m_1; m_2; \dots; m_n$ զանգվածներով $A_1(m_1); A_2(m_2); \dots; A_n(m_n)$ նյութական կետերի զանգվածի C կենտրոնը նշանակել հետևյալ կերպ՝ $Z(A_1(m_1); A_2(m_2); \dots; A_n(m_n)) \equiv C$:

Սահմանում 1: $A_1(m_1); A_2(m_2); \dots; A_n(m_n)$ նյութական կետերի զանգվածի կենտրոն կոչվում է այն $Z(A_1(m_1); A_2(m_2); \dots; A_n(m_n))$ կետը, որի համար տեղի ունի

$$m_1 \overline{ZA_1} + m_2 \overline{ZA_2} + \dots + m_n \overline{ZA_n} = \vec{O} \quad (5)$$

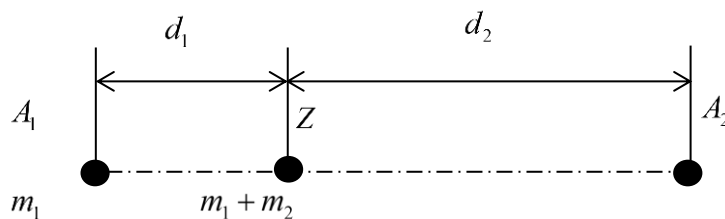
հավասարությունը [7]:

Պետք է ի նկատի ունենալ, որ եթե ունենք վերջավոր քանակի նյութական կետերի համակարգ, ապա.

ա) այդ համակարգը միշտ ունի զանգվածի կենտրոն և այն միակն է,

բ) այդ համակարգը միշտ կարելի է փոխարինել իր զանգվածի կենտրոնում «տեղակայված» գումարային զանգվածով նյութական կետով,

գ) վերջինիս զանգվածի կենտրոնը որոշելու համար կարելի է այն ուզած ձևով բաժանել վերջավոր ենթահամակարգերի, որոշել յուրաքանչյուր ենթահամակարգի զանգվածի կենտրոնը, որից հետո, ամեն մի ենթահամակարգ փոխարինել իր զանգվածի կենտրոնում «տեղակայված» գումարային զանգվածով նյութական կետով և վերջում որոշել ստացված նյութական կետերի «նոր» համակարգի զանգվածի կենտրոնը (որը, բնականաբար, կհամընկնի ելակետային նյութական կետերի համակարգի զանգվածի կենտրոնի հետ) [7]:



Նկ. 4 $A_1(m_1)$ և $A_2(m_2)$ նյութական կետերի համակարգի զանգվածի կենտրոնը

Ի նկատի ունենալով (2)-ը և (5)-ը, հեշտ է նկատել, որ մասնավորաբար $n = 2$ դեպքում $A_1(m_1)$ և $A_2(m_2)$ նյութական կետերի համակարգի զանգվածի $Z(A_1(m_1); A_2(m_2))$ կենտրոնը պատկանում է A_1A_2 հատվածին (տես նկ. 4), որի համար տեղի ունի Արքիմեդի լծակի կանոնը [3], այն է.

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 : \quad (6)$$

(5)-ից անմիջականորեն հետևում է, որ նյութական կետերի համակարգի զանգվածի կենտրոնի շառավիղ վեկտորը տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{m}, \quad (7)$$

որտեղ m_i -ն i -րդ մարմնի-նյութական կետի զանգվածն է, \bar{r}_i -ն վերջինիս շառավիղ վեկտորն է, որը որոշում է այդ մարմնի դիրքը տարածության մեջ, իսկ m -ը համակարգի գումարային զանգվածն է [7]: (7) վեկտորական հավասարությունը պրոյեկտելով դեկարտյան կոորդինատային առանցքների վրա, կստանանք մեխանիկական համակարգի զանգվածի կենտրոնի կոորդինատների որոշման վերլուծական բանաձևեր: Մասնավորապես, երկչափ տիրույթում նյութական կետերի համախմբի զանգվածի կենտրոնի կոորդինատների համար կստանանք.

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m},$$

որտեղ x_i -ն և y_i -ն m_i զանգվածով նյութական կետի կոորդինատներն են, համապատասխանաբար, X և Y առանցքների վրա:

Առհասարակ, զանգվածների կենտրոնի կիրառմամբ երկրաչափական տարբեր խնդիրներ լուծելիս կօգտվենք հետևյալ ակնհայտ փաստից, այն է. n հատ ($n > 2$) նյութական կետերի զանգվածի կենտրոնը չի փոխվի, եթե նրանցից մի քանիսը փոխարինենք վերջիններիս զանգվածի կենտրոնով՝ գումարային զանգվածով:

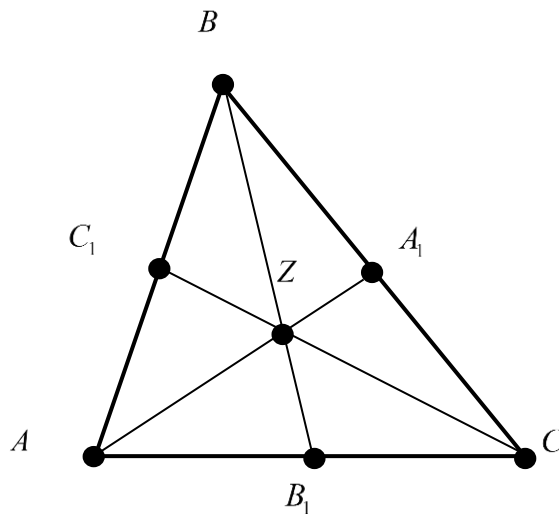
Այժմ դիտարկենք երկրաչափության դպրոցական դասընթացում հանդիպող բազմամակարդակ խնդիրներ (և/կամ թեորեմներ, հատկություններ), որոնց լուծման (և/կամ ապացուցման) ընթացքում կօգտվենք նյութական կետերի զանգվածի կենտրոնի վերոգրյալ ֆիզիկական «գործիքակազմից»:

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ կամայական եռանկյան միջնագծերը հատվում են մեկ կետում և այդ կետով յուրաքանչյուր միջնագիծ բաժանվում է 2:1 հարաբերությամբ մասերի՝ հաշված գագաթից: [8]

Լուծում: Դիտարկենք կամայական $\square ABC$ եռանկյունը, որում A_1 -ը, B_1 -ը և C_1 -ը, համապատասխանաբար, BC ; AC և AB կողմերի միջնակետերն են և որի բոլոր գագաթներում «տեղակայված» են միևնույն m_0 զանգվածներ (տես նկ. 5): Այժմ, համաձայն վերոգրյալի, որոշենք $\square ABC$ -ի ծանրության Z կենտրոնը: Ունենք՝ $Z \equiv Z(A(m_0); B(m_0); C(m_0)) \equiv Z(A(m_0); A_1(2m_0)) \Rightarrow \Rightarrow Z \in AA_1$: Նույն կերպ

կատանանք՝ $Z \equiv Z(A(m_0); B(m_0); C(m_0)) \equiv Z(B(m_0); B_1(2m_0)) \Rightarrow Z \in BB_1$ և
 $Z \equiv Z(A(m_0); B(m_0); C(m_0)) \equiv Z(C(m_0); C_1(2m_0)) \Rightarrow Z \in CC_1$, հետևաբար
 $Z \equiv AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$: Այսպիսով, ունենք՝ $Z \equiv Z(A(m_0); A_1(2m_0))$, որտեղից, համաձայն
(6)-ի, կատանանք՝ $m_0 \cdot AZ = 2m_0 \cdot A_1Z \Rightarrow AZ : A_1Z = 2 : 1$: Նույն կերպ կապացուցենք,
որ $BZ : B_1Z = CZ : C_1Z = 2 : 1$: Խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Հավելենք, որ խնդիր 1-ի լուծման «ավանդական» մաթեմատիկական մոտեցման



*Նկ. 5 Z ծանրության կենտրոնով $\square ABC$, որի
յուրաքանչյուր գագաթում տեղակայված է m_0 զանգված*

համաձայն, խնդրի պնդման ապացուցման համար ցույց է տրվում, որ եթե AA_1 և CC_1
միջնագծերն հատվում են Z կետում, ապա BZ -ը եռանկյան AC կողմը հատում է
վերջինիս միջնակետում, ինչի համար, օգտվելով Թալեսի թեորեմից և եռանկյան
միջին գծի հատկությունից, նախապես ապացուցվում է, որ BZ -ը $\square ABC$ եռանկյան
 C_1A_1 միջին գիծը հատում է վերջինիս միջնակետում:

Խնդիր 1-ի լուծման ընթացքում կիրառված ֆիզիկական մոտեցմանը համանման
հեշտությամբ կարելի է լուծել նաև, մասնավորապես, հետևյալ խնդիրները:

Խնդիր 2: Ապացուցել, որ ցանկացած ուռուցիկ քառանկյան հանդիպակաց
կողմերի և անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատվում են մեկ
կետում և այդ կետով կիսվում են [4]:

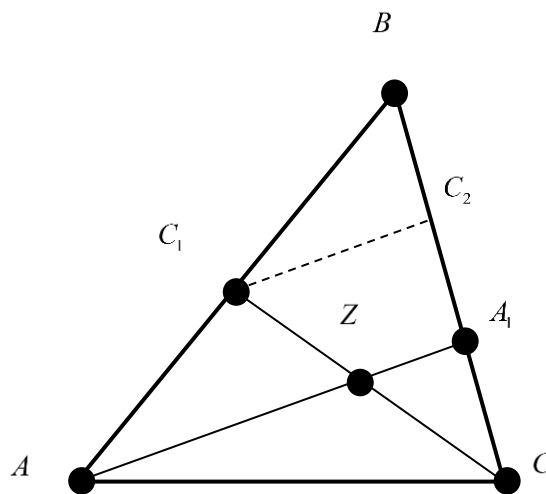
Խնդիր 3: Դիցուք $A_1; B_1; C_1; D_1; E_1; F_1$ -ը $ABCDEF$ ուռուցիկ վեցանկյան համապատասխանաբար $AB; BC; CD; DE; EF; FA$ կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցել, որ $\square A_1C_1E_1$ և $\square B_1D_1F_1$ եռանկյունների միջնագծերի հատման կետերը համընկնում են [9]:

Նշենք, որ ինչպես խնդիր 2-ում, այնպես էլ խնդիր 3-ում (խնդիր 1-ի լուծմանը համանման), անհրաժեշտ է նախապես տրված ելակետային ուռուցիկ բազմանկյան բոլոր գագաթներում տեղակայել միևնույն զանգվածով նյութական կետեր, որից հետո խնդիր 2-ի պարագայում ելակետային ուռուցիկ քառանկյան ծանրության կենտրոնը որոշել՝ չորս գագաթները խմբավորելով երկու ենթախմբերի՝ կամ ըստ «հարևանության» կամ ըստ «հանդիպակացության» (անկյունագծի ծայրակետեր), իսկ խնդիր 3-ի պարագայում ելակետային ուռուցիկ վեցանկյան ծանրության կենտրոնը որոշել՝ վեց գագաթները խմբավորելով երեք ենթախմբերի՝ կամ $\langle A;B \rangle; \langle C;D \rangle; \langle E;F \rangle$ կամ $\langle B;C \rangle; \langle D;E \rangle; \langle F;A \rangle$ տարբերակներով:

Դիտարկենք ևս մեկ խնդիր:

Խնդիր 4: $\square ABC$ եռանկյան BC կողմի վրա ընտրված է A_1 կետն այնպես, որ $BA_1 : A_1C = 2:1$: Պարզել, ի՞նչ հարաբերությամբ մասերի է բաժանում CC_1 միջնագիծը AA_1 հատվածը (տես նկ. 6) [9]:

Լուծում: $\square ABC$ եռանկյան $A; B$ և C գագաթներում «տեղակայենք», համապատասխանաբար, $m_0; m_0$ և $2m_0$ զանգվածներ: Որոշենք $\square ABC$ -ի ծանրության



Նկ. 6 Z ծանրության կենտրոնով $\square ABC$, որի $A;B;C$ գագաթներում տեղակայված են համապատասխանաբար $m_0; m_0$ և $2m_0$ զանգվածներ

Z կենտրոնը: Ունենք՝ $Z \equiv Z(A(m_0); B(m_0); C(2m_0)) \equiv Z(C_1(2m_0); C(2m_0)) \Rightarrow Z \in CC_1; CZ = C_1Z$: Նույն կերպ, ի նկատի ունենալով, որ $BA_1 : A_1C = 2:1$, համաձայն (6)-ի կարող ենք գրել՝ $Z \equiv Z(A(m_0); B(m_0); C(2m_0)) \equiv Z(A(m_0); A_1(3m_0)) \Rightarrow Z \in AA_1; Z \equiv AA_1 \cap CC_1; AZ : A_1Z = 3:1$:

Պատ.՝ CC_1 միջնագիծը AA_1 հատվածը բաժանում է $3:1$ հարաբերությամբ մասերի:

Հավելենք, որ խնդիր 4-ի լուծման «ավանդական» մաթեմատիկական մոտեցման համաձայն, խնդրի պնդման ապացուցման համար նախապես կատարում ենք լրացուցիչ կառուցում, այն է՝ C_1 -ը միացնում ենք BA_1 հատվածի C_2 միջնակետին, որից հետո $\square CC_1C_2$ և $\square ABA_1$ եռանկյուններում կիրառելով եռանկյան միջին գծի հատկությունը, ի վերջո որոշում ենք որոնելի $AZ : A_1Z$ հարաբերությունը:

Խնդիր 4-ի լուծման ընթացքում կիրառված ֆիզիկական մոտեցմանը համանման հեշտությամբ կարելի է լուծել նաև, մասնավորապես, հետևյալ խնդիրները:

Խնդիր 5: $\square ABC$ եռանկյան A գագաթով տարված է ուղիղ, որը BM միջնագիծը տրոհում է $1:2$ հարաբերությամբ մասերի՝ հաշված գագաթից, ընդ որում այդ ուղիղը BC կողմը հատում է K կետում, իսկ BM միջնագիծը՝ N կետում: Գտնել $BK : BC$ հարաբերությունը [4]:

Խնդիր 6: $\square ABC$ եռանկյան AC կողմի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ $AM : AC = 1:3$, իսկ $[CB)$ ճառագայթի վրա ընտրված է N կետն այնպես, որ $BN = BC$: MN և AB հատվածները հատվում են P կետում: Որոշել $AP : BP$ և $MP : NP$ հարաբերությունները [7]:

Նշենք, որ ինչպես խնդիր 5-ում, այնպես էլ խնդիր 6-ում (խնդիր 4-ի լուծմանը համանման), անհրաժեշտ է նախապես տրված ելակետային եռանկյան գագաթներում (և/կամ նաև այլ կետերում) տեղակայել այնպիսի զանգվածներով նյութական կետեր, որ այդ նյութական կետերի համակարգի զանգվածի կենտրոնը խնդիր 5-ում համընկնի N , իսկ խնդիր 6-ում՝ P կետի հետ, ինչի համար անհրաժեշտ է խնդիր 5-ում $\square ABC$ եռանկյան $A; B$ և C գագաթներում տեղակայել, համապատասխանաբար, $m_0; 4m_0$ և m_0 զանգվածներ, իսկ խնդիր 6-ում՝ $A; C$ և N կետերում տեղակայել, համապատասխանաբար, $2m_0; m_0$ և m_0 զանգվածներ, որից հետո, օգտվելով լծակի

հավասարակշռության (6) պայմանից, անմիջականորեն որոշել պահանջվող հարաբերությունները:

Ի նկատի ունենալով դիտարկվող խնդիրների լուծումների ընթացքում կիրառված ֆիզիկական «գործիքակազմն» ու մոտեցումներն, ընդհանրացնելով, որպես մեթոդական ցուցում կարող ենք առաջարկել.

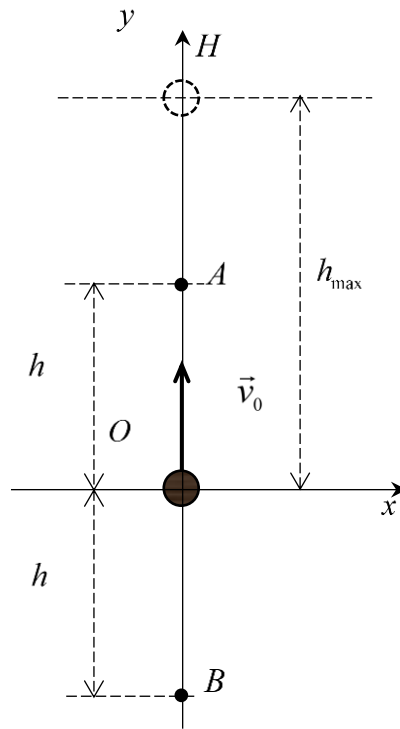
ա/ այնպիսի խնդիրներում, երբ անհրաժեշտ է ապացուցել, որ մի քանի հատվածներ հատվում են ինչ-որ Z կետում, պետք է նախապես որոշակի կետերում (որպես «կանոն», ելակետային բազմանկյան գագաթներում) տեղակայել այնպիսի զանգվածներ, որ (5)-(7) բանաձևերի միջոցով որոշվող ամբողջ համակարգի զանգվածի կենտրոնը համընկնի հենց այդ Z կետի հետ, իսկ պահանջվող պնդման ապացույցն էլ կհետևի նյութական կետերի համակարգը տարբեր կերպ ենթահամակարգերի բաժանման և վերջիններիս զանգվածի կենտրոնի որոշման շնորհիվ,

բ/ այնպիսի խնդիրներում, երբ անհրաժեշտ է գտնել, թե միննույն Z կետում հատվող երկու կամ ավելի հատվածներ այդ Z կետով ի՞նչ հարաբերությամբ մասերի են բաժանվում, անհրաժեշտ է նախապես որոշակի կետերում տեղակայել այնպիսի զանգվածներ, որ ամբողջ համակարգի զանգվածի կենտրոնը համընկնի հենց այդ Z կետի հետ, իսկ պահանջվող հարաբերություններն էլ որոշել լծակի հավասարակշռության (6) պայմանից:

2.2. Էներգիայի պահպանման օրենքի որոշ հանրահաշվական մեկնաբանություններ:

Խնդիր: Երկրի մակերևույթից որոշակի բարձրության վրա գտնվող O կետից գնդիկը նետում են ուղղաձիգ դեպի վեր v_0 սկզբնական արագությամբ: Որոշել, թե շարժման սկզբից հաշված որքան ժամանակ անց գնդիկը կհայտնվի իր սկզբնական դիրքից h հեռավորության վրա: Օդի դիմադրությունն անտեսել:

Լուծում: Ներմուծենք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ: Աբսցիսների առանցքն ուղղենք հորիզոնական ուղղությամբ, օրդինատների



Նկ. 1. \vec{v}_0 արագությամբ դեպի վեր նետված գնդիկի շարժումը:

առանցքը՝ ուղղաձիգ դեպի վեր, իսկ որպես կոորդինատների սկզբնակետ ընտրենք շարժման սկզբում գնդիկի երկրաչափական կենտրոնը (տես նկ. 1): Պարզ է, որ գնդիկը որոշակի ժամանակ կկատարի վերընթաց դանդաղող շարժում, որի ավարտին կհասնի h_{\max} առավելագույն բարձրության, մի պահ կանգ կառնի, որից հետո, մինչև սկզբնական դիրքը վերադառնալը, նույնքան ժամանակ կկատարի վարընթաց արագացող շարժում, ընդ որում օդի դիմադրության բացակայության դեպքում, գնդիկի ինչպես վերընթաց այնպես էլ վարընթաց շարժումների արագացումը g է:

Սկզբնական O դիրքից գտնվել h հեռավորության վրա, կնշանակի գտնվել A կամ B կետերում: Եթե որպես պոտենցիալ էներգիայի զրոյական մակարդակ ընտրենք նետման O կետով անցնող հորիզոնականը, ապա A կետում նրա

պոտենցիալ էներգիան կլինի mgh իսկ B կետում՝ $-mgh$, ընդ որում գնդիկը mgh պոտենցիալ էներգիա կարող է ունենալ մինչև իր սկզբնական դիրքը վերադառնալը, իսկ $-mgh$ պոտենցիալ էներգիա՝ սկզբնական դիրքը վերադառնալուց հետո: Պարզ է, որ գնդիկը վերընթաց շարժում կատարելով կհասնի որոշակի H դիրքի և այդ դիրքում կունենա առավելագույն պոտենցիալ էներգիա, այնուհետև, տվյալ դիրքում մի պահ կանգ առնելուց հետո, գնդիկը կկատարի վարընթաց շարժում՝ հետագա ողջ շարժման ընթացքում մեծացնելով արագությունը և նվազեցնելով պոտենցիալ էներգիան:

Նկատենք, որ ինչպես վերընթաց, այնպես էլ վարընթաց շարժման ժամանակ գնդիկի ազատ անկման արագացման պրոյեկցիան OY առանցքի վրա բացասական է, հետևաբար, գնդիկի y կոորդինատի ժամանակից ունեցած կախվածության համար կարող ենք գրել՝

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}:$$

Ուրեմն, պազելու համար, թե շարժման սկզբից հաշված ($t_0 = 0$) որքան ժամանակ անց գնդիկը կհայտնվի իր սկզբնական դիրքից h հեռավորության վրա, բավական է լուծել

$$\begin{cases} y = h \\ y = -h \end{cases} \text{ կամ } \begin{cases} v_0 t - \frac{gt^2}{2} = h \\ v_0 t - \frac{gt^2}{2} = -h \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

հավասարումների համախումբը: Ըստ էության, լուծելով համախմբի (1) հավասարումը, մենք կպարզենք, թե մինչև իր սկզբնական O դիրքը վերադառնալը գնդիկը երբ կգտնվի իր սկզբնական դիրքից h հեռավորության վրա, իսկ լուծելով համախմբի (2) հավասարումը, մենք կպարզենք, թե իր սկզբնական O դիրքը վերադառնալուց հետո գնդիկը երբ կգտնվի իր սկզբնական դիրքից h հեռավորության վրա:

Նախ քննարկենք գնդիկի h բարձրության վրա գտնվող A կետում հայտնվելու դեպքը: Ակնհայտ է, որ գնդիկը կարող է հայտնվել A կետում այն և միայն այն

դեպքում, երբ $h_{\max} \geq h$: Մյուս կողմից, էներգիայի պահպանման օրենքի համաձայն

$$\text{կունենանք՝ } \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\max} \geq mgh \Rightarrow v_0^2 - 2gh \geq 0:$$

Այսպիսով, կարող են պնդել, որ էներգիայի պահպանման օրենքի ուժով

$$v_0^2 - 2gh \geq 0 \quad (3)$$

անհավասարությունն այն անհրաժեշտ պայմանն է, որի բավարարման դեպքում միայն գնդիկը կարող է գտնվել h բարձրության վրա:

Այժմ պարզենք, թե (3) անհավասարության բավարարման դեպքում շարժման սկզբից հաշված որքան ժամանակ անց գնդիկը կհայտնվի A կետում: Վերոգրյալ համախմբի (1) հավասարման համար կունենանք՝

$$gt^2 - 2v_0t + 2h = 0, \quad (4)$$

կամ որ նույնն է.

$$\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 - 2gh}{g^2}: \quad (5)$$

Հեշտ է նկատել, որ t -ի նկատմամբ (4) քառակուսային հավասարման տարբերիչը համընկնում է (3) անհավասարության ձախ մասի հետ, հետևաբար, նաև էներգիայի պահպանման օրենքի ուժով, (3)-ը այն անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է, որի բավարարման դեպքում միայն (4) (կամ որ նույնն է՝ (5)) քառակուսային հավասարումը կարող է ունենալ իրական արմատ: Այսպիսով, ի նկատի ունենալով

$$(3) \text{-ը, (5) -ից կստանանք՝ } v_0^2 - 2gh = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}; \quad v_0^2 - 2gh > 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}:$$

Այժմ քննարկենք նետման կետից h չափով ներքև գտնվող B կետում գնդիկի հայտնվելու դեպքը: Այս դեպքում գնդիկի շարժման (2) հավասարման համար կունենանք՝

$$gt^2 - 2v_0t - 2h = 0: \quad (6)$$

Շարժման ընթացքում իր սկզբնական դիրք վերադառնալուց հետք գնդիկը շարունակում է վարընթաց շարժումը և ժամանակի մի պահի հասնում B կետ, որտեղ նրա պոտենցիալ էներգիան $E_{\text{պB}} = -mgh$ է: Լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքի համաձայն կարող ենք գրել՝

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} - mgh, \Leftrightarrow v_B^2 = v_0^2 + 2gh = \frac{D'}{4} > 0$$

որտեղ ինչպես տեսնում ենք D' -ը (6) քառակուսային հավասարման տարբերիչն է: Փաստորեն, (6) հավասարումը միշտ կունենա իրական արմատներ, քանի որ նրա տարբերիչը դրական է, ընդ որում այդ արմատներից մեկը դրական է, իսկ մյուսը՝ բացասական.

$$t_3 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} > 0; \quad t_4 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} < 0:$$

Այսպիսով, իր սկզբնական O դիրքը վերադառնալուց հետո գնդիկը միայն մեկ անգամ է հայտնվում իր սկզբնական դիրքից h հեռավորությամբ ներքև գտնվող B կետում: Այստեղ հասկանալի է, որ եթե նախապես ենթադրենք, որ գնդիկն իր շարժումն սկսել է ոչ թե O կետից՝ $t_0 = 0$ պահին, այլ շատ ավելի վաղ՝ կոորդինատային առանցքի ստորին մասերից, ապա ստացված t_4 բացասական արմատը թվապես ցույց կտա այն ժամանակը, թե O կետում հայտնվելուց որքան ժամանակ առաջ է գնդիկը գտնվել B կետում:

$$\text{Պատ.՝} \begin{cases} v_0^2 - 2gh < 0 \Rightarrow t_3 = g^{-1} \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh} \right) \\ v_0^2 - 2gh = 0 \Rightarrow t = g^{-1} \cdot v_0; t_3 = g^{-1} \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh} \right) \\ v_0^2 - 2gh > 0 \Rightarrow t_{1,2} = g^{-1} \left(v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh} \right); t_3 = g^{-1} \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh} \right) \end{cases} :$$

Փաստորեն քննարկված խնդիրը հնարավորություն է տալիս $x^2 - px \pm q = 0$ ($p; q > 0$) տեսքի քառակուսային հավասարման իրական արմատների թվային արժեքներին տալ ժամանակային իմաստ, ինչի համար բավական է դիտարկել $v_0 = \frac{p}{2}g$ սկզբնական արագությունով դեպի վեր նետված մարմնի շարժումը և վայրկյանաչափի միջոցով ֆիքսել, թե շարժման սկզբից հաշված որքան ժամանակ անց այն կհայտնվի իր սկզբնական դիրքից $h = \frac{q}{2}g$ հեռավորության վրա: Հարկ է նշել, որ հաստատուն արտադրիչով բազմապատկելու և փոփոխականի $y = -x$ փոխարինման արդյունքում $x^2 + px \pm q = 0$ ($p; q > 0$) հավասարումը կարելի է բերել կամայական գործակիցներով քառակուսային հավասարման:

Ինչպես տեսանք, դիտարկված ֆիզիկական խնդիրն ամբողջովին մեկնաբանում է ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարման իրական արմատներ ունենալու պայմանը, նկարագրում է գոյություն ունեցող իրական արմատների թվային արժեքների ֆիզիկական իմաստը:

Այժմ անդրադառնանք իրական թվի քառակուսու ոչ բացասական լինելու հանգամանքին: Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք $\exists \alpha \in R$ իրական թիվ այնպիսին, որ $\alpha^2 \leq 0$: Ներմուծենք h իրական դրական փոփոխականը հետևյալ կերպ՝ $h = \frac{v_0^2 - \alpha^2 g^2}{2g}$, որտեղ v_0 -ն կամայական իրական դրական թիվ է:

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\begin{cases} \alpha \in R \\ \alpha^2 < 0 \\ h = \frac{v_0^2 - \alpha^2 g^2}{2g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in R \\ h = \frac{v_0^2 - \alpha^2 g^2}{2g} \\ 0 > \alpha^2 = \frac{v_0^2 - 2gh}{g^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in R \\ \alpha^2 < 0 \\ h = \frac{v_0^2 - \alpha^2 g^2}{2g} \\ v_0^2 - 2gh < 0 \end{cases} :$$

Հեշտ է նկատել, որ $t = \frac{v_0}{g} + \alpha$ -ն բավարարում է (4), կամ որ նույնն է՝ (5)

քառակուսային հավասարմանը: Ըստ էության, ի նկատի ունենալով վերոգրյալ խնդրի արդյունքները, հանգեցինք հակասության. մի կողմից տեղի չունի (3)

անհավասարությունը, սակայն (5) քառակուսային հավասարումն ունի $t = \frac{v_0}{g} + \alpha$

իրական արմատ: Ստացված հակասության պատճառը մեր ենթադրությունն էր առ այն, որ գոյություն ունի իրական թիվ, որի քառակուսին բացասական է: Փաստորեն դիտարկված խնդրի վերլուծման արդյունքում նկատում ենք, որ լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքը մեկնաբանում է իրական թվի քառակուսու ոչ բացասական լինելը:

Եզրակացություն

Ավարտական հետազոտական աշխատանքում քննարկված մոտեցումներն ու դիտարկված խնդիրների վերլուծությունը թույլ է տալիս գալ հետևյալ հիմնական եզրահանգումներին

- Ֆիզիկական բնույթի դատողությունները կարող են օգտակար լինել ինչպես կոնկրետ մաթեմատիկական խնդիրներ լուծելիս, այնպես էլ որոշ թեորեմների արտաձման և ընկալման համար:

- Ֆիզիկական ճանապարհով լուծվող երկրաչափական խնդիրները շատ ավելին են քան հանրահաշվական առաջադրանքները: Սա մեկ անգամ ևս փաստում է ֆիզիկայի և երկրաչափության չափազանց սերտ կապերը:

- Մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի միջառարկայական կապերը երկկողմանի են փոխներգործուն և առավել խորն են քան մյուս բնագիտական առարկաների մեջ առկա միջառարկայական կապերը:

- Մաթեմատիկական խնդիրների ֆիզիկական լուծումներն ու մաթեմատիկական իրողությունների ֆիզիկական մեկնաբանությունները կարևոր են երկու առարկաների հիմնավոր տիրապետման տեսակետից:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1. Коменский Я.А., Избранные педагогические сочинения. Москва, Издательство Юрайт, 2020.-440с.
2. Ամիրջանյան Յու.Ա., Սահակյան Ա.Ս., Մանկավարժություն, ուսումնական ձեռնարկ մանկավարժական բուհերի ուսանողների համար:- Մանկավարժ հրատ.: Երևան: 2005թ.: 456էջ.:
3. Ղազարյան Է., Կիրակոսյան Ա., Մելիքյան Գ., Մայիլյան Ս., «Ֆիզիկա-10», Երևան, «Էդիթ Պրինտ», 2010.-272էջ:
4. Долбилин Н., Теорема Минковского о многогранниках. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». 2006, N4, стр. 3-8.
5. Коган Б.Ю., Сто задач по механике. М.: Наука. 1973.-80с.
6. Балк М.Б., Болтянский В.Г., Геометрия масс. М.: Наука. 1987.-160с.
7. Աթանասյան Լ.Ս., Բուտուզով Վ.Ֆ., Կադոմցև Ս.Բ., Պոզնյակ Է.Գ., Յուդինա Ի.Ի., «Երկրաչափություն-8», Երևան: «Զանգակ-97» հրատ., 2007.-144էջ:
8. Прасолов В.В., Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006.-640с.
9. Աթանասյան Լ.Ս., Բուտուզով Վ.Ֆ., Կադոմցև Ս.Բ., Պոզնյակ Է.Գ., Յուդինա Ի.Ի., «Երկրաչափություն-9», Երևան: «Զանգակ» հրատ., 2013.-144էջ: