ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՂ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅՈՒՆ

«Շիրակի ուսուցիչների միություն» գիտակրթական կենտրոն

Ավարտական հետազոտական աշխատանք

Թեմա - Դպրոցական դասընթացում երկրաչափական հավանականության կիրառությունը

Կատարող՝ <u>Իրինա Արամայիսի Մանուկյան</u>

<u>ՀԱՊՀ Գյումրու մասնաճյուղի ավագ դպրոց, մաթեմատիկա</u>

Ղեկավար՝ <u>Նաիրա Ասլանյան</u>

ԳՅՈՒՄՐԻ 2023

Բովանդակություն

Ներածություն

Կրթության բովանդակության փոփոխության հետ կապված ամեն մի հետազոտություն բավականին բարդ խնդիր է: Այդ իմաստով բացառություն չէ նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի բովանդակության հետ առնչվող խնդիրը:

Նոր չափորոշիչների համաձայն, որոնք փորձարկվում են Տավուշի մարզում, մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տեղ է գտել նաև <<Միացությունների տեսություն և հավանականությունների տեսության տարրեր>> թեման:

Ներկայումս, մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հավանականությունների տեսությունը մակերեսորեն է շոշափվում: Մասնավորապես, տրված է հավանականությունների միակ, այսպես կոչված, «դասական» սահմանումը, որը միշտ չէ, որ կիրառելի է: Շատ հաճախ գործնական խնդիրներ լուծելիս հնարավոր չէ նշել քննարկվող նյութի բոլոր հավասարահնարավոր արդյունքները , իսկ կիրառական բնույթի խնդիրների մեծամասնության մեջ փորձի հնարավոր արդյունքների թիվն անվերջ է, իսկ այդպիսի խնդիրների լուծումը տրվում է հավանականությունների երկրաչափական սահմանման միջոցով:

Սույն աշխատանքը նվիրված է հավանականությունների տեսության տարրերի հիման վրա երկրաչափական հավանականության հասկացությանը և դպրոցական դասընթացում նրա մի շարք կիրառություններին:

Աշխատանքի արդիականությունը:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տրամաբանության, կոմբինատորիկայի, վիճակագրության և հավանականության տեսության ներմուծումն ուղղված է որոշակի կրթական խնդիրների լուծմանը: Մի կողմից, այն ձևավորում է աշակերտների շրջապատող տեղեկատվությունը կորզելու, վերլուծելու և ընդհանրացնելու կարողությունը, մյուս կողմից օգնում է հասկանալ, որ նրանք ապրում են պատահարների և օրինաչափությունների աշխարհում: Այս ամենը նպաստում է մաթեմատիկայի՝ որպես աշխարհի գիտական իմացության մեթոդի, աշակերտնորի պատկերացումների զարգացմանը: Որոշակի իրադարձությունների առաջացման հավանականությունը վերլուծելու և գնահատելու ունակությունը նպաստում է մտածելակերպի հավանական ոճի ձևավորմանը և մաթեմատիկական մոդելավորման ու դրա դերի ըմբռնմանը՝ շրջապատող աշխարհի վերլուծության մեջ: Բացի այդ, ստոխաստիկայի տարրերի ներդրումը նպատակ ունի ցույց տալ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի կիրառական կողմնորոշումը, որը կարևոր դեր ունի մարդու պրակտիկ գործունեության ամենատարբեր բնագավառներում: Այս դասընթացում հավանական-վիճակագրական բաղադրիչի ներդրումն ուղղված է աշակերտների հետաքրքրության բարձրացմանը, մաթեմատիկայի ուսումնասիրության, տրամաբանական և հավանական-վիճակագրական մտածողության զարգացմանը: Այսպիսով, ստոխաստիկայի տարրերի ներմուծումը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ուղղված է ոչ միայն աշակերտների շրջանում նոր հասկացությունների և գաղափարների ձևավորմանը, այլև «ավանդական» մաթեմատիկան հարստացնելուն, նրա ներառարկայական և միջառարկայական կապերի ամրապնդմանը:

Աշխատանքի նպատակը:

Աշխատանքի նպատակն է հավանականությունների տեսության տարրերի ուսուցման գործընթացում երկրաչափական հավանականության կիրառման ուղիների մշակումը:

Հետազոտության խնդիրները:

- Ուսումնասիրել թեմայի վերաբերյալ գիտամեթոդական գրականությունը:
- Կիրառել երկրաչափական հավանականությունը մաթեամատիկայի դպրոցական դասընթացի տարբեր բաժիններում:

Հետազոտության առարկա։

Հետազոտության առարկան միջին և ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում <<Երկրաչափական հավանականություն>> ուսուցման համար կիրառվող և առաջարկվող հնարների ու մեթոդների համակարգ է:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը:

Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, 1 գլխից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից:

ԳԼՈՒԽ 1 ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ.

Ստոխաստիկայի տարրերը յուրաքանչյուր մարդու մաթեմատիկական և ընդանուր մշակութային բաղադրիչ են հանդիսանում: Հավանականային և վիճակագրական պատկերացումները դարձել են մարդու ֆունկցիոնալ գրագիտություն կազմող անբաժանելի մասը: Դրանք կարևոր դեր են կատարում մարդու պրակտիկ գործունեության ամենատարբեր բնագավառներում: Որոշակի իրադարձությունների առաջացման հավանականությունը վերլուծելու և գնահատելու ունակությունը նպաստում է մտածելակերպի հավանական ոճի ձևավորմանը և մաթեմատիկական մոդելավորման և դրա դերի ըմբռնմանը շրջապատող աշխարհի վերլուծության մեջ: Բացի այդ, ստոխաստիկայի տարրերի ներդրումը նպատակ ունի ցույց տալ դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացի կիրառական կողմնորոշումը, ինչը նպաստում է աշակերտների ստեղծագործական գործունեությանը և հետազոտական կարողությունների զարգացմանը: Ե. Ա. Բունիմովիչն իր հոդվածում նշում է, որ «մենք պետք է մեր երեխաներին սովորեցնենք ապրել հավանականային իրավիճակներում: Իսկ դա նշանակում է տեղեկատվություն հավաքել, վերլուծել ու մշակել այն, պատահական ելքերով տարաբնույթ իրավիճակներում հիմնավորված որոշումներ կայացնել»[5]: Հեղինակը նշում է դպրոցական դասընթացում ստոխաստիկական գծի ներմուծման կարևորությունը մաթեմատիկայի ուսուցման նկատմամբ սովորողների հետաքրքրության բարձրացման առումով, այն որ նույնիսկ մաթեմատիկայի այլ բաժինների լավ իմացությունը չի ապահովում հավանականային մտածողության զարգացմանը: Դպրոցական դասընթացում հավանական-վիճակագրական բաղադրիչի ներդրումը ուղղված է աշակերտների հետաքրքրության բարձրացմանը մաթեմատիկայի ուսումնասիրության, տրամաբանական և հավանական-վիճակագրական մտածողության զարգացմանը: Այսպիսով, ստոխաստիկայի տարրերի ներմուծումը դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթաց ուղղված է ոչ միայն աշակերտների շրջանում նոր հասկացությունների և գաղափարների ձևավորմանը, այլև հանրահաշիվ և երկրաչափություն առարկաներից ստացած գիտելիքների ամրապնդմանը , նրա ներառարկայական և միջառարկայական կապերի լայն շրջանակով [3] :

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ստոխաստիկական բովանդակային գծի նկատմամբ սովորողների մոտ հետաքրքրություն առաջացնելու տեսանկյունից՝ հավանականության հասկացության երկրաչափական մեկնաբանումն բավականին հարմար տարբերակ է:Այն արդյունավետ միջոց է մաթեմատիկայի ներքին և արտաքին միջառարկայական կապերի ապահովման համար:

1.1 *Երկրաչափական հավանականության ներմուծումը միջին դպրոցում*

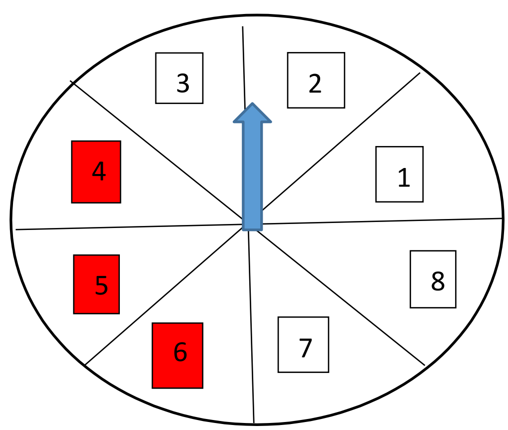
Գոյություն ունի մի շարք խնդիրների դաս որոնցում չի գործում հավանականությունների դասական սահմանումը:Քանի որ հավանականությունների դասական սահմանումը կիրառելի է միայն այն դեպքում , երբ փորձի տարրական պատահույթների տարածությունը վերջավոր բազմություն է և կազմված է հավասարահնարավոր պատահույթներից : Եթե փորձն ունի անվերջ թվով ելքեր, ապա, բնականաբար, դասական սահմանումը չի գործում: Անվերջ թվով ելքեր ունեցող փորձերի հետ կապված բավականին ընդարձակ դասի խնդիրներ լուծվում են հավանականության երկրաչափական սահմանման միջոցով : Եկեք դիտարկենք մի խնդիր [4]:

Խնդիր 1. Ռուլետկան բաժանված է 8 հավասար սեկտորների:Որքան է հավանականությունը, որ պտտելիս սլաքը կնկնի ստվերագծված հատվածում (նկար 11):

Լուծում. Կա փորրձի հնարավոր ելքերի ընդհամենը 8 թիվ, որոնցին երեքն են նպաստում մեր պատահույթի հանդես գալուն՝ m=3, n=8 հետևաբար որոնելի հավանականությունը կստացվի՝

$$P=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}$$

Պատ.՝ $\frac{3}{8}$



Նկար 11

Իսկ ինչպես կվարվենք եթե ռուլետկայի մակերևույթը բաժանված չլինի հավասար սեկտորների: Պտտելուց հետո սլաքը կարող է պատահական կանգնել շրջանի ցանկացած մասում:Հավանականությունը այն բանի ,որ սլաքը կկանգնի մեզ հետաքրքրող սեկտորում հավասար է այդ սեկտորի մակերեսի հարաբերությունը ամբողջ շրջանի մակերեսին: Ավելի ընդանուր դեպքերի համար կսահմանիվի հետևյալ կերպով՝

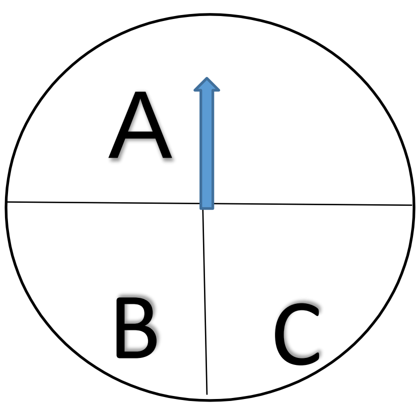
Դիցուք g հարթ պատկերը կազմում է G հարթ պատկերի մասը: G պատկերի վրա պատահականորեն նետված է կետ:Եթե ենթադրենք , որ կետը պատկերի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է պատկերի մակերեսին և անկախ է g-ի ձևից ու G – ի նկատմամբ նրա դիրքից , ապա կետը g-ի վրա ընկնելու հավանականությունը կորոշվի [6]

$$P = \frac{S_g}{S_G}$$

բանաձևով:

Նույն կերպով սահմանվում է միաչափ և եռաչափ տարածություններում:

Խնդիր 2. A սեկտորը զբաղեցնում է ռուլետկայի կեսը, իսկ նրա երկրորդ կեսը բաժանված է երկու B և C հավասար սեկտորների : Որքան է հավանականությունը , որ պտտելուց ռուլետկայի սլաքը կկանգնի 1) A սեկտորում, 2) B սեկտորում (նկար 12):



Նկար 12

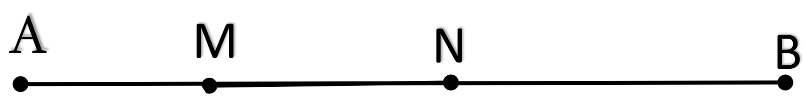
Լուծում. 1. A սեկտորի S_A մակերեսը երկու անգամ փոքր է շրջանի S մակերեսից, այդ պատճառով հավանականությունը, որ սլաքը կանգ կառնի A սեկտորում հավասար է `

$P = \frac{S_A}{S} = \frac{\frac{\pi r^2}{2}}{\pi r^2} = \frac{1}{2}$: Պատ.՝ $\frac{1}{2}$

2. B սեկտորի S_B մակերեսը չորս անգամ փոքր է ամբողջ շրջանի S մակերեսից , այդ պատճառով հավանականությունը ,որ սլաքը կանգ կառնի B սեկտորում հավասար է

$P = \frac{S_B}{S} = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$ Պատ.՝ $\frac{1}{4}$

Խնդիր 3. $AB = 15$ սմ հատվածի վրա կամայականորեն առանձնացված է $MN = 3$սմ հատված: AB հատվածի վրա պատահականորեն վերցված է X կետ: Որքան է հավանականությունը ,որ այդ կետը կնկնի MN հատվածի վրա (նկար 13):



Նկար 13

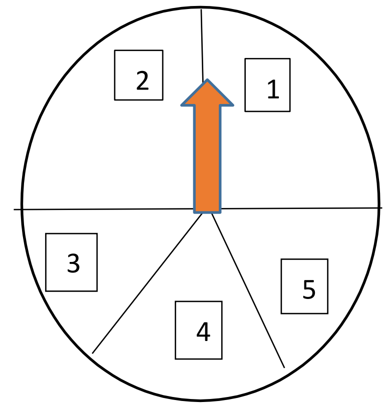
Լուծում. P հավանականությունը ,որ X կետը կնկնի MN հատվածի վրա, որը AB հատվածի մաս է, որոշվում է

$$P = \frac{MN}{AB}$$

$MN = 3$սմ, $AB = 15$սմ, X կետի MN-ի վրա ընկնելուհավանականությունը հավասար կլինի՝

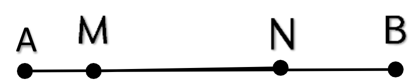
$P = \frac{MN}{AB} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ **Պատ.՝** $\frac{1}{5}$

Խնդիրներ



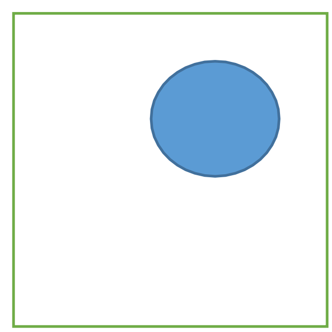
Նկար14

1. Ռուլետկայի մակերեսը բաժանված է սեկտորների հետևյալ կերպով. 1 և 2 սեկտորները միասին զբաղեցնում են շրջանի կեսը, իսկ նրա երկրորդ կեսը բաժանված է երեք հավասար սեկտորների՝ 3,4,5(նկար 14): Ինչ հավանականությամբ ռուլետկայի պտտելուց հետո սլաքը կկանգնի 1)սեկտոր 1-ի վրա,2) սեկտոր 3-ի վրա, 3) ռուլետկայի մակերևույթի 1 և 2 սեկտորների տարածքում, 4) ռուլետկայի մակերևույթի 4 և 5 սեկտորների տարածքում, 5) ռուլետկայի մակերևույթի 1և5 սեկտորների տարածքում:



Նկար 15

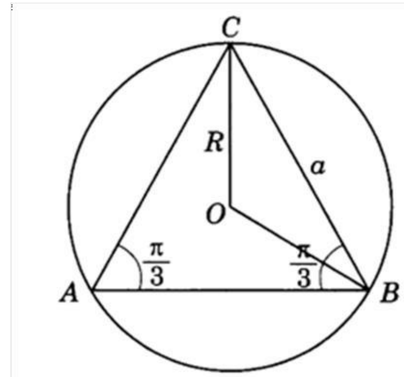
2. Տրված է AB=12սմ, AM=2սմ, MN=4սմ (նկար 15): AB հատվածի վար պատահականորեն վերցված է X կետ: Ինչ հավանականությամբ X կետը կնկնի 1) AM հատվածի վրա, 2) AN հատվածի վրա, 3)MN հատվածի վրա,4) MB հատվածի վրա, 5) AB հատվածի վրա:



Նկար 16

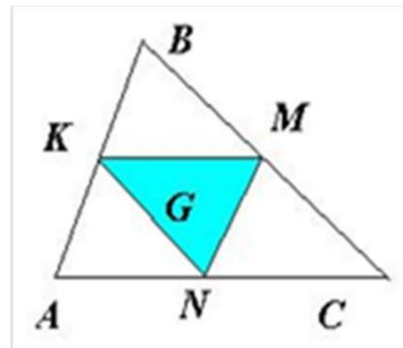
3. 14 սմ կողով քառակուսու մեջ ընդգծված է 2 սմ շառավղով շրջան (նկար 16): Պատահականորեն քառակուսու մեջ վերցված է կետ: Ինչ հավանականությամբ կետը կնկնի ընդգծված շրջանի մեջ:

4. R շառավիղ ունեցող շրջանի մեջ պատահականորեն գցված է կետը: Գտնել հավանականությունը, որ կետը կգտնվի շրջանին ներգծած կանոնավոր եռանկյան մեջ (նկար 17): Ենթադրվում է, որ շրջանի մասի մեջ կետը ընկնելու հավանականությունը համեմատական է այդ մասի մակերեսին և կախված չէ շրջանի նկատմամբ նրա դիրքից:



Նկար 17

5. X կետը պատահականորեն ընտրված է ABC եռանկյունից (նկար 18): Գտե՛ք հավանականությունը, որ այն պատկանում է եռանկյունու, որի գագաթները եռանկյան կողմերի միջնակետերն են:



Նկար 18

6. Բուրատինոն 1 սմ շառավղով կլոր բլիթ է նկարել 20 սմ և 25 սմ չափերով ուղղանկյուն թերթիկի կենտրոնում, դրանից անմիջապես հետո Բուրատինոն տնկել է մեկ այլ նմանատիպ բլիթ, որը նույնպես ամբողջությամբ հայտնվել է ուղղանկյան մեջ: Գտեք հավանականությունը, որ այս երկու բլիթները չեն դիպչում:

7. Հատվածի երկարությունը ME = 3 սմ: Պատահականորեն հատվածից ընտրեք մեկ կետ: Գտեք հավանականությունը, որ այս կետը կնկնի. ա) M կետից 1 սմ-ից պակաս հեռավորության վրա, բ) M կետից 2սմ հեռավորության վրա, գ) հեռացվել է երկու ծայրերից ավելի քան 0,5 սմ:

Ներկայիս չափորոշիչների համաձայն, որոնք գործածվում են հանրապետական դպրոցներում այս թեման առհասարակ ներառված չէ:

Ըստ նոր չափորոշիչների որոնք փորձարկվում են Տավուշի մարզում նաև ներառված է <<Երկրաչափական հավանականություն>> թեման :Թեման ընդգրկված է 8-րդ դասարանի դասագրքում : Չափորոշիչների համաձայն թեմային տրամադրված է ընդհամենը երկու դասաժամ: Ըստ էության թեման նոր գիտելիքներ չի պահանջում այլ հիմնված է անցած նյութերի վրա: Այսինքն եթե աշակերտը կարողանում է հաշվել պատկերի մակերես , մարմնի ծավալ կամ հատվածի երկարություն, այս թեման նրա մոտ բարդություններ չի առաջացնի, քանի որ որպես նոր գիտելիք ընդհամենը սովորում է երեք բանաձև , որը հիշելը այդքանել դժվար չէ:Ինչպես նշված է վերևում թեմային տրամադրված է ընդհամնը երկու դասաժամ, որը ըստ մեզ այդքանել շատ չէ: Կարելի է երկրաչափության և հանրահաշվի ժամերին երբ լուծում են թեմային առնչվող խնդիրներ , ավելացնել ևս մեկ պահանջ հաշվել հավանականությունը.... :

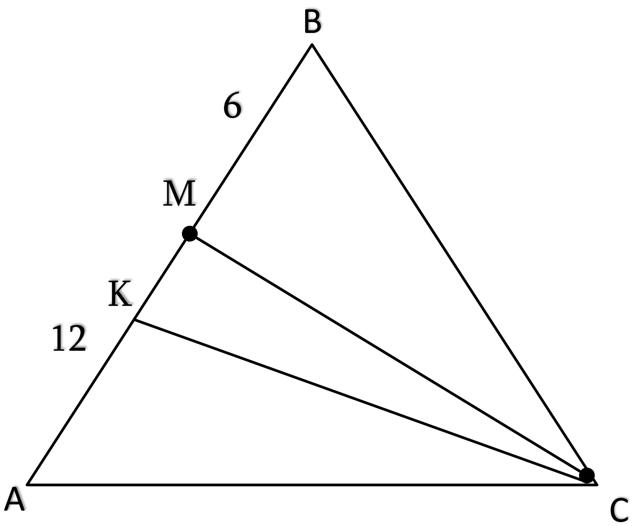
Օրինակ 8-րդ դասարանի երկրաչափության դասագրքից կարելի է վերցնել 335, 337,339,340, 346, 351 խնդիրները :

339. ABC եռանկյան AB կողմի վրա վերցված է M կետը հատվածով միացված է C գագաթին : Հայտնի է ,որ AB=18 սմ, AM=12 սմ (նկար 19):

ա. Գտնել ABC [illegible]AMC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը,

բ. Գտնել հավանականությունը ,որ ABC եռանկյան մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի AMC եռանկյան մեջ:

գ. Գտնել հավանականությունը , որ ABC եռանկյան մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի BMC եռանկյան մեջ:



Նկար 19

Լուծում.

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CK}{2} = \frac{18 \cdot CK}{2} = 9CK$$

$$S_{AMC} = \frac{AM \cdot CK}{2} = \frac{12 \cdot CK}{2} = 6CK$$

$$P = \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{6CK}{9CK} = \frac{2}{3}$$

Պատ՝. $\frac{2}{3}$

Խնդիր 340. Կանոնավոր եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը $\sqrt{3}$սմ է (նկար 20):

ա. Գտեք եռանկյան պարագիծը մակերեսը:

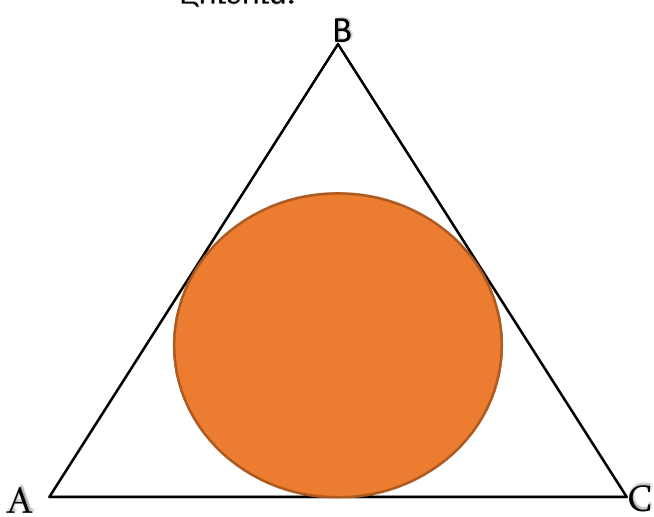
բ. Գտնել հավանականությունը, որ եռանկյան մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի շրջանագծի մեջ:

Լուծում.

$$S = \pi r^2 = 3\pi$$

$$S_{ABC} = 3\sqrt{3} \cdot r^2 = 9\sqrt{3}$$

$$P = \frac{3\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}$$



Նկար 20

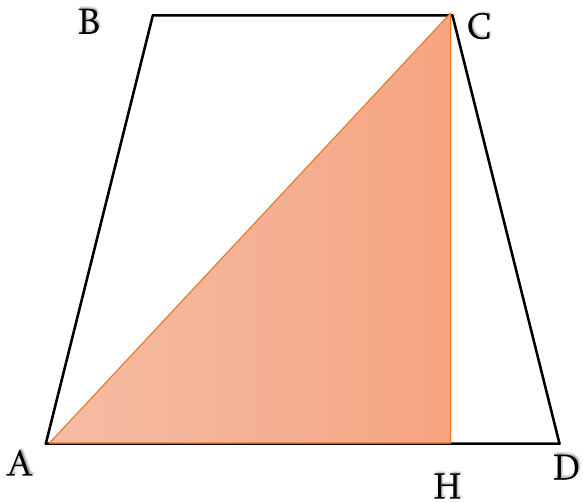
Պատ՝. $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

346. ABCD սեղանի AD [illegible] BC հիմքերը համապատասխանաբար 10 սմ և 8 սմ են: ACD եռանկյան մակերեսը 30 ս ^{2} է (նկար 21):

ա. Գտնել սեղանի մակերեսը,

բ. Գտնել հավանականությունը, որ ABCD սեղանի մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի ACD եռանկյան մեջ:

Լուծում.



Նկար 21

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CH}{2} = \frac{10 \cdot CH}{2} = 30 \text{ ս}^2$$

CH=6

$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} CH = 9 \cdot 6 = 54$$

$$P = \frac{CD}{S_{ABCD}} = \frac{30}{54} = \frac{5}{9}$$

Պատ՝. $\frac{5}{9}$

1.2 Երկրաչափական հավանականությունը ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում:

Ներկայումս դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացում ստոխաստիկայի տարրերի ներդրման մի քանի մոտեցում կա, որի հիման վրա մշակվել են դասագրքեր և ուսումնամեթոդական համալիրներ, որոնք տարբերվում են ոչ միայն նյութի ներկայացման հաջորդականությամբ, այլև մեթոդով: Այնուամենայնիվ, բոլոր հեղինակներն առանձնացնում են ընդհանուր հասկացություններ, որոնք պետք է ձևավորվեն դպրոցականների մոտ ուսումնական գործընթացում:

Տարբեր երկրներում «երկրաչափական հավանականություն» հասկացության ներդրման մեթոդը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթաց տարբեր դասագրքերի և ուսումնամեթոդական համալիրների վերլուծությունը ցույց է տվել, որ տարբեր հեղինակներ առաջարկում են այս հասկացությունը ներմուծել 8-րդ, 9-րդ կամ 11-րդ դասարաններում: Ըստ այդմ, նրանք տարբեր կերպ են մոտենում մեթոդաբանությանը:

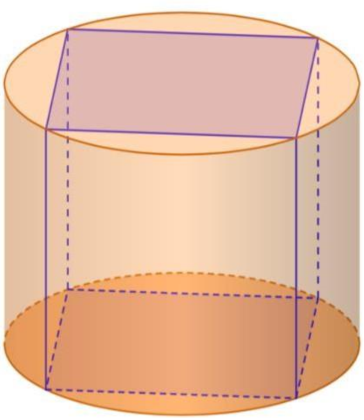
Ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում երկրաչափական հավանականություն թեման կարելի է անցնել պարամետր պարունակող հավասարումների կամ անհավասարումների տեսքով: Այն բավականին արդյունավետ միջոց է աշակերտների մոտ ստոխաստիկ գծի զարգացման համար : Պարամետր պարունակող հավասարումներում և անհավասարումներում որպես կետ դիտարկվում է պարամետրը, որը պատահականորեն պատկանում է որևէ միջակայքի: Պարամետր պարունակող հավասարումները կամ անհավասարումները կարող են լինել և ցուցչային և լոգարիթմական և եռանկյունաչափական և այլն: Ինչպես նաև կարելի է դիտարկել խնդիրներ, որոնք վերաբերում են եռաչափ տարածությանը:

Ավագ դպրոցի երկրաչափական դասընթացում ավելի խորացված անցնում են առաչափ տարածությունը: 10-րդ, 11-րդ և 12-րդ դասարանների երկրաչափության դասագրքերում կան շատ հետաքրքիր խնդիրներ, որոնց կարող ենք ավելացնել ևս մեկ պահանջ՝ հաշվել հավանականությունը: Բերենք այդպիսի խնդիրների օրինակներ:

Խնդիր 20.Նկար 13 պատկերված է խորանարդին արտագծած գլան (խորանարդի հիմքերը ներգծած են գլանի հիմքերի շրջանագծերին):Խորանարդի կողը հավասար է 1 դմ (նկար 22):

ա. Համեմատեք խորանարդի և գլանի լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

բ. Գտնել հավանականությունը, որ գլանի մեջ պատահականորեն նետված կետը կնկնի խորանարդի մեջ:



Նկար 22

բ. Լուծում.

$$V_{\text{Luk}} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_{\text{nμukuμ}} = a \cdot b \cdot c = 1$$

$$P = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Պատ՝. $\frac{2}{\pi}$ Խնդիր. 1մ,

Խնդիր 21 3մ և 5 մ չափերով ուղղանկյունանիստը տեղավորել են 6մ կող ունեցող խորանարդի մեջ : Նկարով ցուցադրեք այդպիսի պատկեր

ա. գտեք խորանարդում ազատ մնացած մասի ծավալը,

բ. Գտնել հավանականությունը, որ խորանարդի մեջ պատահականորեն նետված կետը կնկնի ուղղանկյունանիստի մեջ:

Լուծում. Բ.

$V_{\text{nl}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$

$V_{\text{nμ}} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

$P = \frac{V_{\text{nl}}}{V_{\text{nμ}}} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

Պատ.՝ $\frac{5}{72}$

Պարամետր պարունակող հավասարումների [illegible] անհավասարումների օրինակներ՝

Խնդիր 1. m իրական թիվը պատահականորեն ընտրվում է $(1;7)$ բազմությունից: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ $\frac{x^2+1}{x^2+x+1} < m$ անհավասարությունը ճշմարիտ կլինի x –ի կամայական իրական արժեքի դեպքում:

Լուծում: Քանի որ $x^2 + x + 1 > 0$ անհավասարությունը միշտ ճիշտ է , հետևաբար $\frac{x^2+1}{x^2+x+1} < m$ անհավասարումը համարժեք է

$$x^2 + 1 < (x^2 + x + 1)(m$$

կամ որ նույնն է $-1)^2 + mx + m - 1 > 0$:

Քանի որ $m \in (1;7)$ ուստի $m - 1 > 0$ հետևաբար $(m-1)^2 + mx + m - 1 > 0$ անհավասարումը ճիշտ կլինին x –ի կամայական իրական արժեքի դեպքում եթե նրա դիսկրիմինանտը լինի բացասական, այսինքն

$$D = m^2 - 4(m-1)^2 < 0$$

Որը համարժեք է $m^2 < 4(m-1)^2$ կամ $m < 2(m-1) => m > 2 => m \in (2;7)$:

Հետևաբար , որոնելի հավանականությունը կստանանք

$P = \frac{7-2}{7-1} = \frac{5}{6}$:

Պատ.՝ $\frac{5}{6}, m \in (2;7)$:

Խնդիր 2. a իրական թիվը պատահականորեն ընտրվում է $[-1;1]$ բազմությունից: Ինչպիսի՞ հավանակնությամբ $y = 2x^2 - 6ax + 3a + 1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ամբողջությամբ կգտնվի $y = 1$ ուղղից վերև:

Լուծում. Որպեսզի տրված քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը ամբողջությամբ գտնվի $y = 1$ ուղղից վերև անհրաժեշտ է , որ

$$D = (6a)^2 - 4 \cdot 2(3a+1) = 36a^2 - 24a - 8 = 8\left(\frac{9}{2}a^2 - 3a - 1\right) < 0$$

և $n = \frac{-D}{4\cdot 2} > 1$, այսինքն

$$\begin{cases} 8(4a^2 - 3a - 1 < 0) \\ \frac{-8\left(\frac{9}{2}a^2 - 3a - 1\right)}{8} > 1 \end{cases} => \begin{cases} 4a^2 - 3a - 1 < 0 \\ \frac{9}{2}a^2 - 3a - 1 < -1 \end{cases} => \frac{9}{2}a^2 - 3a < 0 => a \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$$

Հետևաբար, որոնելի հավանակնությունը կստանանք

$$P = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Պատ.՝ $P = \frac{1}{3}$

Խնդիր 3. a իրական թիվը պատահականորեն ընտրվում է $[-2;2]$ բազմությունից: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ

$$sin^4x + (a-6)in^2x - 4(a-2) = 0$$

Հավասարումը կունենա գոնե մեկ իրական արմատ:

Լուծում. Նշանակենք $sin^2x = z$: $sin^4x + (a-6)in^2x - 4(a-2) = 0$ հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$z^2 + (a-6) - 4(a-2) = 0$$

Որպեսզի $sin^4x + (a-6)in^2x - 4(a-2) = 0$ հավասարումը ունենա գոնե մեկ իրական արմատ , անհրաժեշտ է , որ $z^2 + (a-6) - 4(a-2) = 0$ հավասարումը ունենա $[0;1]$ բազմությանը պատկանող գոնե մեկ արմատ , որի համար նախ անհրաժեշտ է , որ $z^2 + (a-6) - 4(a-2) = 0$ հավասարման դիսկրիմինանտը լինի ոչ բացասական , այսինքն

$$D = (a-6)^2 + 4 \cdot 4(a-2) = a^2 - 12a + 36 + 16a - 32 = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2 \geq 0$$

Եթե $a \in [-2; 2]$ միջակայքին $a + 2 \geq 0$ ուստի հավասարման արմատները կլինեն

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-(a-6) - \sqrt{(a+2)^2}}{2} = \dfrac{-(a-6) - (a+2)}{2} = \dfrac{4-2a}{2} = 2 - a \\ z_2 = \dfrac{-(a-6) - |a+2|}{2} = \dfrac{-a+6+a+2}{2} = 4 \end{cases}$$

Քանի որ $z_2 = 4$ –ը չի պատկանում $[0; 1]$ միջակայքին ուրեմն մնում է որ

$(2-a) \in [0; 1]$ այսինքն

$$0 \leq 2 - a \leq 1 \text{ և } \quad 1 \leq a \leq 2$$

Հետևաբար որոնելի հավանականությունը կստանանք

$$P = \frac{2-1}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$$

Պատ.՝ $P = \frac{1}{4}$; $a \in [1; 2]$:

Խնդիր 4. a իրական թիվը պատահականորեն ընտրվում է $[-3; 3]$ բազմությունից: ինչպիսի՞ հավանականությամբ

$$8lg^2\text{x} - 2a|lg\text{x}| - (a+2) = 0$$

հավասարումը կունենա $\left[\frac{1}{10}; 10\right]$ բազմությանը պատկանող գոնե մեկ արմատ:

Լուծում. Նշանակենք $|lg\text{x}| = t$

Եթե a-ն արժեքներ ընդունի $\left[\frac{1}{10}; 10\right]$ միջակայքից $t -$k արժեքներ կնդունի $[0; 1]$ բազմությունից: Կատարված նշանակումով տրված հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$8t^2 - 2at - (a+2) = 0$$

$D = (2a)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-(a+2)) = 4a^2 + 32a + 64 = 4(a^2 + 8a + 16) = 4(a+4)^2$

$D = 4(a+4)^2 \geq 0$

Հետևաբար հավասարման արմատները կլինեն

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{2a - 2|a+4|}{16} = \dfrac{a - |a+4|}{8} \\ t_2 = \dfrac{a + |a+4|}{8} \end{cases}$$

Քանի որ $a \in [-3; 3]$ ուստի $a + 4 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{a+2}{4} \end{cases}$ բայց $-\frac{1}{2}$-ը չի պատկանում $[0; 1]$-

ին, ուստի մնում է պահանջել, որ t_2 –ը լինի այդ միջակայքից, այսինքն

$0 \leq \frac{a+2}{4} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq a \leq 2 \Rightarrow a \in [-2; 2]$

Հետևաբար որոնելի հավանականությունը կստանանք

$P = \frac{2-(-2)}{3-(-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Պատ.՝ $\frac{2}{3}, [-2; 2]$

1.3 ՀԵՏԱՔՐՔՐԱՇԱՐԺ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՕՐԻՐՆԱԿՆԵՐ

Խնդիր 1. Ուղիղ գծի յուրաքանչյուր 15 մետրի վրա տեղավորված են հակատանկային ականներ, 3մետր լայնություն ունեցող տանկն ընթանում է այդ գծին ուղղահայաց: Ինչպիսի՞ն է տանկի պայթելու հավանականությունը:

Խնդիր 2. Հարթությունը բաժանված է իրարից 2a հեռավորության վրա գտնվող զուգահեռ ուղիղներով: Հարթության վրա պատահականորեն նետվում է $r\ (r < a)$ շառավղով մետաղադրամը: Ինչպիսին է նրա ոչ մի ուղղի հետ չհատվելու հավանականությունը:

Խնդիր 3. Շախմատի անվերջ տախտակի վրա , որի քառակուսիների կողմերի երկարությունը a է, պատահականորեն նետվում է $2r\ (2r < a)$ տրամագծով մետաղադրամը: Գտնել հետևյալ պատահույթի հավանականությունը՝

ա. դրամը ամբողջովին ընկած կլինի մեկ քառակուսու մեջ,

բ. դրամը կհատի քառակուսու մեկ կողմից ոչ ավելի:

Խնդիր 4. Կետը պատահականորեն նշվում է R շառավղով շրջանի ներսը: Գտնել այդ շրջանին ներգծված քառակուսու ներսում գտնվելու հավանականությունը:

Խնդիր 5. Երկու նավ պետք է կառանվեն նույն նավամատույցին:Նավերի ժամանելու պահերը անկախ են և հավասարահնարավոր օրվա ընթացքում:Ինչպիսի՞ հավանականությամբ նավերից մեկը ստիպված կլինի սպասել նավամատույցի ազատմանը, եթե առաջին նավի կանգ առնելու ժամանակը մեկ ժամ է, իսկ երկրորդինը՝ երկու ժամ:

Խնդիր 6. Պատահականորեն վերցված են երկու դրական x և y թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը մեծ չէ 2-ից: Գտնել այդ թվերի xy արտադրյալի 1-ից մեծ չլինելու և $\frac{x}{y}$ քանորդի 2-ին չգերազանցելու հավանականությունը:

Խնդիր 7. Պատահականորեն վերցնում են երկու դրական x և y թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը մեծ չէ մեկից: Գտնել այդ թվերի գումարի մեկին չգերազանցելու , իսկ xy արտադրյալի 0.09-ից փոքր չլինելու հավանականությունը:

Խնդիր 8. OX թվային առանցքի L երկարության OA հատվածի վրա պատահականորեն գրված է B(x) կետը: Գտնել հավանականությունը , որ OB և BA հատվածներից փոքրը կունենա $\frac{1}{3}$ –ից ավելի երկարություն: Ենթադրվում է ,որ կետը հատվածին ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա դիրքից:

Խնդիր 9. R շառավղով շրջանում դրված է r շառավղով շրջանը: Գտնել հավանականությունը, որ մեծ շրջանի մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի փոքր շրջանի մեջ: Ենթադրվում է, որ կետը շրջանի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է շրջանի մակերեսին և կախված չէ նրա դիրքից:

Խնդիր 10. a կողմով քառակուսիների ցանցով պատված հարթության վրա պատահականորեն նետված է $r < \frac{a}{2}$ շառավղով դրամ: Գտնել հավանականությունը, որ դրամը չի հատի քառակուսու ոչ մի կողմը: Ենթադրվում է ,որ կետը հարթ պատկերի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է նրա մակերեսին և կախված չէ պատկերի դիքից:

Խնդիր 11. Իրարից 6 սմ հեռավորության վրա գտնվող ուղիղներով բաժանված հարթության վրա պատահականորեն նետված է 1 սմ շառավիղ ունեցող շրջանը: Գտնել հավանականությունը , որ շրջանը չի հատի ոչ մի ուղիղ: Ենթադրվում է , որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը կախված չէ նրա դիրքից:

Խնդիր 12. Հարթության վրա գծված են 2 համակենտրոն շրջանագծեր, որոնց շառավիղները համապատասխանաբար 5 սմ և 10 սմ են: Գտնել հավանականությունը , որ մեծ շրջանի մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի շրջանագծով կազմված օղակի մեջ: Ենթադրվում է, որ կետի հարթ պատկերի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է այդ պատկերի մակերեսին և կախված չէ նրա դիրքից:

Խնդիր 13. Արագ պտտվող սկավառակը բաժանված է զույգ թվով սկավառակների, որոնք փոփոխակիորեն ներկված են սպիտակ և սև գույներով: Սկավառակի վրա կրակում են : Գտնել հավանականությունը , որ գնդակը կնկնի սպիտակ սեկտորներից մեկի վրա: Ենթադրվում է , որ գնդակի ընկնելը հարթ պատկերի մեջ համեմատական է նրա մակերեսին:

Խնդիր 14. OX թվային առանցքի L երկարության OA հատվածի վրա պատահականորեն դրված են երկու կետ՝ B(x) և C(y): Գտնել հավանականությունը, որ BC հատվածի երկարությունը , փոքր կլինի $\frac{L}{2}$ –ից: Ենթադրվում է , որ կետի հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա դիրքից:

Խնդիր 15. Գտնել հավանականությունը, որ L-ից ոչ շատ երկարություն ունեցող երեք պատահական վերցրած հատվածներից կարելի է կառուցել եռանկյուն: Ենթադրվում է, որ կետի տարածական մարմնի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է մարմնի ծավալին և անկախ է նրա դիրքից:

Խնդիր 16. Թվային առանցքի $[0; 2]$ հատվածից պատահականորեն ընտրել են 2 թվեր՝ x և y: Գտնել հավանականությունը, որ այդ թվերը բավարարում են

$x^2 \leq 4y \leq 4x$ անհավասարությանը :

Խնդիր 17. R շառավղով գնդում դրված է r շառավղով գունդ : Գտնել հավանականությունը, որ մեծ գնդի մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի փոքր գնդի մեջ: Ենթադրվում է, որ կետը գնդի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է գնդի ծավալին և կախված չէ նրա դիրքից:

Խնդիր 18. R շառավղով գլանի մեջ, որի բարձրությունը 12սմ է, դրված է r շառավղով գունդ: Գտնել հավանականությունը, որ գլանի մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի գնդի մեջ: Ենթադրվում է, որ գլանի մասի մեջ կետը ընկնելու հավանականությունը համեմատական է այդ մասի ծավալին և կախված չէ գլանի նկատմամբ նրա դիրքից:

Խնդիր 19. Խորանարդի մեջ, որ կողմը 12սմ է, դրված է 4սմ կողմով խորանարդ: Գտնել հավանականությունը, որ մեծ խորանարդի մեջ պատահականորեն նետված կետը կնկնի փոքր խորանարդի մեջ : Ենթադրվում է, որ կետը խորանարդի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է խորանարդի ծավալին և կախված չէ նրա դիրքից:

Խնդիր 20. R շառավղով գլանի մեջ, որի բարձրությունը 18սմ է, դրված r շառավղով կոն, որի բարձրությունը 6սմ է: Գտնել հավանականությունը, որ գլանի մեջ պատահականորեն նետված կետը կնկնի կոնի մեջ: Ենթադրվում է, որ գլանի մասի մեջ կետը ընկնելու հավանականությունը համեմատական է այդ մասի ծավալին և կախված չէ գլանի նկատմամբ նրա դիրքից:

Խնդիր 21. Հեռախոսալարի L երկարությամբ AB հատվածի վրա C կետում տեղի է ունեցել ընդհատում: Գտնել հավանականությունը, որ C կետը գտնվում է A կետից ոչ պակաս քան l հեռավորության վրա:

Խնդիր 22. Հարթության վրա տարված են զուգահեռ ուղիղներ , որոնց միջև հեռավորությունը 1.5 և 8 սմ է: Գտնել հավանականությունը , որ այդ հարթության վրա պատահականորեն ընկած 2.5 սմ շառավղով շրջանագիծը չի հատի ոչ մի ուղիղ:

Խնդիր 23. R շառավղով շրջանագծի մեջ ,պատահականորեն դրված է երեք կետեր՝ A, B, C: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը , որ ABC եռանկյունը սուրանկյուն է:

Խնդիր 24. Լարի երկարությունը 1 մետր է: Թելը կտրված է մկրատով պատահական ընտրված կետում: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ թելի կտորներից մեկը կունենա առնվազն 80 սմ երկարություն:

Եզրակացություն

Հավանական-վիճակագրական բաղադրիչի ներմուծումը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթաց նպաստում է մարդու ընդհանուր, մտավոր և մասնագիտական գործունեության զարգացմանը: Այն նաև նպաստում է աշակերտների հետազոտական կարողությունների ընդլայնմանը: Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հավանական-վիճակագրական բաղադրիչի ճիշտ ներմուծումը կօգնի աշակերտի անձի զարգացմանը և շրջապատում ավելի արագ ու հեշտ կողմնորոշմանը:

Կիրառական միջավայրի ընդլայնման, միջառարկայական կապերի խորացման, կիրառական խնդիրների ներառման և մաթեմատիկական մոդելավորման միջոցով հնարավոր է հասնել ստոխաստիկակայի տեսական նյութի և խնդիրների համակարգի գործնական նշանակության, դրանց նկատմամբ սովորողների հետաքրքրությունների մեծացման, ուսուցման արդյունավետության բարձրացման:

Այս աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները ուղղված են այդ հարցերի լուծմանը:

Ուսումնասիրելով անհրաժեշտ գիտամեթոդական գրականությունը և վերլուծելով ստացված տեղեկատվությունը՝ ծանոթացանք պատահական փոփոխականները դիտարկելիս առաջացող խնդիրների լուծման հատուկ մեթոդներին, մասնավորապես հավանականության տեսության հասկացություններին և, այդ թվում հավանականության երկրաչափական սահմանմանը: Պարզեցինք նաև, որ երկրաչափական հավանականությունը կիրառվում է կյանքի բազմաթիվ ոլորտներում:

Ուսումնասիրելով ներկայիս գործող չափորոշիչները և Տավուշի մարզում փորձարկվող չափորոշիչները՝ մշակել ենք միջին և ավագ դպրոցում երկրաչափական հավանականության ներմուծման ուղիներ:

Ներկայացրել ենք միջին դպրոցում երկրաչափական հավանականության ներմուծումը, որոշ խնդիրներին ավելացրել ենք ևս մեկն պահանջ, որը վերաբերում է երկրաչափական հավանականությանը, ցույց ենք տվել դրանց լուծման ուղիներ:

Ավագ դպրոցում առաջարկել ենք այլ գրականություններից վերցված խնդիրներ իրենց լուծումներով, որոնք կնպաստեն սովորողների գիտելիքների ամրապնդմանը և առօրյա կյանքում դրա կիրառմանը:

Բացի դպրացական դասընթաց ներմուծման ուղիներից, առաջարկել ենք նաև մի շարք հետաքրքրաշար խնդիրների օրինականեր, որոնք պրակտիկ են և առօրյա կյանքում կիրառելի:Դրանց շնորհիվ կմեծանա աշակերտների հետաքրքրությունը մաթեմատիկա առարկայի նկատմամաբ, ինչը ներկայումս շատ կարևոր խնդիր է յուրաքանչյու մաթեմատիկայի ուսուցչի համար:

Այսպիսով, երկրաչափական հավանականության դիտարկումը զարգացնում է սովորողների տարածական պատկերացումները և նպաստում է որոնելի հավանականային իրավիճակը երկրաչափական լեզվի թարգմանելու կարողությունների ձևավորմանը, որն էլ միջառարկայական կապեր է ստեղծում երկրաչափության և ստոխաստիկայի միջև: Մեթոդական տեսակետից նշված հասկացության ներմուծումը հնարավորություն է տալիս նյութի ուսուցումն աշակերտների համար դարձնել միջառարկայական կապերով ապահովված, և հետաքրքիր, ինչն էլ խթան է հանդիսանում ուսումնական գործընթացի արդյունավետ իրագործման համար:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Ն. Գ. Ահարոնյան | Ե. Ռ. Իսրաեյլան- Հավանականությունների տեսության խնդրագիրք; Երևան, ԵՊՀ հրատարակչություն, 2016
2. Գ.Հ. Համբարձումյան - Հավանականությունների տեսություն; Երևան 1977
3. Ա.Կ Պողոսյան-Հավանականությունների տեսություն և կիրառական վիճակագրություն, Երևան 2010
4. Ա.Մինասյան Երկրաչափական հավանականությունը՝ որպես մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում միջառարկայական կապերի արդյունավետ ապահովման միջոց:
5. Алимов Ш.А. - Учебник Алгебра 9 класс, 2012
6. Бунимович, Е.А. Вероятностно - Статистическая линия в базовом школьном курсе математики, Математика в школе. 2002. № 4
7. Гмурман В.Е. - Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшее образование, 2006
8. Б.В. Гнеденко - Курс теории вероятностей, Москва 1969
9. Колмогоров А.Н. - Основные понятия теории вероятностей. М., ФАЗИС, 1998
10. Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова - Учебник Алгебра 9 класс, 2014
11. Факультативный курс по математике: Теория вероятностей: Учеб. Пособие для 9-11 кл. сред. шк./ – 3-е изд. перераб. – М.: Просвещение,1990. – 160 с
12. http://mathprofi.ru/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti.html
13. file:///D:/User/Downloads/metodika-izucheniya-ponyatiya-geometricheskaya-veroyatnost-v-strukture-traditsionnogo-shkolnogo-kursa-matematiki%20(1).pdf