

Հանրապետական մանկավարժահոգեբանական կենտրոն

«Հանրակրթական դպրոցների ուսուցիչների և ուսուցչի օգնականների դասավանդման հմտությունների զարգացման ապահովում» ծրագիր

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Դպրոց՝ ՀՀ Շիրակի մարզի Մեղրաշենի միջնակարգ

Առարկա՝ Մաթեմատիկա

Թեմա՝«Մտքի ակտիվ աշխատանքի զարգացումը մաթեմատիկայի

 ուսուցման ընթացքում»

Վերապատրաստող, մենթոր՝ Վոլոդյա Գրիգորյան

Ուսուցիչ՝ Անժելա Ճավռշյան

Մեղրաշեն 2023

 **Նախաբան**

 Մաթեմատիկայի ուսուցման ընթացքում մտքի ակտիվ աշխատանքը զարգացնում է ստեղծագործական երևակայությունը,որում մեծ դեր է ստանում ինտուիցիան(ներըմբռնում)։Ինտուիցիան հանդիսանում է մարդկային մտքի հատուկ ընդունակություն,դառնալով նրա ստեղծագործական գործունեության հիմքը։Ընդունակությունը կայանում է նրանում ,որ մարդը ,ելնելով որոշ փորձնական տվյալներից,կարող է նկատել որոշակի օրինաչափություն և արդյունքները տարածել բոլոր հնարավոր դեպքերի վրա։ Նմանատիպ ընդհանրացում կատարվում է յուրաքանչյուր մարդու մոտ՝ նրա ամբողջ գիտակցական կյանքի ընթացքում։

 Սակայն մարդիկ հաճախ ընդհանրացում են կատարում գոյություն չունեցող <<հայտանիշների>>հիման վրա և դրա համար էլ անում են ոչ ճիշտ եզրակացություններ։Բայց եթե մարդուն հաջողվում է մեծ քանակով փաստերի հիման վրա անմիջապես որսալ այն հիմնականը,էականը,որը պատկանում է այդ փաստերի միավորմանը,ապա նա գտնվում է բացահայտումների ճանապարհին։Դրա համար էլ անհրաժեշտ է սովորողների մեջ դաստիարակել կարողություններ՝ ուշադրություն դարձնելով երևույթի գլխավոր հատկանիշի վրա և ըստ այդմ էլ անել ընդհանրացումներ։

 Մասնավորաբար,մաթեմատիկայի զանազան հարցեր կապված են բնական արգումենտի հետ(առաջադրություններ,պնդումներ),որոնցում անհրաժեշտություն է առաջանում կատարել ընդհանրացումներ՝ ճշմարիտ պնդումներ ստանալու համար կամ հերքել,եթե սխալ դատողությունների հիման վրա ստեղծված<<ճշմարիտ>> դուրս պնդումը։Ստորև բերված նոյւթերի շարադրանքը հենց դրան է նվիրված։

 **Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը**

 **1.Դեդուկցիա և ինդուկցիա**

 Մաթեմատիկայում բազմաթիվ հարցեր քննարկելիս մենք հաճախ ենք օգտվում ընդհանուր պնդումներից(թեորեմներից),որոնց ճշմարիտ լինելը մեզ արդեն հայտնի է։Լուծելով տվյալ խնդիրը նրանում դիտարկվող կոնկրետ օբյեկտի վրա կիրառում ենք ընդհանուր պնդում։

 Դատողությունների այնպիսի մեթոդը, որն ընդհանուր պնդումից անցնում է մասնակի պնդման կոչվում է դեդուկցիա։Նման դատողության ելակետային պահն ընդհանուր պնդումն է,իսկ եզրափակիչ պահը մասնավոր եզրահանգումը։Դեդուկտիվ դատողությունը ըստ էության,տրամաբանական դատողությունն է։

 Դեդուկցիա բառը թարգմանաբար նշանակում է հետևություն, եզրահանգում։

 Դեդուկցիան գիտական մտածողության միակ մեթոդը չէ։ Ֆիզիկայում, քիմիայում,կենսաբանության մեջ գիտական արդյունքները հիմնականում ստացվում են դիտումների և փորձերի,այսինքն՝ ինդուկտիվ դատողությունների հիման վրա։

 Ինդուկցի անվանում են դատողությունների այնպիսի մեթոդ , որը մասնակի դեպքերից հանգեցնում է մի որոշ ընդհանուր եզրակացության։ Այդ մեթոդը ընդհանուր օրինաչափությունների հիմնական մեթոդն է՝ ինչպես բնական ,այնպես էլ հումանիտար գիտությունների մեջ։

 Ինդուկտիվ նշանակում է արտածում դիտումների և փորձերի հիման վրա, այսինքն՝ մասնավոր դեպքերի դիտարկումների ճանապարհով ստացված օրինաչափության հետագա տարածում ընդհանուր դեպքի վրա։

 Փորձարարական գիտությունների մեջ ինդուկտիվ եզրահանգումների դերը շատ մեծ է ։Նրանով բացահայտվում են այն դրույթները,որոնցից հետագայում դեդուկցիայի ճանապարհով արվում են հետագա մտահանգումները։

 Մաթեմատիկայում ընտրված աքսիոմատիկայի հիմքում ,ըստ էություն,ընկած է ինդուկցիան։ Յուրաքանչյուր ձևավորվող աքսիոմ , որպես ընդհանուր պնդում,ձևակերպվում է կենսափորձի,երկարատև մասնակի դիտարկումների,այսինքն՝ ինդուկտիվ եզրահանգումների հիման վրա։

 Ինդուկցիան հաճախ հնարավորություն է տալիս գուշակել ձևավորվող թեորեմի ձևակերպումը ,իսկ շատ դեպքերում ՝ նաև նշագծել տվյալ թեորեմի ապացուցման ուղին ։Ձևակերպված թեորեմի (ճշմարիտ պնդման) ապացուցման ընթացքն արդեն տարվում է դեդուկտիվ (տրամաբանական) հիմնավորումներով։

 **2.Լրիվ և թերի ինդուկցիաների հասկացությունները**

 Դիցուք, պահանջվում է ապացուցել ,որ 2-ից մեծ և 30-ը չգերազանցող ցանկացած զույգ թիվ կարելի է ներկայացնել երկու պարզ թվերի գումարի տեսքով։

 Ապացուցման համար բավական է դիտարկել նշված միջակայքում եղած բոլոր զույգ թվերը և պնդումը հիմնավորել դրանցից յուրաքանչյուրի համար։ Իրոք ,քանի որ 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10 =3+7, 12 =5+7,

14=3+11, 16=3+13, 18 =5+13, 20=7+13, 22 =3+19, 24=5+19,

26 =7+19, 28=5+23, 30=7+23, հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է։

 Դիտարկենք մեկ օրինակ ևս։Հանրահաշվում հայտնի

  |a+b|≤|a|+|b| (1)

Անհավասարությունը ,որտեղ a-ն և b-ն ցանկացած թվեր են ,կարելի է ապացուցել երեք դեպքերի քննարկումով․

ա) a և b թվերն ունեն միևնույն նշանը (երկուսն էլ դրական են կամ երկուսն էլ՝ բացասական )։

բ) a և b թվերն ունեն տարբեր նշաններ (մեկը դրական է, իսկ մյուսը՝ բացասական)։

գ) a և b թվերից մեկը հավասար է զրոյի (մյուսը կարող է լինել ցանկացած թիվ)։

Հեշտությամբ կարելի է հիմնավորել ,որ յուրաքանչյուր դեպքում (1) անհավասարությունը ճիշտ է (կատարեք ինքնուրույն)։Դիտարկված խնդիրներում եզրակացությունն արվում է հնարավոր բոլոր դեպքերի քննարկման հիման վրա։ Ընդունված է դատողությունների այդպիսի մեթոդն անվանել լրիվ ինդուկցիա։

 Հասկանալի է, որ այդպիսի մեթոդը կիրառելի է միայն այն դեպքում, երբ դեպքերի թիվը վերջավոր է։

 Այսպիսով, լրիվ ինդուկցիան կայանում է, որ ընդհանուր պնդումն ապացուցվում է նրանում առաջացող վերջավոր թվով հնարավոր դեպքերից յուրաքանչյուրի համար։ Չնայած իր անվանմանը լրիվ ինդուկցիայի մեթոդը, ըստ էության, ինդուկտիվ չէ, այլ՝ դեդուկտիվ է։ Կիրառելով այն, մենք հենվում ենք տրամաբանության այնպիսի ընդհանուր դրույթի վրա, որը թույլ է տալիս ընդհանուրը մասնատել վերջավոր թվով մասնավոր դեպքերի և նրանցից յուրաքանչյուրը դիտարկել առանձին։

 Երբեմն հաջողվում է ընդհանուր արդյունքը կռահելոչ թե բոլոր, այլ բավականաչափ մեծ թվով մասնավոր դեպքերի դիտարկման հիման վրա․ այլ կերպ, եզրակացություն է արվում ոչ բոլոր դեպքերի քննարկումով (դրանք կարող են լինել անվերջ)։Ընդունված է այդ մեթոդն անվանել չ լրիվ կամ թերի ինդուկցիա։

 Բերենք օրինակներ։

**Օրինակ1։** Արտածենք բանաձև n գումարելի պարունակող

$$\frac{1}{1· 4}+\frac{1}{4· 7}+\frac{1}{7 ·10}+····+\frac{1}{(3ո-2)(3ո+1)}$$

գումարը հաշվելու համար։

 Այդ գումարը նշանակենք S ո -ով։ Գտնենք S ո -ի արժեքները առաջին մի քանի բնական n-երի դեպքում․

 S1 =$\frac{1}{1· 4}=\frac{1}{4},$

 S2 = S 1 +$\frac{1}{4 ·7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4·7}=\frac{2}{7}$ ,

 S3 = S 2 +$\frac{1}{7·10 }=\frac{2}{7}+\frac{1}{7·10}=\frac{3}{10}$ ,

 S4 =S 3 +$\frac{1}{10· 13}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10 ·13}=\frac{4}{13},$

 S5 =S 4+$\frac{1}{13· 16}=\frac{4}{13}+\frac{1}{13 ·16}=\frac{5}{16}$ :

 Ստացված արդյունքներից առաջացած օրինաչափությունը §հուշում¦ է, որ հավանաբար, այդ նույն հատկությամբ օժտված կլինի ցանկացած թվով գումարելիների S ո գումարը ։Այդ ենթադրությամբ (վարկածը) կարելի է ձևակերպել այսպես․

§Ցանկացած բնական n-ի դեպքում ճիշտ է Sո =$\frac{n}{3n+1}$ հավասարությունը ¦:

 Հաջորդ կետում դուք կծանոթանաք մի այնպիսի մեթոդի ,որի օգնությամբ կարելի է ապացուցել ,որ արված եզրահանգումը ճիշտ է։

**Օրինակ 2:** Դիտարկելով A (n)=n²+n+17 արտահայտության արժեքը առաջին մի քանի բնական n-երի դեպքում ,նկատում ենք ,որ ստացված թվերը պարզ են․

P(1)=19, P(2)=23, P(3)=29, P(4)=37, P(5)=47,

 P(6)=59, P(7)=73, P(8)=89, P(9)=107, P(10)=127:

 Այստղից եզրակացնել,որ §Ցանկացած բնական n-ի P(n)-ը պարզ թիվ է ¦, ակնհայտորեն սխալ է։Օրինակ ,n=17 դեպքում ստանում ենք ՝

 P(17)=17²+17+17=17.19,

որը պարզ չէ:

**Օրինակ 3:** XVII դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ֆյեռ Ֆերման դիտարկելով 2²ⁿ+1 տեսքի թվերը, նկատել է, որ n=1, 2, 3, 4 դեպքերում ստացվում են պարզ թվեր ։ Այնուհետև նա ենթադրել է, որ այդ տեքստի բոլոր թվերը պարզ են։ Սակայն, 18-րդ դարի խոշորագույն մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերը հիմնավորեց, որ այդ ենթադրությունը սխալ է։ Նա ցույց տվեց, որ հենց n=5 դեպքում ստացվող $2^{32}+1 թիվը պարզ չէ․ այն բաժանվում է 641$-ի վրա։

 **Օրինակ 4:** գերմանացի մաթեմատիկոս Գոտֆրիդ Լեյբնիցը, դիտարկելով $n^{k}$-n տեսքի արտահայտությունը, ապացուցել է, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում $n^{3}$- n-ը բաժանվում է 3-ի, $n^{5}$-n-ը՝ 5-ի, $n^{7}$-n-ը՝ 7-ի։ Ելնելով դրանից, նա ենթադրել է, որ ցանկացած կենտ k թվի դեպքում $n^{k}$-n-ը բաժանվում է k-ի։ Սակայն դժվար չէ համոզվել, որ k=9 դեպքում այդ պնդումը սխալ է։ Իրոք, երբ n=2, ստանում են՝ $n^{9}-n=2^{9}$-2=510, որը չի բաժանվում 9-ի։

Նշենք, որ այդ վարկածի ոչ ճիշտ լինելու մեջ շուտով համոզվել է նաև ինքը՝ Լեյբնիցը։ Միաժամանակ նշենք, որ ընդհանուր դեպքում ճիշտ է հետևյալ պնդումը․

Ցանկացած պարզ k թվի դեպքում $n^{k}$-n-ը բաժանվում է k-ի։Այդ պնդման ապացուցումը կտրվի հետագայում։

 Այսպիսով, դատողությունների միևնույն մեթոդը մի դեպքում կարող է հանգցնել ճիշտ եզրակացություն, մեկ այլ դեպքում՝ սխալ եզրակացության։

 Թերի ինդուկցիայի մեթոդը, ինչպես արդեն համոզվեցինք, միշտ չէ, որ հանգեցնում է լիովին եզրակացության։ Այդ մեթոդով ստացված եզրահանգումը, այնուամենայնիվ, մնում է սոսկ վարկած, քանի դեռ այն չի հաստատվել մաթեմատիկական ճշգրիտ դատողություններով։

 Թերի ինդուկցիան մաթեմատիկայում չի համարվում խիստ ապացուցման մեթոդ, սակայն հանդիսանում է նոր ճշմարտությունների բացահայտման էվրիստիկական $(որոնողական)$ հզոր մեթոդ։ Այն հնարավորություն է տալիս ձևակերպելու վարկածներ, որոնք կարիք ունեն հետագայում խիստ ապացուցման կամ ենթակա են հերքման։

 **3. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը**

Մաթեմատիկայում լրիվ ինդուկցիայի մեթոդն ունի սահմանափակ կիրառումներ։ Մաթեմատիկական շատ առաջադրություններ պարունակում են անվերջ բազմությամբ մասնավոր դեպքր։ Հասկանալի է, որ նման իրավիճակում հնարավոր չէ ստուգումը կատարել բոլոր դեպքերի համար։ Մյուս կողմից՝ մենք արդեն համոզվել ենք, որ թերի ինդուկցիան կարող է բերել սխալ արդյունքի։

 Մաթեմատիկայի շատ բաժիններում հարկ է լինում ապացուցել բնական փոփոխականից կախված A(n) պնդման ճշմարիտ լինելը այդ փոփոխականի բոլոր արժեքների համար։ Նման խնդիրներ լուծելիս մենք հաճախ կարող են դիմել ապացուցման հատուկ մեթոդի, որը կոչվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ։

 Այդ մեթոդի հիմքում ընկած է հետևյալ սկզբունքը․

 Փոփոխականի բոլոր բնական արժեքների համար A(n) պնդումը համարվում է ճիշտ,եթե տեղի է ունենում հետևյալ երկու պայմանները․

1. ա) A(n) պնդումը ճիշտ է n=1 -ի դեպքում

բ) Այն ենթադրությունից ,թե A(n) պնդումը ճիշտ է n=k դեպքում,որտեղ k-ն կամայական բնական թիվ է ,հետևում է,որ այն ճիշտ է նաև n=k+1 դեպքում։

Այս պնդումը կոչվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկբունք։

 [Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը բնական թվերի թվաբանության հիմնական աքսիոմներից մեկն է։Սակայն,հիմքում ունենալով բնական թվերին վերաբերվող հետևյալ երկու հատկությունները,կարելի է մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքն ընդունել որպես թեորեմ։Այդ հատկություններն են՝

 ա) բնական թվերի ցանկացած ենթաբազմություն ունի ամենափոքր տարր

բ) մեկից տարբեր ցանկացած բնական թիվ ունի իր նախորդ բնական թիվը

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքն ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ․դիցուք գոյություն ունեն այնպիսի բնական թվեր,որոնց համար պնդումը ճիշտ չէ։Նշանակենք այդ թվերից ամենափոքրը $n\_{1}$-ով։

Քանի որ $n\_{1}$ $\ne $ 1 ( $n\_{1}$-ի դեպքում պնդումը ճիշտ է ՝ըւս պայմանի),ուստի

$n\_{1}$-ը կունենա իր նախորդ ՝ $n\_{0}$ բնական թիվը ,որի համար պնդումը ճիշտ է;Ինդուկցիայի սկզբունքի բ) կետի համաձայն ՝պնդումը ճիշտ կլինի նաև $n\_{0}$ -ի հաջորդի՝ $n\_{1}$-ի համար ։Ստացված հակասությունը հաստատում է,որ այդ պնդումը ճիշտ է ցանկացած n $\in $ N դեպքում]։

 Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցումը բաղկացած է երկու մասից։Սկզբում ապացուցվելիք պնդումը ստուգվում է n=1 -ի դեպքում ։Ապացուցման այդ մասը կոչվում է ինդուկցիայի բազիս։

Ապացուցման հաջորդ մասը անվանում են ինդուկտիվ քայլ։Այդ մասում ապացուցվում է պնդման ճիշտ լինելը n=k+1 -ի դեպքում ՝այն ենթադրությամբ,որ պնդումը ճիշտ է n=k-ի դեպքում(ինդուկցիայի ենթադրությունը)։

 Եթե ապացուցման երկու մասերն էլ կատարված են ,ապա մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի հիման վրա տվյալ առաջադությունը ճիշտ կլինի ցանկացած բնական n թվի դեպքում։

 Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը լայն կիրառություններ ունի մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններում(թվաբանության մեջ,հանրահաշվում,թվերի տեսությունում,մաթեմատիկական անալիզում,երկրաչափության մեջ և այլն)։

Դիտարկենք օրինակներ

**Օրինակ 1։** Ապացուցենք,որ ցանկացած բնական n -ի համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

 $1^{2}+2^{2}+3^{2}+$*…....*$n^{2}$=$\frac{n ( n + 1) (2n + 1)}{6}$:

 Լուծում։ n=1 -ի դեպքում այդ հավասարության ձախ մասն ընդունում է $1^{2}$,այսինքն՝ մեկին հավասար արժեք ,իսկ աջ մասը ՝$ \frac{1 ( 1 + 1) ( 2· 1+ 1)}{6}$,որը դարձյալ հավասար ՝ 1-ի։Նշանակում է n=1 -ի դեպքում պնդումը ճիշտ է։

 Ընդունենք ,որ ապացուցվելիք հավասարությունը ճիշտ է n=k-ի դեպքում,այսինքն՝

$1^{2}+2^{2}+․․․․․․+k^{2}$=$\frac{k ( k + 1) (2k + 1)}{6}$:

Ապացուցենք,որ այն ճիշտ է նաև n=k+1-ի դեպքում (ինչպիսին էլ լինի բնական k թիվը ),այսինքն՝

$1^{2}+2^{2}+3^{2}․․․․․․+k^{2}+(k+1)²$=$\frac{ ( k + 1)(k+2) (2k + 3)}{6}$:

Իրոք՝

$1^{2}+2^{2}+3^{2}․․․․․․+k^{2}+(k+1)²$=$\frac{ k( k + 1) (2k + 3)}{6}+\left(k+1\right)^{2}=$

=$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)²}{6}=\frac{(k+1)(2k²+7k+6)}{6}$=$\frac{(k+1)(k+2)+(2k+3)}{6}$:

 Հետևաբար,համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի տրված հավասարությունը ճիշտ է ցանկացած բնական n-ի դեպքում։

**Օրինակ 2։** Ապացուցենք,որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում $7^{n+1}+8^{2n-1}$

 Բաժանվում է 19-ի։

Լուծում։ n=1 -ի դեպքում կունենանք՝$7^{2}+8^{1}=57,որը բաժանվում է $ 19-ի։

Ենթադրենք,թե մի որոշ k բնական թվի համար $7^{k+ 1}+8^{2k-1}$ թիվը բաժանվում է 19-ի։

 Ապացուցենք,որ այդ դեպքում $7^{k+ 2}+8^{2k+1}$ թիվը (երբ n=k+1) ևս բաժանվում է 19-ի։

Իրոք․

 $7^{k+ 2}+8^{2k+1}$ =7· $7^{k+ 1}+64·8^{2k-1}=$ 7 ($7^{k+ 1}+8^{2k-1})$ +57· $8^{2k-1}$ :

Քանի որ ստացված գումարի յուրաքանչյուր գումարելին բաժանվում է

19 -ի ,հետևաբար $7^{k+ 2}+8^{2k+1}$ գումարը նույնպես բաժանվում է 19 -ի:

 Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի պայմանները բավարարված են ,ուստի խնդրի պնդումը հիմնավորված է ։

 **Օրինակ 3:** Ապացուցենք Բեռնուլլիի անհավասարությունը․

  (1+$α$)ⁿ$\geq 1+nα$,$ α>-1, n \in N$:

Լուծում։ n=1 դեպքում ստանում ենք ճիշտ անհավասարություն՝

 1+$α\geq 1+α$ ։

Ենթադրենք ,որ անհավասարությունը ճիշտ է n=k դեպքում,այսինն՝

 $(1+α)^{k}\geq 1+kα$:$ $

Այդ անհավասարության երկու մասերը բազմապատկելով ( $1+α$) -ով (հիշենք,որ $ α>-1$ ), կստանանք՝

$(1+α)^{k+1}\geq (1+kα)(1+α)=1+(k+1)α+kα²$:$ $

 Քանի որ $kα^{2}\geq 0, $ուստի ,առավել ևս ,տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$ (1+α)^{k}\geq 1+(k+1)α$:$ $

Եվ այսպես, ենթադրելով, որ տրված անհավասարությունը ճիշտ է n=k, մենք ապացուցեցինք, որ այն ճիշտ է նաև n=k+1 դեպքում։ Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի երկու կետերն էլ բավարարված են, որով և ապացուցվում է Բեռնուլլիի անհավարությունը։

 **Օրինակ 4։** դիցուք, $x\_{1},x\_{2,…….}x\_{n }$-ը դրական թվեր են, ընդ որում ՝ $x\_{1},x\_{2,…….}x\_{n }$=1

 Ապացուցեք, որ

 $x\_{1},x\_{2} +․․․․․․+x\_{n }\geq $n

Լուծում; n=1 -ի դեպքում կունենանք մեկ դրական թիվ՝ $x\_{1}$: ըստ պայմանի $x\_{1}=1$ ՝ և, հետևաբար, կարելի է գրել $ x\_{1}\geq 1$, այսինքն՝ n=1 դեպքում ճիշտ է։

Ենթադրենք, թե պնդումը ճիշտ է n=k –ի համար։ Համոզվենք, որ այդ պայմանով պնդումը ճիշտ կլինի նաև n=k$+$1 դեպքում։

 Դիցուք, $x\_{1,}$ $x\_{2,,}$…..$x\_{k}$, $x\_{k+1-ը}$ $ x\_{1,}$ $x\_{2,,}$…..$x\_{k}$, $x\_{k+1}$=1 պայմանին բավարարող կամայական դրական թվեր են։ Հնարավոր է երկու դեպք․

ա)այդ թվերից յուրաքանչյուրը հավասար է 1-ի:Այդ դեպքում դրանց գումարը հավասար է $(k+1)$ -ի ,ուստի և անհավասարությունը ճիշտ է։

բ)այդ թվերի մեջ կա գոնե մեկը ,որը 1-ից տարբեր է ։Այդ դեպքում կգտնվի նրանցից ևս մեկը,որը հավասար չէ 1-ի,ընդ որում ,եթե նրանցից մեկը փոքր է 1-ից ,ապա մյուսը մեծ է 1-ից։Չսահմանափակելով ընդհանրությունը ,կարելի է համարել ,որ $x\_{k}$>1,իսկ$ x\_{k+1}$<1։Այժմ դիտարկենք հետևյալ k թվերը՝

 $x\_{1,}$ $x\_{2,,}$…..$x\_{k}$, $x\_{k-1}$, $(x\_{k}x\_{k+1})$

Դրանց արտադրյալը հավասար է 1-ի,հետևաբար ,ինդուկտիվ զրակացության համաձայն՝

 $x\_{1,}+$ $x\_{2+,}$…..+ $x\_{k-1}$+ $x\_{k}x\_{k+1}$ $\geq $k։

Վերջին անհավասարության երկու մասերին ավելացնենք

 $x\_{k }+x\_{k+1}$ - $x\_{k}x\_{k +1}$

և կատարենք որոշ պարզ ձևափոխություններ․

 $x\_{1,}+$ $x\_{2+,}$…..+ $x\_{k+1}$ $\geq $k-$x\_{k}x\_{k+1}$+$x\_{k} +x\_{k+1}$=k+1+$x\_{k }$(1-$ x\_{k+1}$)+$ x\_{k+1}$*-1=*

= k+1+$x\_{k }$(1-$ x\_{k+1}$)- (1-$ x\_{k+1}$)= k+1+(1-$ x\_{k+1}$)$ (x\_{k-1}$)$\geq $ k+1,

քանի որ (1-$ x\_{k+1}$)$ (x\_{k}-1$)>O։

 Այսպիսով, n=k –ի դեպքում պնդման ճշմարիտ լինելուց հետևում է նրա ճշմարիտ լինելը n=k$+$1 դեպքում։ Պնդումն ապացուցված է։

Ապացուցման ընթացքից պարզ երևում է ,որ ապացուցվելի առնչության մեջ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միյն այն դեպքւմ ,երբ

 $x\_{1}$ $=x\_{2}$=…..$=x\_{n}$ =1:

**Օրինակ 5:** Ապացուցենք ,որ եթե n$ \geq $2(n$ \in $N),ապա ցանկացած n դրական թվերի թվաբանականմիջինը փոքր չէ այդ թվերի երկրաչափական միջինից՝

$\frac{x\_{1,}+ x\_{2}+…+ x\_{n}}{n}\geq \sqrt[n]{x\_{1,} x\_{2+,}…..x\_{n}}$ ( $x\_{1}$ $,x\_{2}$=…..$x\_{n}$ >O)

$$Լուծում ։ Դիտարկենք հետևյալ n թվերը$$

$\frac{x\_{1} }{\sqrt[n]{x\_{1} =x\_{2}=…..=x\_{n}}}$; $\frac{x\_{2} }{\sqrt[n]{x\_{1} =x\_{2}=…..=x\_{n}}}$; ․․․․․․․․․․․; $\frac{x\_{n} }{\sqrt[n]{x\_{1} =x\_{2}=…..=x\_{n}}}$;

 Ակնհայտ է ,որայդ բոլոր թվերը դրական են և դրանց արտադրյալը հավասար է 1-ի։

Հետևաբար ,ըստ նախորդ օրինակի ,դրանց գումարը փոքր չէ n-ից՝

 $\frac{x\_{1} }{\sqrt[n]{x\_{1} x\_{2}…..x\_{n}}} $+ $\frac{x\_{2} }{\sqrt[n]{x\_{1} x\_{2}…..x\_{n}}}$ + ․․․․․․․․․․․+ $\frac{x\_{n} }{\sqrt[n]{x\_{1} x\_{2}…..x\_{n}}}$ $\geq $ n ,

որտեղից էլ կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

 $\frac{x\_{1,}+ x\_{2}+…+ x\_{n}}{n}\geq \sqrt[n]{x\_{1,} x\_{2+,}…..x\_{n}}$

ընդ որում,հավասարության դեպք ունի այն և միայն այն դեպքում ,երբ

 $x\_{1}$ $=x\_{2}$=…..$=x\_{n}$

**Օրինակ 6:** Հարթության մեջ տարածված են n ուղիղներ,որոնցից ցանկացած երկուսը զուգահեռ չեն և ցանկացած երեքը չեն անցնում միևնույն կետով։Հարթությունը քանի՞ մասի կտրոհեն այդ n ուղիղները։

 Լուծում։ Հեշտությամբ կարելի է համոզվել ,որ մեկ ուղիղը հարթությունը տրոհում է 2 մասի ,երկու ուղիղները՝ 4 մասի,երեք ուղիղները՝ 7 մասի , չորս ուղիղները ՝ 11 մասի։

 Որոնելի քանակը նշանակենք F(n) -ով։ Կարելի է նկատել,որ՝

 F(1)=2,

 F(2)= F(1)+2=2+2=1+(1+2),

 F(3)= F(2)+3=1+(1+2+3),

 F(4)= F(3)+4=1+(1+2+3+4),

 F(5)= F(4)+5=1+(1+2+3+4):

Ելնելով ստացված օրինաչափությունից՝ բնական է ենթադրել ,որ

 F(1)=F(ո-1)+ո=1+(1+2+․․․․․․․+ո),

այսինքն՝

 F(ո)=1+$\frac{ո ( ո+1) }{2}$։ (1)

Ապացուցենք (1) բանաձևի ճշմարիտ լինելը ՝ ելնելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոից։

ո=1 դեպքում բանաձևն արդեն ստուգվծ է ։Անելով ինդուկցիայի ենթադրությունը,այնուհետև դիտարկենք խնդրի պայմանին բավարարող ցանկացած (k+1) ուղիղներ։

 Ընտրենք այդ ուղիղներից մեկը և այն անվանենք (k+1)-րդ ուղիղ։Ինդուկցիայի ենթադրության համաձայն, մյուս k ուղիղները հարթությունը տրորում են 1+$ \frac{k( k+1)}{2}$ մասերի։ Հատվելով k ուղիղների հետ (k+1)-րդ ուղիղը կտրոհվի ( k+1) մասերի։

Ստացված մասերից յուրաքանչյուրը հարթության՝ k+1 մասերից որևէ մեկը կտրոհի երկու մասերի, ուստի, հրթության արդեն եղած 1+$ \frac{k( k+1)}{2}$ մասերն կավելանա ևս (k+1) մաս։ Այսպիսով,

F (k+1)= f (k) + (k+1)=1+$\frac{k( k +1)}{2}$ +k+1=1+ $\frac{( k +1)(k+2)}{2}$ :

Հետևաբար 1-ին բանաձևը ճիշտ է ցանկացած ո$ \in $ N դեպքում։

 Կարող ենք գրել պատասխանը 1 + $\frac{n( n+ 1)}{2}$:

Որոշ դեպքերում անհրաժեշտ է լինում տվյալ պնդման ճշմարիտ լինելն ապացուցել ոչ թե բոլոր բնական ո-երի , այլ միայն ո $\geq m $դեպքում , որտեղ m-ը տրված բնական թիվ է։ Այդ դեպքում մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը ձևակերպվում է այսպես․

Եթե ո բնական թվից կախված առաջադրութունը՝

 Ա) ճիշտ է մի որոշ n=m սկզբնական արժեքի համար և

Բ) այն ենթադրությունից, թե առաջադրությունը ճիշտ է n=k-ի դեպքում , որտեղ k $\geq m$ կամայական բնական թիվ է, հետևում է , որ այն ճիշտ է նաև ո=k+1 դեպքում ապա առաջադրությունը ճիշտ է ցանկացած բնական ո $\geq m համար։$

 Օրինակ 7 ։ Ապացուցենք, որ ցանկացած ո $\geq 2 $թվերի գումարի մոդուլը ճի գերազանցում այդ թվերի մոդուլների գումարին՝

 |$a\_{1}$+$a\_{2}+…+a\_{n}$| $\leq $ |$a\_{1}| $+$| a\_{2}|+…+|a\_{n}$| : (2)

Լուծում։Ապացուցումը տանենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։

ա) ո=2 դեպքում ստանում ենք հայտնի անհավասարություն՝

 |$a\_{1}$+$a\_{2}$| $\leq $ |$a\_{1}| $+$\left| a\_{2}\right|,$

Որը ճշմարիտ է ցանկացած $a\_{1 } և a\_{2 }թվերի համար$։

բ) դիցուք, k-ն ( k $\geq $2) որևէ բնական թիվ ։ Ապացուցենք, որ եթե 2 անհավասարությունը ճիշտ է k գումարելիների համար, ապա այն ճիշտ կլինի նաև այն դեպքում, որբ գումարելիների քանակը (k+1) է։

Իրոք․

 |$a\_{1}$+$a\_{2}+…+a\_{k}+a\_{k+1}$| $= $ |$(a\_{1} $+$ a\_{2}+…+a\_{k}$)+$a\_{k+1}|\leq $

$\leq $|$a\_{1}$+$a\_{2}+…+a\_{k}+|a\_{k+1}$| $\leq $ |$a\_{1}| $+$ |a\_{2}|+…+|a\_{k}|$+|$a\_{k+1}|$

 Մաթեմատիկական ինդուկցիայի՝ վերը ձևավորված կզբունքի համաձայն անհավասարություն ապացուցված է։

 **Օրինակ 8**։ Գտնել բոլոր ո$\in N$ թվերը ,րոնց դեպքում ճիշտ է

$ 2^{n}$>2n²-3n+1

Անհավասարությունը։

Լուծում։ Ստուգելով առաջին մի անի բնական թվերը,նկատում ենք ,որ ո=1 և ո=2 դեպքերում անհավասարությունը ճիշտ ,իկ ո=3,4 և 5 արժեքների դեպքում՝ ճիշտ չէ։

 Ելնելով մաթեմատիկական ինդուկցիյի ՝վերևում ձևակերպված սկզբունքից ,ապացուցենք ,որ ո$\geq 6(m=6)$ դեպքում տրված անհավասարությունը ճիշտ է։ ո=6 դեպքում ունենք ՝64 > 55,որը ճիշտ է։

Ենթադրենք ,թե մի որոշ բնական k (k$\geq 6$) թվի դեպքում տեղի ունի

Անհավասարությունը ։Քանի որ

 $2^{k+1}$>2(k+1)²- 3 (k+1)+1

 Անհավասարությունը ( երբ ո= k+1) կարելի է գրել

 2 ( $2^{k}$-2k²+3k-1)+ 2k²-7k+2>0

Տեսքով ,ուստի վերջին անհավասարություն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ ,որ k$\geq 6$ դեպքում 2k²-7k+2>0 ,որը պարզ երևում է ՝ այն 2k(k-3,5)+2>0 տեսքով ներկայացնելիս։

 Այսպիսով ,տրված անհավասարությունը ճիշտ է

 ո=1, ո=2 և ո$\geq 6$ (ո$\in N$) արժեների դեպքում։

 Որոշ խնդիրներում մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքն ընդունվում է հետևյալ ձևակերպմամբ ․

A(ո) պնդումը,որտեղ ո-ը բնական թիվ է ,ճշմարիտ է բոլոր ո$\geq m$ (m$\in N$) բնական թվերի համար ,եթե իրագործելի են հետևյալ երկու պայմանները․

1) A(ո) -ը ճշմարիտ է ո=m և ո=m+1 դեպքերում։

2)Յուրաքանչյուր k (k$\geq m$) բնական թվերի դեպքում A(k)-ի և A(k+1)-ի

Ճշմարիտ լինելուց հետևում է A(k+2)-ի ճշմարիտ լինելը։

**Օրինակ 9։** Ապացուցենք ,որ եթե $\left(x + \frac{1}{x}\right)-ը$ ամբողջ թիվ էէ ,ապա ցանկացած բնական ո վի դեպքում $\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)$-ը ևս ամբղջ թիվ է։

 Լուծում ։ Նշանակենք ՝ $x^{n}+\frac{1}{x^{n}}$ =$S\_{n}:n=1$ դեպքում ունենք ՝$ $

$\begin{array}{c} \\S\end{array}\_{1}=$ $x + \frac{1}{x}$, որը ,ըստ պայմանի ,ամբողջ թիվ է։

Ենթադրենք , թե $S\_{n}-ը $ամբողջ է ո=k և ո =k+1 արժեքների

դեպքում , այսինքն՝ $ \begin{array}{c} \\S\end{array}\_{k}=$ $X^{k} + \frac{1}{X^{k}}$ և $\begin{array}{c} \\ S\end{array}\_{k+1}=$ $X^{k+1} + \frac{1}{X^{k+1 }}$

թվերն ամբողջ են ։Դժվար չէ նկտել,որ

 $X^{k+2}$+$\frac{1}{X^{k+2 }}$ = $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(X^{k+1} + \frac{1}{X^{k+1 }}\right)$ - $\left(X^{k} + \frac{1}{X^{k}} \right), $

Ուստի կարող ենք գրել ՝

 $\begin{array}{c} \\S\end{array}\_{k+2}=$ $\begin{array}{c} \\S\end{array}\_{1}\begin{array}{c} \\S\end{array}\_{k+1}-\begin{array}{c} \\ S\end{array}\_{k}։$

 Վերջին հավասարությունից էլ հետևում ,որ $\begin{array}{c} \\S\end{array}\_{k+2}-ը $ամբողջ թիվ է , քանի ,որ $ \begin{array}{c} \\S\end{array}\_{1}$-ն ամբողջ է (ըստ պայմանի),իսկ ինդուիկտիվ ենթադրության համաձայն $\begin{array}{c} \\ S\end{array}\_{k} և \begin{array}{c} \\ S\end{array}\_{k+1}$ թվերը ևս ամբողջ են;Դրանով էլ ավարտվում է խնդրի լուծումը։

  **Եզրակացություն**

 Ներկայացված աշխատանքում դիտարկվում է մաթեմատիկայի կարևոր և առանցքային հարցերից մեկը,որը լայն կիրառություն ունի ինչպես դպրոցական այնպես էլ բարձրակարգ մաթեմատիկայի դասընթացում։Մաթեմատիկան ինտուիցիայի սկզբունքի երեք տարբեր ձևակերպված դրույթների( աքսիոմների) կիրառմամբ ներկայացված են տարատեսակ թեմաներին առնչվող առաջադրանքների լուծումներ (նույնությունների ապացուցում , անհավասարությանը վերաբերող պնդումներ, հջորդականությունների վերաբերյալ առաջադրանքներ, երկրաչափական բնույթի խնդիրներ և այլն)։

 Նյութի շարադրանքին ամբողջությամբ կարելի է վերագրել մաթեմատիկայի խորացված ուսուցման գործընթացին։Այն պարզեցված տարբերակով կիրառելի է ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթցում։

 Ենթադրվում է ,որ այն պիտանի կլինի մաթեմատիկայի ուսուցիչների համար և ,հատկապես,սկսնակ ուսուցիչների համար կողմնորոշիչ և ուսուցանող դեր կունենա։

 **Օգտագործված գրականություն**

1. Գ․ Գևորգյան, Ա․ Սահակյան․§Հանրահաշիվ և մաթեմատիկակա անալիզի տարրեր 11¦։ Բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար։ Ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք։

2. Կ․ Առաքելյան․ §հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր¦։ Մաթեատիկայի խորացված ուսուցում։ Օժանդակ ձեռնարկ ավագ դպրոցի բնագիտա-մաթեմատիկական հոսքի համար։ Երևան, §Էդիտ Պրինտ¦ հր․ 2011թ։

3. Կ․ Առաքելյան§Մաթեմատիկայի խնդիրների ժողովածու (7-11) ¦։

Երևան, §Էդիտ Պրինտ¦ հր․ 2021թ․։

4. Г. В. Дорофоев, Л.В. Кузнецов, Е. А. Седова. §Алгебра и начаа анализа¦-10 Учеб. Для общеоброзовать учреждённыйю Москва, изд. Дрофа. 2005