ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՀՀ ԿԳՄՍՆ «Երևանի Լեոյի անվան հ. 65 ավագ դպրոց» ՊՈԱԿ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Թեմա՝ ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՁԵՎԱՎՈՐՈՒՄԸ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՈՒՄ

Կատարող՝ ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ ԱՐԱՄ ԿԻՐՈՎԻ

Ղեկավար՝ ԳԱՅԱՆԵ ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ԵՐԵՎԱՆ 2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Թեմայի արդիականությունը: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական դաստիարակության խնդիրը դիտարկվել է հեղինակների կողմից: Այստեղ կարևորվել թեորեմների ուսուցման գործընթացում գեղեցիկի ձևավորման խնդիրը: Այն հիմնականում դիտարկվել է մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին և ներքին գեղեցիկի տեսանկյունից:

Հետազոտության նպատակը և խնդիրները: Հետազոտության **նպատակն** է համակողմանիորեն բացահայտել մաթեմատիկայի թեորեմների ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղեցիկի ձևավորման հիմնախնդիրը:

Սահմանված նպատակին հասնելու համար մեր կողմից առաջադրվել են հետևյալ **խնդիրները**՝ գեղագիտական դաստիարակության էության բացահայտումը, գեղագիտական արժեքների և մաթեմատիկական ուսուցման գործընթացի միջոցով դրանց ձևավորման խնդրի ուսումնասիրությունը, թեորեմների ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական դաստիարակության, գեղագիտական արժեքների ձևավորման խնդրի լուծումը:

Հետազորության առարկան և օբյեկտը: Հետազոտության օբյեկտը հանդիսանում է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը:

Գլուխ1. Թեորեմների գեղագիտական գրավչության օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշները,արտաքին և ներքին դրսևորումները:

1.1Թեորեմների գեղագիտական գրավչության օբյեկտիվ հատկանիշները

Գիտության մեջ գեղեցիկի հարցը դիտարկվել է դեռևս հնադարից, սակայն գիտական գեղեցիկի ուսումնասիրությունը առաջին անգամ կատարել է 18-րդ դարի շոտլանդացի փիլիսոփա Ֆրենսիս Հատչեսոնը: Տարբեր հետազոտողներ դիտարկում են գիտական գեղեցիկի տարբեր հատկանիշներ, հանդիպում են նաև տրամագծորեն հակառակ մոտեցումներ միևնույն հատկանիշի գեղագիտական գնահատականի վերաբերյալ: Ն. Վ. Գուսյեվան կատարում է մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշների որոշ դասակարգում, սակայն նա ելնում է մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությունից, իսկ հատկանիշների ընդհանուր դասակարգումը՝ ըստ դրանց գեղագիտական էության չի կատարում [4]:

Գիտական գեղեցիկի հատկանիշների մի մասը վերաբերում է գիտության այս կամ այն բնագավառի կամ միաժամանակ մի քանի բնագավառների օբյեկտներին՝ դրանք այդ օբյեկտների հատկություններն են: Ինչպիսիք են օրինակ՝ համաչափությունը, ներդաշնակությունը, օպտիմալությունը, տրամաբանական խստությունը, հստակությունը և այլն: Համաչափությունը, օրինակ մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի, քիմիայի և բնական այլ գիտությունների ամենատարբեր օրինակների հատկություն է, տրամաբանական խստությունը գիտական մտքի հատկություն և այլն: Նման հատկանիշները մենք անվանում ենք գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներ[4] :

Գիտական գեղեցիկի հատկանիշների մյուս մասը վերաբերում է սուբյեկտին՝ գեղեցիկի ի հայտ գալը պայմանավորված է նաև գիտական գործունեություն իրականացնող սուբյեկտի մտավոր, ինտելեկտուալ ունակություններով: Գիտության մեջ առկա գեղեցիկը մեկը կարող է նկատել, իսկ մյուսը՝ ոչ, դա պայմանավորված է գիտության տվյալ բնագավառում ունեցած գիտելիքներով և սուբյեկտի այլ ունակություններով, որոնք դիտվում է որպես գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներ: Գիտական գեղեցիկի մաս են կազմում նաև այն հատկանիշները, որոնք երևան են գալիս օբյեկտի հետ սուբյեկտի երկկողմ հարաբերության ընթացքում և արտահայտում են սուբյեկտի հոգեկանի այս կամ այն կողմը՝ ճանաչումը, գործունեությունը և այլն: Օրինակ, անսպասելիությունը, ինչն արտահայտում է գիտական օբյեկտի հետ սուբյեկտի հարաբերության ընթացքում նրա սպասումը, օգտակարությունը, ինչն արտահայտում է գիտական օբյեկտի կարևորությունը սուբյեկտի համար և այլն: Դրանք անվանում ենք գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներ [4]:

Դիտարկենք մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշները, որոնք թեորեմների գեղեցկության կարևոր չափանիշներ են հանդիսանում և որոնցով բնութագրվում են թեորեմների գեղեցկությունը:

Որպես օրինակ դիտարկենք **հստակությունը**, որը կարևոր հատկանիշ է և հստակությամբ պետք է օժտված լինեն բոլոր թեորեմները: Թեորեմի պայմանները և եզրակացությունը պետք է ձևակերպված լինեն հստակ, զերծ երկիմաստ ընկալումներից, հուզական, զգացմունքային երանգավորումներից և խոսքի արտահայտման գեղարվեստական այլ հնարքներից, այսինքն թեորեմը չպետք է պարունակի ավելորդ տերմիններ և հասկացություններ, որոնք նրա ընկալման խոչընդոտ կարող են հանդիսանալ:Դրանով է պայմանավորված թեորեմի ապացուցելիությունը, և թեորեմում տեղ գտած պայմանները պետք է անհրժեշտ բավարար լինեն եզրակացությունը արտծելու համար: Միևնույն ժամանակ նրանում չպետք է լինեն այնպիսի պայմաններ, որոնք չեն օգտագործվում թեորեմի ապացուցման ընթացքում կամ էլ կարելի է ստանալ մյուս պայմաններից [6]:

Դիտարկենք նաև **համեմատումը** որը ևս հանդիսանում է գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշ, լայն կիրռություն ունի մաթեմատիկայում, հատկապես երկրաչափությունում, և մասնավորապես՝ թեորեմներում: Հանրակրթական դպրոցի 7- րդ դասարանի երկրաչափություն առարկայի առնչություններ եռանկյան կողմերի և անկյունների մեջ թեմայի հիմքում հենց դրված է համեմտումը, ձևակերպենք թեորեմը՝

Թեորեմ: Եռանկյան մեջ ավելի մեծ անկյան դիմաց ընկած է ավելի մեծ կողմ և հակառակը ավելի մեծ կողմի դիմաց ընկած է ավելի մեծ անկյուն:

Թեորեմը աչքի է ընկնում թե իր պարզությամբ, թե հստակությամբ, բոլոր եռանկյուններին միավորում է նշված հատկությամբ, և իր գեղեցկությամբ չի զիջում նույնիսկ Պյութագորասի թեորեմին:

Ինչ վերաբերում է թեորեմների **պարզությանը**, ապա թեորեմի պրզությունը նպաստում է մաթեմատիկայի ընդհանուր համակարգի ձևավորման մեջ թեորեմի անփոխարինելի նշանակությամբ: Միևնույն ժամանակ պարզությունը ընկած է թեորեմի ուսուցման հաջողության հիմքում, և հենց պարզությամբ է պյմանավորված թեորեմի ընկալումը սովորողների կողմից: Թեորեմի պարզությունը, առաջին հերթին, արտահայտում է նրա ձևակերպման մեջ: Երկար-բարակ, խրթին ձևակերպումները լրացուցիչ խոչընդոտ են հանդիսանում նրա ուսուցման ճանապահին, առաջացնելով ավելորդ դժվարություններ և հիասթափություն առարկայի նկատմամբ: Թեորեմի ձևակերպման պարզությունը պայմանավորված է մաթեմատիկական լեզվի ճիշտև օպտիմալ օգտագործումով: Բանաձևի, թեորեմի մեջտեղ գտած մաթեմտիկական սիմվոլների մեծ քանակությունը կարող է նրա էության ըմբռնման արգելք հանդիսանալ: Տառային նշանակումները կարող են և՛ օգնել, և՛ խանգարել ձևակերպման պարզությանը: Օրինակ, այս թեորեմի ձևակերպումը կարելի է կատարել հետևյալ երեք եղանակներով, որոնք իրարից տարբերվում են իրենց պարզությամբ,

- Եթե ABC եռանկյան մեջ ∠A < ∠B < ∠C, ապա$|BC| < |CA| < |AB|$:
- Եթե ABC եռանկյան մեջ a < b < c, ապա ∠A < ∠B < ∠C :
- Եռանկյան մեջ ավելի մեծ անկյան դիմաց ընկած է ավելի մեծ կողմ և հակառակը ավելի մեծ կողմի դիմաց ընկած է ավելի մեծ անկյուն:

Այս ձևակերպումներից երկրորդում մաթեմատիկական սիմվոլների քանակությունը ավելի քիչ է, քան առաջինում: Այդ պատճառով այն ավելի պարզ տեսք ունի: Իսկ երրորդում ամբողջությամբ բացակայում են մաթեմատիկական սիմվոլները, և այն պարզության տեսակետից կատարյալ է այս երեք եղանակներից:

Հարկ է նշել, որ երկրաչափության դպրոցական դասընթացում հատվածի նշանակումը նրա ծայրակետերի միջոցով, եռանկյան նշանակումը նրա գագաթների միջոցով և դրանց հետագա օգտագործումը եռանկյան այլ տարրերի նշանակման համար, թեև հստակության կարևոր ցուցանիշ են, բայց մաթեմատիկական թեորեմին, նրա ապացույցին և մաթեմատիկական տեքստին ընդհանրապես հաղորդում են անհրապույր տեսք, դժվարացնում են համապատասխան երկրաչափական նյութերի ընթերցումը, ինչը արդյունք է մաթեմատիկական սիմվոլների անհարկի շատ օգտագործման, որի պատճառով խախտվում է մաթեմատիկական գեղեցիկի պարզության հատկանիշը [6]:

Մաթեմատիկական թեորամների գեղագիտական գրավչությունն արտահայտվում է նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի **բազմազանությունների միասնության** և **ընդհանրականության** օբյեկտիվ հատկանիշներով: Բազմազանությունների միասնության հատկանիշով, օրինակ, բոլոր ուղղանկյուն եռանկյունները միավորվում են <<**ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գումարը հավասար է 90 աստիճան** >> հատկությամբ, բոլոր եռանկյունները ՝ **երկու ուղղիղ անկյանը հավասար ներքին անկյունների գումար** ունենալու հատկությամբ, իննի վրա բաժանվող բնական թվերը՝ իննի վրա բաժանվող թվանշանների գումար ունենալու հատկությամբ և այլն: Մյուս կողմից, <<իննի վրա բաժանվող թվանշանների գումար ունեցող բնական թիվը բաժանվում է իննի>> հատկությունը կարելի է կիրառել ցանկացած բնական թվի համար, ինչը ցույց է տալիս այդ թեորեմի **ընդհանրականությունը** [6]:

Մաթեմատիկայում կա թեորեմների մի տեսակ, որոնցում դրսևորվում է գեղեցիկի **համաչափության** հատկանիշը: Դրանք արտահայտվում են այսպիսի համարժեքության տեսքով. A և B դատողությունները համարժեք են: Մաթեմատիկայում նման համարժեքությունները սովորաբար ձևակերպվում են <<A, այն և միայն այն դեպքում եթե B>> <<A-ն B-ի անհրաժեշտ և բավարար պայման է>> ձևերով: Նախորդ պարբերության մեջ բերված բոլոր թեորեմները այդպիսին են, ինչը դրանց տալիս է լրացուցիչ գեղագիտական գրավչություն. A և B դատողությունները կարծես թե <<հավասարակշռում>> են. Դրանք, փողարինելով մեկը մյուսով, նորից կստանանք տրվածին համարժեք թեորեմ: Այդ գրավչությունը սովորողը կզգա, եթե ուսուցիչն ուշադրություն դարձնի նրա վրա: Պետք է նկատի ունենալ, որ նման թեորեմները թույլ են տալիս այլ դեպքում նրանում առկա պայմանն ու եզրակացությունը փոխարինել մեկը կյուսով: Օրինակ, հավասարասրուն եռանկյան համար մենք հավասարապես օգտագործում ենք նրա երկու կողմերի կամ երկու անկյունների հավասարությունը: Եվ նման փոխարինումը օրինական է, որովհետև իրավացի է հետևյալ համարժեքությանը. Եռանկյունը հավասարասրուն է այն և միայն այն դեպքում, եթե հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են: Նույն կերպ, օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից, 3,4,5 կողմերով եռանկյան միջոցով որմնադիրները, ատաղձագործները և այլ արհեստավորնոր հաճախ կառուցում են ուղիղ անկյուն [5]:

Իսկ պարբերական ֆունկցիաների ուսումնասիրության ընթացքում դրսևորվում է ռիթմի գեղագիտական հատկանիշը, ածանցիալի մասնակցությամբ առանձին թեորեմներում՝ օպտիմալության հատկանիշը, դիֆերենցիալ հավասարումների մասնակցությամբ թեորեմներում՝ կայունության հատկանիշը և այլն:

Որպես գիտական կամ մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներ առանձնացնում ենք հետևյալները.

- **Կազմավորող հատկանիշները**՝ կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ներդաշնակությունը, ռիթմը, օպտիմալությունը, կայունությունը, կիրառելիությունը: Մաթեմատիկայի պարագայում նշված այս հատկանիշները արտահայտում են ինչպես բուն մաթեմատիկայի, այնպես էլ գիտության ու բնության բազմապիսի ոլորտներում մաթեմատիկայի կիրառական օբյեկտների հատկությունները:

- **Միավորող հատկանիշները**՝ բազմազանությունների միասնականությունը, ընդհանրականությունը, գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառումը, ինքնատիպությունը: Մաթեմատիկական, գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառումը առանձնահատուկ դեր է խաղում: Գիտական գեղեցիկի դրսևորման և բացահայտման մեջ մաթեմատիկայի առանձնահատուկ դերը նշել են բոլոր հետազոտողները, սկսած Ֆ. Հատչեստոնից, որոնք մեծ մասամբ գիտական գեղեցիկը ներկայացրել է ուղղակի որպես մաթեմատիկական գեղեցիկ:
- **Տրամաբանական հատկանիշները**՝ հստակությունը, պարզությունը, բարդի հանգեցումը պարզին, տրամաբանական խստությունը: Այս հատկանիշները իրենց գեղագիտական գրավչությունը առանձնապես ցայտուն են արտահայտում մաթեմատիկայի և տրամաբանության մեջ [4]:

1.2. ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱՎՉՈՒԹՅԱՆ ՍՈՒԲՅԵԿՏԻՎ ՀԱՏԿԱՆԻՇՆԵՐԸ

Թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը մեծապես պայմանավորված է նրա ուսուցման կազմակերպումից, որի ընթացքում դրսևորվում են նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները:

Այստեղ առաջին հերթին պետք է նկատի ունենալ, որ յուրաքանչյուր մաթեմատիկական թեորեմ ոչ ակնհայտ ճշմարտություն է, և նրա իմացությունը արդեն մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշ է: Հասկանալի է, որ թեորեմի բերած այդ ճշմարտությունը, կախված ուսուցչի մոտեցումներից, կարող է աննկատ մնալ սովորողի համար կամ էլ դառնալ նշանակալից: Իսկ նշանակալից դարձնելու համար ուսուցիչը պետք է նախապատրաստի թեորեմի մուտքը. համապատասխան հարցադրումների միջոցով՝ ուսուցչի կամ աշակերտների ուժերով առաջ քաշվի վարկածներ և ներգրավի գեղեցիկի անկանխատեսելիության և անսպասելիության հատկանիշները: Սովորաբար գեղագիտական տարրը առավելագույնս դրսևորվում է, երբ սովորողը ինքն է գտնում կամ հայտնագործում թեորեմը: Նման հայտնագործումը հնարավոր է իրագործել ինչպես էվրիստիկական, այնպես էլ էմպիրիկ ճանապարհով [7]:

Թեորեմը սովորողների համար նշանակալից դարձնելու համար ուսուցիչը պետք է նախապատրաստի թեորեմի մուտքը, հարցադրումներ կատարելու և վարկածներ առաջ քաշելու միջոցով:

Սովորաբար ուսուցման գործընթացի թե՝ գեղագիտական , թե՝ ստեղծագործական տարրը առավելագույնս դրսևորվում է, երբ սովորողն ինքն է գտնում կամ մասնակցում է թեորեմի հայտնագործմանը:

Որոնման էվրիստիկական մեթոդը կապված է թեորեմի և նրա ապացուցման ներկայացման հերթականության հետ: Սովորաբար մաթեմատիկայում և նրա ուսուցման գործընթացում նախ ներկայացվում է թեորեմը, ապա կատարվում նրա ապացուցումը:

Ներկայացման այս ընթացքը չի համապատասխանում թեորեմի ստացման, հայտնագործման բնական ընթացքին, որտեղ մաթեմատիկոսը սկզբում ունի վարկած: Վարկածի հաստատման դեպքում նա կատարում է թեորեմի ձևակերպումը, որից հետո այդ հաստատումը ձևակերպում է որպես թորեմի ապա-ցուցում: Այսինքն՝ մաթեմատիկական գործունեությունը այստեղ իրագործվում է նախ՝ ապացուցումը, հետո՝ թեորեմի ձևակերպումը հերթականությամբ: Իրերի այս բնական ընթացքը, ինչպես նշվեց վերևում, խախտվում է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում և նրա ուսուցման գործընթացում, որտեղ նախ ձևակերպվում է պատրաստի թեորեմը, ապա տրվում է նրա ապացույցը: Իսկ գեղեցիկի ինտելեկտուալ որոնման սուբյեկտիվ հատկանիշը, նրանից բխող հուզական տարրը լավագույնս կարող է դրսևորվել, եթե թեորեմը ներկայացվի որպես էվրիստիկական որոնման արդյունք՝ հայտնագործություն [7]:

Օրինակ, միջին թվաբանականի և միջին երկարչափականի կապի մասին թեորեմը կարելի և տալ պատրաստի վիճակում և անցնել նրա ապացուցմանը, որտեղ բնականաբար սովորողի ստեղծագործական հնարավորությունները աննշան են: Մինչդեռ կարելի է մի քանի օրինակների դիտարկմամբ կատարել համապատասխան դատողություններ, առաջադրել վարկածը և դրանց արդյունքնում ստանալ այդ թեորեմը: Նման դատողությունները՝ ուսուցչի ոչ ակտիվ միջամտությամբ, կարող է անել աշակերտը: Այդ դեպքում աշակերտը անմիջականորեն մասնակցում է թեորեմի հայտնագործմանը, ինչը և մեծացնում է ուսուցման գործընթացի թե ստեղծագործական, թե գեղագիտական տարրը [3]:

Թեորեմի էմպիրիկ ուսուցումը նույնպես թույլ է տալիս ստեղծագործական մոտեցում: Այստեղ դիտարկվում են զանազան փորձնական օրինակներ, որոնք էլ հանգեցնում են թեորեմին և նրա ձևակերպմանը: Օրինակ, սինուսների թեորեմի էմպիրիկ եղանակով ուսուցումը կարելի է կատարել հետևյալ կերպ: Նախ հիշենք, որ եռանկյան մեջ մեծ անկյան դիմաց ընկած է մեծ կողմ, և կատարենք հետևյալ հարցադրումը. “Կա՞ այստեղ ինչ-որ օրինաչափություն”: Առաջին “պատասխանը”, որ կառաջարկի մեր ինտուիցիան, ուղիղ համեմատականությունն է. քանի անգամ որ մեծ է մի անկյունը մյուսից, այնքան անգամ էլ մեծ է նրա դիմացի կողմը մյուսի դիմացի կողմից: Բայց 30 աստիճանի սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյան դիտարկումը հերքում է այս վարկածը, քանի որ 30 աստիճանի անկյունը փոքր է 90 աստիճանի անկյունից երեք անգամ, իսկ 30 աստիճանի անկյան դիմացի կողմը հավասար է ներքնաձիգի, այսինքն՝ 90 աստիճանի անկյան դիմացի կողմի կեսին: Այս դիտարկումից հետո աշակերտնրի մեծ մասը կկարծի, որ նշված հարցում չկա որևէ օրինաչափություն: Բայց այստեղ կարելի է անել ևս մեկ դիտարկում. 30 աստիճանի անկյան սինուսը հավասար է 1/2 –ի, իսկ 90 աստիճանի անկյան սինուսը՝ 1 –ի: Այս դիտարկումը ստեղծում է նոր վարկածի հնարավորություն. իսկ միգուցե եռանկյան կողմերի հարաբերությունը նույնն է, ինչ նրանց դիմացի անկյունների սինուսների՞ հարաբերությունը /ինչպես դիտարկված օրինակում/: Եթե աշակերտների մոտ նման վարկած դեռևս չի ձևավորվել, ապա կարելի է այստեղ դիտարկել ևս մեկ դեպք. նույն եռանկյան մեջ 60 և 30 աստիճանի անկյունների և սինուսների, և դիմացի կողմերի հարաբերությունը հավասար է 3 -ի: Այս նոր դիտարկումը արդեն բավարար է համապատասխան վարկածի ձևավորման համար: Այժմ արդեն կարելի է կամ ձևակերպել սինուսների թեորեմը և անցնել դրա ապացուցմանը կամ էլ շարունակել էվրիստիկական մոտեցումը և քայլ առ քայլ մոտենալ սինուսների թեորեմի հայտնաբերմանը: Բոլոր այս դիտարկումները կարելի է իրականացնել աշակերտների ուժերով, ինչը ուսուցման գործընթացին կհաղորդի ստեղծագործական բնույթ և էապես կավելացնի նրանում գեղագիտական տարրը: Նշենք, որ այստեղ վարկածի բացակայության և էվրիստիկական ճանապարհով թեորեմի ստացման դեպքում լիովին կդրսևորվի նաև գիտական գեղեցիկի **անսպասելիության սուբյեկտիվ հաստակնիշը**, ինչը կավելացնի թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը [3]:

Այսպիսով գիտական գեղեցիկի **սուբյեկտիվ հատկանիշները** նույնպես կարելի է բաժանել երեք խմբի:

Առաջին խմբում ներառելով այն հատկանիշները, որոնք վերաբերում են սուբյեկտի գործունեության մոտիվացիային, անվանելով դրանք **մոտիվացիոն հատկանիշներ**: Այդպիսիք են օգտակարությունը, անսպասելիությունը, անկանխապեսելիությունը, նպատակաուղղվածությունը, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը և այլն [4]:

Երկրորդ խմբում ներառենք այն հատկանիշները, որոնք վերբերում են իմացության գործընթացին, նրա բնույթին: Անվանենք դրանք **ճանաչողական հատկանիշներ:** Գիտական գեղեցիկի ճանաչողական հատկանիշների մեջ ներառենք՝ ինտելեկտուալ որոնումը, գտնելը, հայտնագործելը, ճանաչելը, առարկայի էությունը հասկանալը, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը և այլն [4]:

Երրորդ խմբում ներառում ենք այն հատկանիշները, որոնք վերաբերում են գործունեությունը իրականացնող սուբյեկտի հոգեկանին. Անվանելով դրանք գիտական գեղեցիկի **հոգեկան հատկանիշներ**: Գիտականգեղեցիկի հոգեկան հատկանիշների մեջ ենք ներառում մտքի, երևակայության, ուշադրության, հիշողության, ընդունակության, կամքի դրական հատկանիշների առկայությունը՝ մտքի խորաթափանցությունը, արագությունը, ճկունությունը, ուշադրության կայունությունը, կամքի ուժը, նպատակասլացությունը և այլն [4]:

Բնականաբար: Առաջին նշված գործընթացների իրականացումը աշակերտից կպահանջի որոշակի ջանքերի ներդրում թեորեմի էությունը հասկանալու, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման համար, նպատակաուղղված աշխատանք, իսկ վերջնարդյունքի հասնելը կավելացնի սովորողի լավատեսությունը, հանգամանքներ, որոնք նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներ են և ավելացնում են թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը [7]:

1.3.ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱՎՉՈՒԹՅԱՆ ՆԵՐՔԻՆ ԴՐՍԵՎՈՐՈՒՄՆԵՐԸ

Գիտական գեղեցիկի հստակության, պարզության, ինքնատիպության և այլ օբյեկտիվ հատկանիշներ կարող են հանդես գալ նաև որպես թեորեմի գեղագիտական գրավչության արտաքին հատկանիշներ, իսկ բազմազանությունների միասնության, ընդհանրականության, բարդը պարզին հանգեցնելու, կայունության, կիրառելիության, օգտակարության, օպտիմալության օբյեկտիվ հատկանիշները արտահայտում են թեորեմի գեղագիտության ներքին ներուժը: Կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ներդաշնակությունը, ռիթմը և գիտական գեղեցիկի այլ հատկանիշներ կարող են արտահայտել թեորեմի ինչպես ներքին, այնպես էլ արտաքին գրավչությունը: Սակայն յուրաքանչյուր թեորեմ ունի գեղեցիկի ներքին և արտաքին դրսևորման իր յուրահատկությունները [8]:

Օրինակ.

Թեորեմ: **Երկու զուգահեռ ուղիղներից յուրաքանչյուրի բոլոր կետերը հավասարահեռ են մյուս ուղղից:**

Թեորեմը աչքի է ընկնում իր պարզությամբ ու հստակությամբ, որոնք արտահայտում են գեղագիտական գրավչության արտաքին հատկանիշները: Թեորեմում չկան ոչ մաթեմատիկկան սիմվոլներ, ոչ էլ տառային նշանակումներ և արտաքին տեսքից չափազանց պարզ է և հստակ: Իսկ բազմազանությունների միասնությունը, ընդհանրականությունը թեորեմում հանդես են գալիս, որպես գեղագիտական գրավչության ներքին հատկանիշներ, քանզի բոլոր զուգահեռ ուղիղները միավորվում են տվյալ հատկությամբ: Թեորեմի կիրառությունը թե տարբեր խնդիրներ լուծելիս, թե առօրյա տարբեր բնագավառներում բազմազան են և անգնահատելի, որով հենց պայմանավորված է թեորեմի գեղագիտության ներքին ներուժը:

Ն. Վ. Գույեվան անդրադառնալով հանրակրթական դպրոցի 5-6-րդ դասարանների մաթեմատիկայի դասընթացում դիտարկվող օբյեկտների ներքին գեղագիտությանը, առանձնացնում է թվային հատկությունները, թվային առնչությունները և թվային օրինաչափությունները:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում նրա օբյեկտների ներքին գեղագիտությունը դրսևորվում է ուսուցման բոլոր փուլերում: Այդ բոլոր փուլերում ներքին գեղագիտությունն արտահայտվում է մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշներով [6]:

Հասկացությունների ուսուցման պարագայում որպես ներքին գեղագիտություն կարող են հանդես գալ հասկացության ներմուծման անհրաժեշտության, այսինքն՝ մոտիվացիայի, մաթեմատիկական օբյեկտներում և պրակտիկայում դրա կիրառական նշանակության համակողմանի բացահայտումը:

Որպես հասկացության գեղագիտության դրսևորման հատկանիշներ կարող են հանդես գալ հստակության, ինքնատիպության, բազմազանությունների միասնության և ընդհանրականության, կարգի, համաչափության, համեմատության, ռիթմի, ներդաշնակության, օպտիմալության, օգտակարության և կիրառելիության օբյեկտիվ հատկանիշները: Նույն գործընթացում կարող են հանդես գալ նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի անսպասելիության, առարկայի էությունը հասկանալու համար ներդրված ջանքերի, խաղի, ինտելեկտուալ որոնման սուբյեկտիվ հատկանիշները [3]:

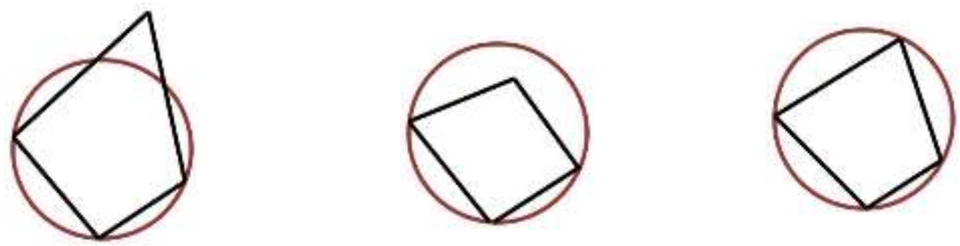
Թեորեմների ուսուցման գործընթացի ներքին գեղագիտությունը բացահայտելու համար անհրաժեշտ է թեորեմը դիտել որպես ինչ-որ հասկացության հատկություն կամ էլ տարբեր հասկացությունների միջև ներքին կապի արտահայտություն: Այդ դեպքում ստացված գեղագիտության գրավչությունը պայմանավորված է մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշներով: Թեորեմների մաթեմատիկական և պրակտիկ կիրառությունները նույնպես դրանց ներքին գեղագիտականի դրսևորումներ են [8]:

Մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին գեղագիտությունը իր ողջ փայլով ու խորությամբ է դրսևորվում մաթեմատիկական ապացուցումներում: Ամերիկացի հայտնի մաթեմատիկոս և մանկավարժ Պոլ Լոկհարդը մաթեմատիկան անվանում է ապացուցումների արվեստ: Յուրաքանչյուր թեորեմի ապացույցում օգտագործվող փաստարկումները, դրանց կուռ հաջորդականությունը՝ իրարից բխելու արվեստով շաղկապված քայլերի համապատասխան շղթան չի կարող գեղագիտական հաճույքի պատճառ չդառնալ [8]:

Հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացը չի կարող մաթեմատիկական գաղափարների, դրանց իրականացման, ապացուցումների այդպիսի խորքեր ներկայացնել: Սակայն այստեղ նույնպես ապացուցումները, ինչպես նաև ապացուցման մեթոդները կարող են աչքի ընկնել իրենց գեղագիտական գրավչությամբ, քանի որ դրանք ուղեկցվում են մաթեմատիկական գեղեցիկի՝ տրամաբանական խստության, համաչափության, համեմատության, ներդաշնակության օբյեկտիվ հատկանիշներով, իսկ դրանց ուսուցումը հնարավոր է ուղեկցել մաթեմատիկական գեղեցիկի այնպիսի սուբյեկտիվ հատկանիշներով, ինչպիսիք են առարկայի էությունը հասկանալու համար ներդրված ջանքերը, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը, ինտելեկտուալ որոնումը, գտնելը, հայտնագործելը [8]:

Մաթեմատիկական գեղեցիկի ներքին դրսևորման կարևոր աղբյուր են հանդիսանում նրա խնդիրները: Որպես ներքին գեղագիտության դրսևորվում կարող են ծառայել մաթեմատիկական գեղեցիկի օպտիմալության, օգտակարության, կիրառելիության օբյեկտիվ հատկանիշները և անսպասելիության, անկանխատեսելիության, առարկայի էությունը հասկանալու համար ներդրված ջանքերի, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման, ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու, հայտնագործելու սուբյեկտիվ հատկանիշները [8]:

Հանրահայտ է, որ յուրաքանչյուր եռանկյանը կարելի է ինչպես ներգծել, այնպես էլ արտագծել շրջանագիծ: Այս փաստը որոշ ընդհանրություն է հաղորդում այդ երկու գաղափարներին: Իսկ կա՞ արդյոք նման ընդհանրությունը շրջանագծի և քառանկյան միջև: Դիտարկենք, օրինակ, հետևյալ երեք գծագրերը:



ա բ գ

Ի՞նչ ընդհանրություն և ի՞նչ տարբերություն ունեն դրանք, ո՞րն է գեղագիտորեն ավելի գրավիչ: Երեքում էլ պատկերված են քառանկյան և շրջանագծի փոխդասավորությունները, դրանց կապը, ինչն արտահայտվում է այն բանում, որ շրջանագիծը անցնում է քառանկյան գագաթներով: Բայց եթե առաջին երկուսում շրջանագիծն անցնում է քառանկյան երեք գագաթներով, ապա երրորդում այն անցնում է քառանկյան բոլոր չորս գագաթներով՝ շրջանագիծը արտագծված է քառանկյանը: Բնականաբար, վերջին դեպքում դիտարկվող կապը, ներդաշնակությունը ավելի կատարյալ է և ավելի մեծ գեղագիտական գրավչություն է պարունակում: Այսպիսով, մենք պարզեցինք քառանկյան և շրջանագծի ներդաշնակ փոխդասավորության պատճառը. շրջանագիծը արտագծված է քառանկյանը [8]:

Այժմ աշխատենք պարզել, թե ի՞նչն է պատճառը, որ առաջին երկու գծագրերում շրջանագծերը արտագծված չեն՝ չեն անցնում քառանկյան բոլոր չորս գագաթներով: Դրա համար նկատենք գծագրերի ևս մեկ ընդհանրություն. դրանցում քառանկյան երկու հանդիպակաց անկյունների հենման աղեղները լրացնում են իրար և կազմում են լրիվ շրջանագիծ: Այդ դեպքում հարց է առաջանում, թե ինչի՞ են հավասար հանդիպակած այդ անկյունների գումարները: Երրորդ գծագրում արդյունքը նկատվում է անմիջապես. այն 180 աստիճան է: Մնացած երկու դեպքերում այդ գումարներից մեկը փոքր է 180 աստիճանից, իսկ մյուսը մեծ է 180 աստիճանից:

Ահա և մենք պարզեցինք քառանկյան և շրջանագծի փոխդասավորության կատարյալ լինելու կամ քառանկյունը արտագծելի լինելու ներքին պատճառը. այն կապված է քառանկյան երկու հանդիպակած անկյունների գումարի 180 աստիճան լինելու հետ: Էվրիստիկական այս դիտարկումները թույլ են տալիս ձևակերպել նաև քառանկյան արտագծելիության մասին թեորեմը, որի ընկալումը արդեն շատ մատչելի կլինի, քանի որ մենք ունենք նաև նրա գեղագիտական գրավչության ար-տաքին և ներքին դրսևորումները [8]:

1.4. «ՊՅՈՒԹԱԳՈՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ» ԿԱՄ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԱՍՆՉՈՐՍ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐԺԵՔՈՒԹՅԱՆ ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱՎՉՈՒԹՅԱՆ ՆԵՐՔԻՆ ԴՐՍևՈՐՈՒՄՆԵՐԸ

Մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացում աշակերտներին պետք է ուսուցանիլ ոչ միայն հայտնի փաստեր, այլ նաև նրանց պետք է մղել թեորեմների ապացուցման և խնդիրների լուծման նոր եղանակներ գտնելու որոնողական աշխատանքի: կարծում եմ, որ այն կնպաստի սովորողների գիտական երևակայության զարգացմանը, ինչպես նաև թեորեմների գեղագիտական գրավչության ներքին դրսևորումների առաջացմանը:

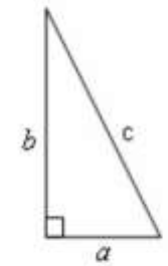
Թեորեմները իրենց գեղագիտական գրավչությամբ աչքի են ընկնում ոչ միայն առանձին վերցրած, այլ նաև միմյանց հետ ունեցած առնչությունների առումով, եթե այդպիսիք կան: Աշխատանքում ընտրվել են տասնչորս մետրիկական թեորեմ, այդ թվում նաև Պյութագորսի թեորեմը, և ապացուցվել, որ դրանք համարժեք են: Պարզվել է, որ դիտարկված տասներեք թեորեմները Պյութագորասի թեորեմի հարմարեցված տարբերակներն են, այսինքն՝ դրանք «Պյութագորասի թեորեմներ» են: Հետևաբար, եթե որևէ մետրիկական խնդիր հնարավոր է լուծել ստորև բերված տասնչորս թեորեմներից մեկի միջոցով, ապա այն հնարավոր է լուծել նաև աշխատանքում դիտարկված տասներեք թեորեմներից յուրաքանչյուրի միջոցով:

Ակնհայտ է, որ բազմազանությունների միասնության, ընդհանրականության, բարդը պարզին հանգեցնելու, կայունության, կիրառելիության, օգտակարության, օպտիմալության օբյեկտիվ հատկանիշները արտահայտում են ինչպես Պյութագորասի թեորեմի, այնպես էլ մյուս տասներեք թեորեմների գեղագիտության ներքին ներուժը:

Այսպիսով, հետևյալ թեորեմները համարժեք են նաև իրենց գեղագիտական գրավչությամբ.

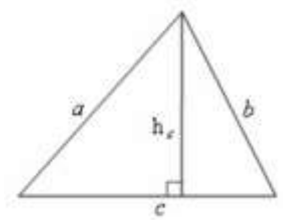
Թեորեմ 1. «Պյութագորասի թեորեմը». Ուղղանկյուն եռանկյան ներձնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին (նկ.1).

նկ.1



$$c^2 = a^2 + b^2$$

նկ.2



Թեորեմ 2. ա) Եռանկյան բարձրությունը կողմերի միջոցով արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով (նկ.2).

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}\,:$$

Բ) Եռանկյան մակերեսը կողմերի միջոցով արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} = \frac{ch_c}{2} = S\,:$$

գ) (Հերոնի բանաձևը) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{ch_c}{2} = S$, որտեղ $p = \frac{a+b+c}{2}$:

Թեորեմ 3. Ա) Եռանկյան կողմը բարձրությունների միջոցով արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$C = \frac{2}{h_c \cdot \sqrt{\frac{4}{h_a^2 h_b^2} - \left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} - \frac{1}{h_c^2}\right)^2}}\,:$$

Բ) Եռանկյան մակերեսը բարձրությունների միջոցով արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

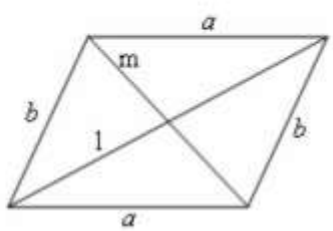
$$C = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{h_a^2 h_b^2} - \left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} - \frac{1}{h_c^2}\right)^2}} = \frac{ch_c}{2} = S :$$

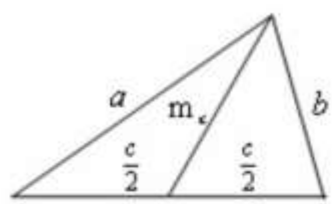
Թեորեմ 4. (Ապոլոնի թեորեմը). Զուգահեռագծի անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է կողմերի քառակուսիների գումարին (նկ.3)

$$l^2 + m^2 = 2\,(a^2 + b^2)\ ;$$

Թեորեմ 5. Եռանկյան միջնագիծը կողմերի միջոցով արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով (նկ.4) $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$:նկ.4

Նկ. 3





Թեորեմ 6. Եռանկյան կողմը միջնագծի միջոցով արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով.

$$C = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2}\ ;$$

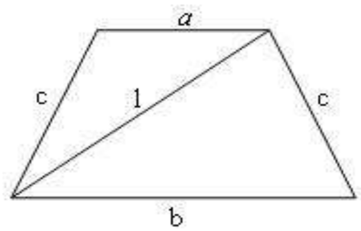
Թեորեմ 7. (Ստյուարտի թեորեմը). Դիցուկ D-ն ABC եռանկյան AB կողմին պատկանող որևէ կետ է: Նշանակենք AC = b, AB = c, BC = a, CD = p, AD = n, DB = m: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը. (նկ.5)

$$C(p^2 + mn) = a^2 n + b^2 m\ ;$$

Թեորեմ 8. (Պտղոմեոսի թեորեմը հավասարասրուն սեղանի համար). Հավասարասրուն սեղանի անկյունագծի քառակուսին հավասար է սրունքի քառակուսու և հիմքերի արտադրյալի գումարին

Նկ.5

նկ.6



Թեորեմ 9. ê»Õ³ÝÇ ³ÝÏÛáõÝ³·Í»ñÇ ù³é³ÏáõëÇÝ»ñÇ ·áõÙ³ñÁ Ñ³í³ë³ñ ¿ Ýñ³ ëñáõÝù»ñÇ ù³é³ÏáõëÇÝ»ñÇ ·áõÙ³ñÇÝ` ³í»É³óñ³Í ÑÇÙù»ñÇ ÏñÏÝ³å³ïÇÏ ³ñï³¹ñÛ³ÉÁ (ÝÏ. 7).

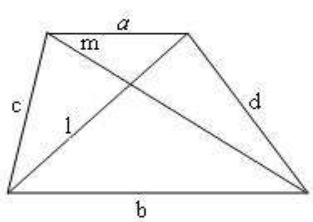
Â»áñ»Ù 10 (¾ÛÉ»ñÇ Ã»áñ»ÙÁ). ¸Çóáõù ABCD -Ý áñ¨¿ ù³é³ÝÏÛáõÝ ¿ (ÝÏ. 8) E -Ý AC -Ç, ÇëÏ F -Á` BD -Ç ÙÇçÝ³Ï»ïÝ ¿: Üß³Ý³Ï»Ýù

AB = *c*, BC = *a*, CD = *d*, AD = *b*, BD = m, AC = l ¨ EF = t :

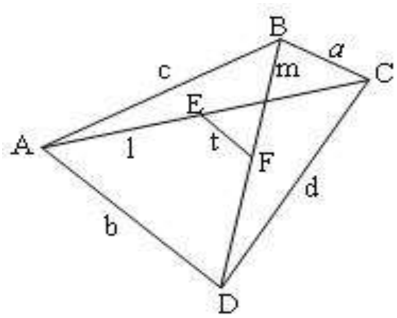
²Û¹ ¹»åùáõÙ ï»ÕÇ áõÝÇ Ñ»ï¨Û³É Ñ³í³ë³ñáõÃÛáõÝÁ.

$l^2 + m^2 + 4t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$:

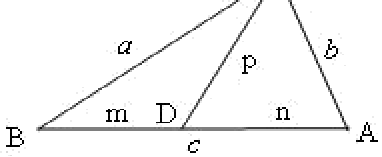
նկ.7



նկ.8



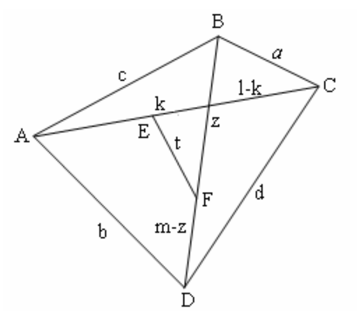
Թեորեմ 11. Դիցուկ *ABCD* –Ý որևէ քառանկյուն է; E-ն AC-ի, իսկ F-ը BD-ի վրա վերցված կետեր են: Նշանակենք AB = c, BC = a, CD = d, AD = b, BD = m, AE = k, Ac = I, BF = z և EF = t: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը. (Նկ.9)



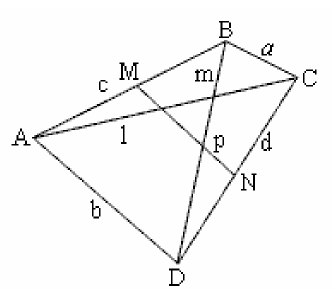
$$\mathrm{lm}\,(t^2 + z(m-z) + k(l-k)) = a^2k\,(m-z) + d^2kz + b^2(l-k)z :$$

Թեորեմ 12. Դիցուկ *ABCD* –Ý որևէ քառանկյուն է: M-ը AB-ի, իսկ N-ը՝ CD-ի միջնակետն է: Նշանակենք AB = c, BC= a, CD = d, AD = b, BD = m, AC = l և MN = p: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը. (Նկ.10)

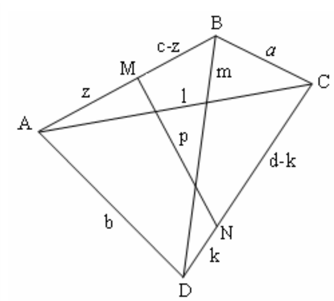
$$4p^2 = l^2 + m^2 + a^2 + b^2 - c^2 - d^2 :$$



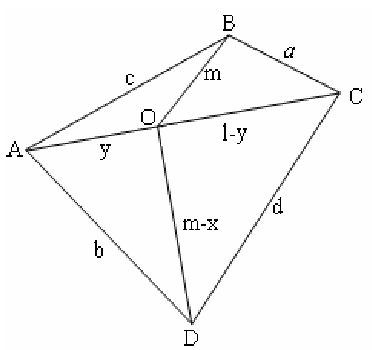
Նկ.9



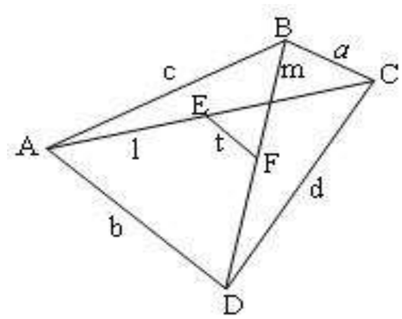
Նկ.10



Նկ. 11



Նկ.12



Թեորեմ 13. Դիցուկ *ABCD* –Ý որևէ քառանկյուն է: M-ը AB-ի, իսկ N-ը՝ CD-ի վրա վերցրած կետեր են: Նշանակենք AB = c, BC= a, CD = d, AD = b, BD = m, AC = l և MN = p: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը. (Նկ.11)

$$\mathrm{Cd}\,(p^2 + z(c-z) + k(d-k)) = a^2kz + b^2(d-k)(c-z) + m^2(d-k)z :$$

Դիցուկ *ABCD* –Ý որևէ քառանկյուն է, իսկ O-ն AC անկյունագծի վրա վերցրած որևէ կետ է: Նշանակենք AB = c, BC= a, CD = d, AD = b, BO + OD =m, AC = l, BO = x և AO = y:

Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը. (Նկ.12)

$$c^2(l-y)(m-x) + a^2y(m-x) + d^2xy + b^2x(l-y) = lm\big(x(m-x) + y(l-y)\big):$$

Դիտողություն; Չեմ կարծում, որ թեորեմների վերոհիշյալ ցանկը ամբողջական է: Հավանաբար կլինեն այնպիսիները, որոնք իմ տեսադաշտից դուրս են մնացել: 2-ի, ա)-ի, բ)-ի և գ)-ի, ինչպես նաև 3-ի ա)-ի և բ)-ի համարժեքությունը ակնհայտ է, և այդ պատճառով դրանք առանձնացված չեն: Թեորեմ 11-ը, 13-ը և 14-ը մաթեմատիկական գրականության մեջ շատ հազվադեպ ենք հանդիպում:

Քանի որ աշխատանքի շրջանակներում հնարավոր չէ ներկայացնել բոլոր ուղղակի ապացուցումները, դրանց մի մասը թողնում եմ հետաքրքրասերներին: Այստեղ Աշակերտների հետ աշխատանքի հսկայական նյութ կա: Որևէ թեորեմի ապացուցումը, տրված մեկ այլ կոնկրետ թեորեմի միջոցով, կզարգացնի օժանդակ կառուցումներ և հանրահաշվական ձևափոխություններ կատարելու աշակերտների կարողությունները, ինչպես նաև ստեղծագործական երևակայությունը, ձևավորելու գիտական գեղեցիկի ողջ ամբողջությունը, առաջացնելով անսպասելիության ու անկանխատեսելիության, ինչպես նաև հուզական ապրումներ:

1.1 ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱՎՉՈՒԹՅԱՆ ԱՐՏԱՔԻՆ ԴՐՍԵՎՈՐՈՒՄՆԵՐԸ

Մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին և ներքին դրսևորումներն ի հայտ են գալիս մաթեմատիկայի ուսուցման ողջ գործընթացում: Եթե մաթեմատիկայում գերիշխում են գեղեցիկի ներքին դրսևորումները, ապա ուսուցման գործընթացում առաջին պլան է մղվում նաև գեղեցիկի արտաքին կողմը:

Մաթեմատիկայի արտաքին գեղագիտությունը մեշապես ընդլայնվում է, եթե ուսումնական նյութի մեջ ներառվում են համաչափության, համեմատության ու ոսկե հատման, ռիթմի և ներդաշնակության հետ առնչվող հարցեր: Մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին դրսևորման լայն հնարավորություններ կարող են ընձեռել նաև գիտական գեղեցիկի հստակության, պարզության, կիրառելիության և գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառման օբյեկտիվ հատկանիշները [8]:

Մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին գեղագիտությանը հանգամանորեն անդրադարձել է Ն. Վ. Գուսյեվան: Նա մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին գեղագիտությունը հանգեցնում է մաթեմատիկական օբյեկտների երկրաչափական ձևերի և անալիտիկ գրառման: Երկրաչափական ձևերի գեղագիտության մեջ առանձնացնում է երկրաչափական գծերը, բազմանկյունները և բազմանիստերը, իսկ անալիտիկ գրառումների գեղագիտության մեջ՝ մաթեմատիկական օբյեկտների գրառման, մաթեմատիկական խնդիրների լուծման գրառման և մաթեմատիկական նյութի առանձին հատվածների ձևակերպման կամ ձևավորման գեղագիտությունը [8]:

Նշենք, որ առաջին հերթին երկրաչափական ձևերի գեղագիտությունը և դրա ներգործությունը սովորողների վրա պայմանավորված է դրանց գեղագիտական կամ ճշգրիտ պատկերումով: Դասավանդվող նյութի մեջ շրջանագիծը հիշեցնում է մի անհրապույր կորի պատկերում գրատախտակին, որ չի կարող գրավիչ լինել և հետաքրքրել աշակերտին: Ինչպե նշում է Հ. Ս. Միքայելյանը, թե ինչպես հեռավոր այն ժամանականերում երկրաչափության գործնական պարապմունքները վարող իր դասախոսը հենց առաջին պարապմունքի ընթացքում կարողացավ նվաճել իր ուսանողների միտքը և սիրտը՝ գրատախտակին վարպետորեն գծելով մի փառավոր շրջանագիծ [8]:

Նույն խնդրի լուծման շրջանակներում է նաև գրաֆիկների պատկերման մշակույթը: Ուսուցիչների մեծամասնությունն անհրաժեշտ պատասխանատվությամբ չի մոտենում դրանց պատկերման խնդրին: Գրաֆիկները կառուցվում են անփույթ, հաշվի չեն առնվում այն, որ կոորդինատական առանցքներն ունեն չափման միևնույն միավորը, ուշադրություն չի դարձվում դրանց հետ ֆունկցիայի գրաֆիկի հատման կետերի համեմատաբար ճիշտ պատկերման և այլ խնդիրների վրա: Արդյունքում, մի կողմից ստացվում են գեղագիտական պահանջներից հեռու պատկերներ, իսկ մյուս կողմից, ստացված պատկերները հնարավորություն չեն տալիս պատասխանել այն հարցերին, որոնց պատասխանները գտնելու համար դրանք կառուցվում են [8]:

Գլուխ 2. Թեորեմների գեղագիտական գրավչության ուսուցման մոտիվացիան,արտահայտումը դրանց կիրառության միջոցով:

2.1 Թեորեմների գեղագիտական գրավչության ուսուցման մոտիվացիան

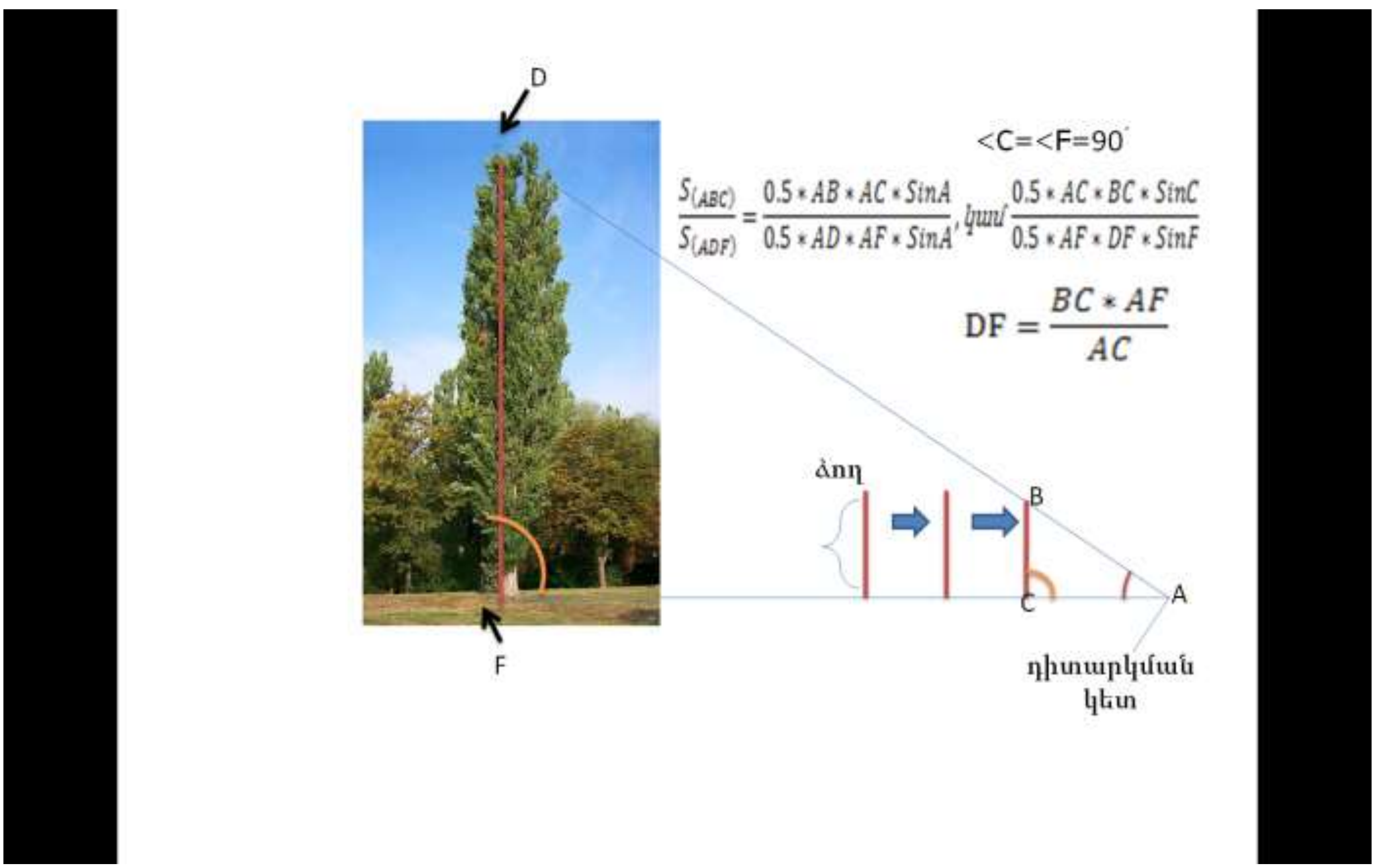
Թեև թեորեմների ուսուցման ընթաքում դրսևորվում են մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների մեծ մասը, ներքին և արտաքին գեղագիտական ձևն ու բովանդակությունը, այնուամենայնիվ դրանք բավարար չեն ընկալման դժվարությունները լիովին հաղթահարելու համար, և թեորեմների ուսուցումը պահանջում է համապատասխան մոտիվացիա. ինչու՞ է անհրաժեշտ կոնկրետ այս կամ այն թեորեմի իմացությունը: Եվ մոտիվացիայի արդյունավետությունը ավելի մեծ է լինում, եթե այն իր մեջ ներառում է գեղագիտական գրավչություն [3]:

Թեորեմների ուսուցման գործընթացը միշտ կարելի է տանել համապատասխան մոտիվացիայի դիտարկումից հետո: Հանրահաշվի դասագրքերում որպես նման մոտիվացիաներ հանդես են գալիս թեորեմների այն կիրառությունները, որոնց միջոցով լուծվում են կոնկրետ հետաքրքրություն ներկայացնող կիրառական խնդիրներ: Ասվածը ցուցադրենք երկրաչափության այնպիսի հիմնարար և գեղեցիկ թեորեմի ուսուցման օրինակի վրա, ինչպիսին 9-րդ դասարանում ուսումնասիրվող եռանկյունների նմանության հայտանիշներ:

9-րդ դասարանում եռանկյունների նմանության հայտանիշները անցնելիս բավականին նպատակահարմար է աշակերտներին հրավիրել դպրոցի բակ, որտեղ միշտ կարելի է տեսնել բարձր ծառ կամ աշտարակ: Եվ աշակերտներին առաջադրել խնդիր, առանց ծառը, ձողը կամ աշտարակը բարձրանալու ի՞նչպես չափել տվյալ բարձրությունը:

Չափազանց մեծ է լինում աշակերտների զարմանքն ու ոգևորությունը և անհամբերությամբ փորձում են գտնել խորհրդավոր խնդրի լուծումը, իրենց երևակայության սահմաններում առաջարկելով տարաբնույթ տարբերակներ, առաջարկություններ,: Ուսուցչի կողմից ձեռնարկվող քայլերի հաջորդականությունը էլ ավելի է ոգեվորում աշակերտներին; կատարվում են հետևյալ գործողությունները՝

1. Սյան հիմքից որոշակի հեռավորության վրա ընտրվում է դիտարկման կետ, որը պետք է լինի սյան հիմքի հետ միևնույն հարթությունում, և առանց դժվարությունների կարելի է չափել դիտարկման կետից մինչև հիմքը եղած հեռավորությունը:
2. Ընտրվում է փայտյա կամ մետաղյա ձող, որի երկարությունը կարելի է չափել հեշտությամբ:
3. Ձողը տեղաշարժում ենք այնպես, որ ձողի ծայրը գտնվի դիտարկման կետից սյան գագաթը անցնող ուղղու վրա:
4. Այնուհետև չափվում է դիտարկման կետից ձողի հիմքը եղած հեռավորությունը:



Կատարված չափումների տվյալները աշակերտները անցկացնում են թղթի վրա , կառուցում համապատասխան գծագիր, որից հետո կատարում են հաշվարկ:

Աշակերտներին նախապես հայտնի է եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին թեորեմը և ուսուցիչը ուղղորդում է աշակերտների, որից հետո աշակերտները հեշտությամբ գտնում են որոնելի սյան բարձրությունը:

Առաջադրանքն ավարտելուց հետո նոր կարելի է ձևակերպել եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը՝

Թեորեմ: Եթե մի եռանկյան երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան երկու անկյուններին, ապա այդպիսի եռանկյունները նման են:

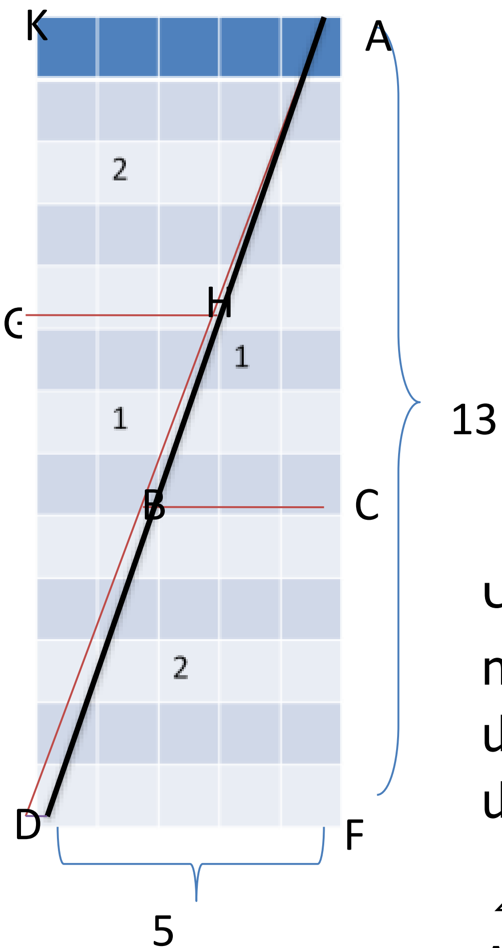
Նման եռանկյունների նմանակ կողմերը համեմատական են:

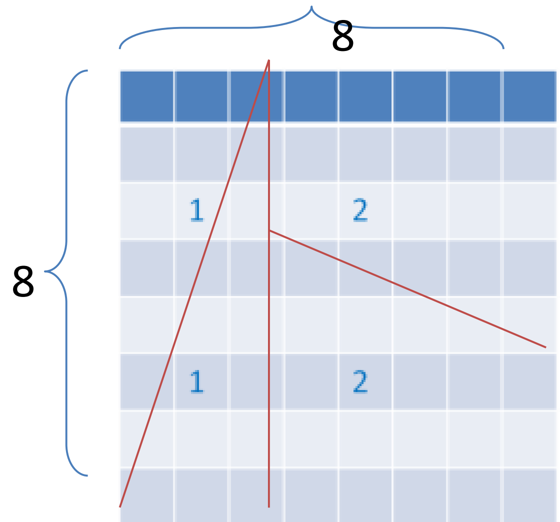
Համոզված եմ, որ առաջադրանքին մասնակցող աշակերտներից յուրաքանչյուրը չափազանց կարևոր է համարելու իր մասնակցությունը թեորեմի ստացման և ձևակերպման գործընթացում:

Տպավորությունը այնքան մեծ է լինում, որ աշակերտները շտապում են ինքնուրույն նմանատիպ փորձեր կատարել:

Նման ձևով դասի կազմակերպումը իր մեջ պարունակում է ինչպես մոտիվացիայի գրավչության, այնպես էլ հետաքրքրության, զարմանքի, անկանխատեսելիության, անսպասելիության, պարզության գեղագիտական տարրեր, առաջացնում համապատասխան հուզական վիճակներ: Ավելորդ չենք համարում նշել, որ դասի նյութը բավականին ծավալուն է, և սովորողից պահանջվող տոկունության կամային որակը դրսևորվում է գեղագիտական տարրի առկայության շնորհիվ [3]:

Օրինակ 2:





Կրկին ըստ հավասար անկյուն ունեցող եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին թեորեմի

$\angle C=\angle F=90^\circ$, $\Delta ABC \sim \Delta ADF$,
AC/AF=BC/DF,

DF=BC*AF/AC,
$3*13/8=4,875 \neq 5$

Կրկին ըստ հավասար անկյուն ունեցող եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին թեորեմի

$$\frac{S_{(ABC)}}{S_{(ADF)}} = \frac{0.5 \cdot AB \cdot AC \cdot SinA}{0.5 \cdot AD \cdot AF \cdot SinA}, \text{ կամ } AC\,/\,AF = AB\,/AD = BC\,/DF$$

II-րդ առաջադրանքը, որը ավելի արդյունավետ է հանձնարարել դասարանում, ավարտելուց հետո նորից կարելի է ձևակերպել եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը:

Աշակերտների տպավորություններն ու զարմանքը էլ ավելի է խորանում մինչև այդ իրենց համար առեղծվածային թվացող խնդիրը հաջողությամբ լուծելուց և թեորեմի ձևակերպումը ստանալուց հետո, երբ ուսուցիչը մի փոքր պատմական ակնարկ է կատարում, ներկայացնելով, որ նույն մեորեմի միջոցով է հույն իմաստուն Թալեսը մեր թվարկությունից վեց դար առաջ Եգիպտոսում որոշել բուրգի բարձրությունը, որ նույն եղանակը պատկերավոր կերպով նկարագրված է Ժյուլ Վեռնի «Խորհրդավոր կղզի» հայտնի վեպում, թե ինչպես են Սայրուս Սմիտը և Հերբերտը մի փոքրիկ ձողի օգնությամբ չափում գրանիտե պալատի բարձրությունը:

Հաջորդ օրինակը, որը նույնպես ոչինչով չի զիջում նախորդներին, ևս իր մեջ պարունակում է այնպիսի գեղագիտական տարրեր, ինչպիսիք են՝ զանրմանքը, անսպասելիությունը, անկանխատեսելիությունը և այլն:

Դիտարկենք 7-րդ դասարանում ուսուցանվող **ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշներ** թեմայում ընդգրկված թեորեմի ուսուցման մոտիվացիան: Դիտարկելով ուղղանկյուն եռանկյունների համապատասխան էջերի և առընթեր անկյունների հավասարությունից բխող ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարությունը աշակերտներին նախապատրաստում ենք թեորեմի ձևակերպումը իրենց ուժերով կատարելուն:

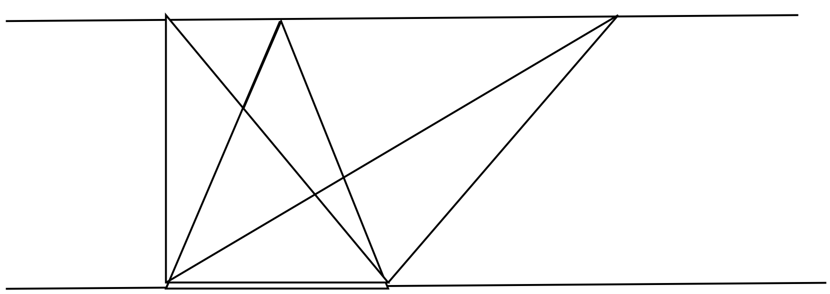
Կառուցենք երկու ուղղանկյուն եռանկյուններ, ցույց տանք, որ տրված եռանկյունների սուր անկյունների գումարները հավասար են 90˚, իսկ եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան հիմքին առընթեր սուր անկյուններից մեկը հավասար է մյուս ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյանը, ապա ըստ եռանկյան սուր անկյունների գումարի համապատասխան երրորդ անկյուններն նույնպես հավասար են: Կստացվի, որ մի ուղղանկյուն եռանկյան երեք անկյունները համապատասխանաբար համնկնելի են մյուս ուղղանկյուն եռանկյան երեք անկյուններին: Ուստի, ըստ եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշի այն է՝ ըստ կողմի (ներքնաձիգի) և նրան առընթեր երկու անկյան հայտանիշի այդ եռանկյունները հավասար են: Որից հետո աշակերտները արդեն կարող են ինքնուրույն ձևակերպել հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ: Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգն ու սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի ներքնաձիգին և սուր անկյանը, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:

Հաջորդ օրինակը որը իր մեջ պարունակում է ինչպես գեղեցիկի գեղագիտական գրավչության տարրեր, այնպես էլ թեորեմների ուսուցման մոտիվացիա, երկրաչափության , մասնավորոպես թեորեմների ուսուցմանն նպաստող հատկանիշներ:

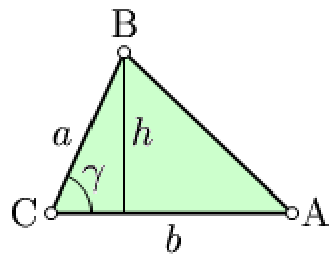
Խնդիրը, որը ուղված է եռանկյան մակերես թեմյին նպատակահարմար է առաջարկել աշակերտներին, որպես եռանկյան մակերես թեմաի մուտք:

Խնդիր՝ հարթության վրա տարված են a||b ուղիղները, a ուղղի վրա վերցնել A և B կետերը, b ուղղի վրա վերցնել C,D,E կետերը այնպես , որ ΔACB –ն լինի հավասարասրուն եռանկյուն, ΔADB –ն լինի ուղղանկյուն եռանկյուն, իսկ ΔAEB –ն լինի բութանկյուն եռանկյուն : Որ եռանկյան մակերեսն է ամենամեծը:



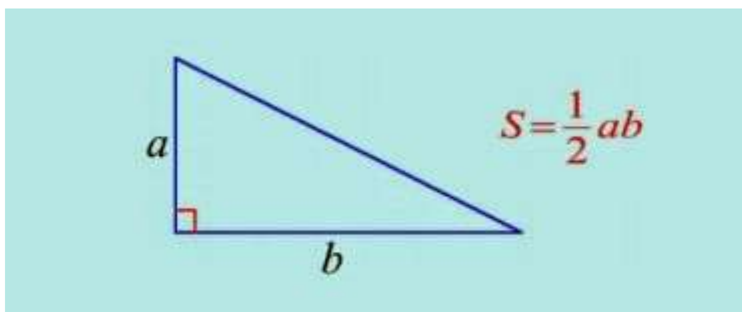
Աշակերտների մոտ առաջանում է մեծ ոգևորություն և հնչում են տարբեր կարծիքներ, աշակերտները պատկերված եռանկյունները համեմատելիս առաջին հայացքից կտան իրարից շատ տարբերվող պատասխաններ: Կարևոր է ուսուցչի միջամտությունը և աշակերտների ուշադրությունը պետք է հրավիրել ուղղանկյուն եռանկյանը՝ ΔADB –ին, հիշեցնել որ ուղղանկյուն եռանկյունը այդ զուգահեռ ուղիղներով սահմանափակված ուղղանկյան կեսն է, և նրա մակերեսն էլ հավասար կլինի կողմերի կիսաարտադրյալին, կամ հիմքի և բարձրության արտադրյալի կեսին: Հետագա քայլը շատ ակներև է և աշակերտները կբացահայտեն, որ բոլոր երեք եռանկյուններն էլ ունեն միևնույն հիմքն ու բարձրությունը: Այսպիսով ստեղծելով համապատասխան մոտիվացիա, աշակերտների օօգնությամբ և մասնակցությամբ կձակերպենք եռանկյան մակերեսի մասին թեորեմը:

<u>Թեորեմ:</u> **Եռանկյան մակերեսը հավասար է հիմքի և բարձրության արտադրյալի կեսին:**



Որից հետո կարելի է գիտելիքների ամրապնդման նպատակով ներկայացնել թեորեմից բխող հետևանքները՝

Հետևանք 1. Ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը հավասար է նրա էջերի արտադրյալի կեսին:



որտեղ a -ն և b -ն էջերն են:

Հետևանք 2. Եթե երկու եռանկյան բարձրությունները հավասար են, ապա նրանց մակերեսները հարաբերում են ինչպես հիմքերը:

Թեորեմների ուսուցման նմանատիպ եղանակները իրենց մեջ պարունակում են գիտական գեղեցիկի ողջ ամբողջությունը, ստեղծելով միջառարկայական կապեր, պատմության, գրականության և այլ առարկաների հետ:

2.2. Թեորեմների գեղագիտական գրավչության արտահայտումը դրանց կիրառության միջոցով

Վերևում մենք դիտարկեցինք մաթեմատիկական կիրառական ոլորտում թեորեմի օգտագործման օրինակ, ինչը ծառայում էր որպես ուսուցման մոտիցավիայի միջոց և մեծացնում թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը: Սակայն թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը արտահայտվում է նաև բուն մաթեմատիկայում դրա կիրառության միջոցով:

Իսկապես, նախորդ կետում քառանկյան՝ շրջանագծին ներգծելի լինելու հարցը պարզաբանելիս, մենք կիրառեցինք գագաթը շրջանագծից դուրս, շրջանագծի ներսում և շրջանագծի վրա գտնվող անկյունների չափման վերաբերյալ թեորեմները: Նման ձևով շրջանագծին արտագծելի լինելու քառանկյան հատկությունը քննարկելիս անսպասելիորեն այդ թեորեմների փոխարեն օգտագործվում է տրված կետից շրջանագծին տարված շոշափող հատվածների հավասարության մասին թեորեմը [3]:

Երկու դեպքում էլ թեորեմի հիմնական գեղագիտական տարրը նրա կիրառելիությունն է, իսկ անսպասելիությունը ավելացնում է այդ տարրը:

Ավելի մեծ է թեորեմների կիրառությունը ապացուցումների կառուցման մեջ: Եթե հիշենք ապացուցման հիլբերդյան սահմանումը, ապա պարզ կդառնա, որ առանց թեորեմների կիրառության դրանք կարող են շատ ծավալուն տեսք ընդունել և կորցնել իրենց գրավչությունը: Ահա թեորեմները փոխարինում են ապացուցման առանձին հատվածների, հեշտացնում ապացուցման ընկալումը և, դրանով, այն դարձնում գրավիչ:

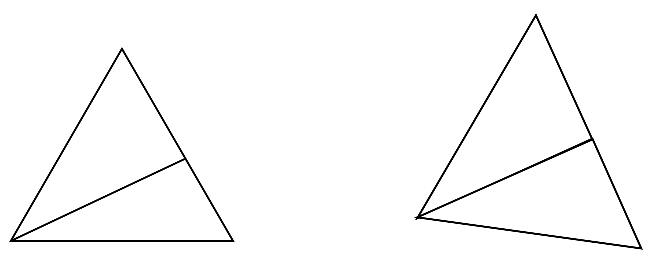
Օրինակ: Ապցուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքի միջնակետը հավասարահեռ է սրունքներից:

Ապացուցման համար հիմք է հանդիսանում ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշների հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ: Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը և սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասր են մյուսի ներքնաձիգին և սուր անկյանը, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասր են:

Թեորեմները կիրառվում են նաև խնդիրների լուծման մեջ. առանց թեորեմների կիրառության դժվար է լուծել շատ թե քիչ դժվար որևէ խնդիր: Դիտարկենք նման օրինակներ:

Խնդիր: Ապացուցեք, որ եթե մի սուրանկյյուն եռանկյան կողմը և նրա ծայրակետերից տարված բարձրությունները համապատասխանաբար հավասար են մյուս սուրանկյուն եռանկյան կողմին ու նրա ծայրակետերից տարված բարձրություններին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:



Խնդրի լուծման համար հիմք է հանդիսանում ուղղանկյուն եռանկյան հավասարության հայտանիշները և մասնավորապես հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ: Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջն ու ներքնաձիգը համապատասխանաբար հավասար են մյուցի էջին ու ներքնաձիգին, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:

Այստեղ գեղագիտական տարրը արտահայտվում է ուղղնկյուն եռանկյան ներքնաձիգի և էջի մասին թեորեմների կիրառության անսպասելիության և, հավանաբար, նաև անկանխատեսելիության՝ գիտական գեղեցիկի հատկանիշներով:

Եզրակացություն

Այս ամենից կարելի է եզրակացնել, որ թեորեմները, որպես մաթեմատիկայի կառույցի անկյունաքար կամ հենասյուն, որի վրա կառուցվում է երկրաչափության նյութը, իրենց մեջ կրում են գիտական գեղեցիկի ողջ հմայքը: Թեորեմների գեղագիտական գրավչությունը,որը պայմանավորված է օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշներով, ներքին և արտաքին դրսևորումներով արտահայտում են մաթեմատիկայի հասկացությունների հիմնական հատկությունները, դրանց միջև առկա կապերն ու օրինաչափությունները և բնականաբար, մաթեմատիկական գեղեցիկի որակավորումը, առաջին հերթին, հասցեգրվում է նրանց:

Թեև թեորեմների ուսուցման ընթացքում դրսևորվում են մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների մեծ մասը, ներքին և արտաքին գեղագիտական ձևն ու բովանդակությունը, այնուամենայնիվ, ընկալման դժվարությունները լիովին հաղթահարելու համար չափազանց կարևոր է թեորեմների ուսուցման մոտիվացիան, որի վերաբերյալ աշխատանքում ներկայացված են որոշ օրինակներ:

Թեորեմի ընկալման խոչընդոտը հաղթահարելու համար հաջորդ կարևոր նախապայմանն նա է, որ թեորեմի ձևակերպումը հնարավորինս պետք է լինի պարզ, հստակ, զերծ մաթեմատիկական սիմվոլների առկայությունից, որոնք լրացուցիչ դժվարություններ են հաղորդում թեորեմի ուսուցմանը:

Թեորեմների ուսուցման գործընթացում գեղեցիկի ձևավորման հիմք է հանդիսանում աշակերտների մասնակցությունը թեորեմի ձևակերպմանը, որը աշակերտի համար դառնում է նշանակալից իր ողջ կյանքի ընթացքում, գնահատելով թեորեմի հայտնագործման իր մասնակցության կարևորությունը:

Նման ձևով թեորեմների մուտքը իր մեջ պարունակում է ինչպես հետաքրքրության, այնպես էլ զարմանքի, անկանխատեսելիության, անսպասելիության, պարզության գեղագիտական տարրեր, առաջացնում համապատասխան հուզական վիճակներ:

Գրականություն

1. Հ. Ս. Միքայելյան, Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը, Էդիթ պրինտ, 2011:
2. Հ. Ս. Միքայելյան, ,Գեղեցիկը, մաթեմատիկան և կրթությունը,մաս 1, Գեղեցիկը և մաթեմատիկան Էդիթ պրինտ, Երևան, 2014:
3. Հ. Ս. Միքայելյան, ,Գեղեցիկը, մաթեմատիկան և կրթությունը, մաս 2, Գեղեցիկը և մաթեմատիկայի կրթության ներուժը,Էդիթ պրինտ, Երևան, 2015:

4. Հ. Ս. Միքայելյան, Մաթեմատիկական կրթության գեղագիտական հիմունքներ, ուսումնական ձեռնարկ, Ճարտարագետ 2016:

5. Հ. Ս. Միքայելյան,Գեղեցիկի ձևավորումը թեորեմների ուսուցման գործընթացում, <<Մաթեմատիկան դպրոցում>>, 2014, N1:
6. Հ. Ս. Միքայելյան,Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշները, <<Մաթեմատիկան դպրոցում>>, N1, 2014:
7. Հ. Ս. Միքայելյան,Մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները, <<Մաթեմատիկան դպրոցում>>, N2, 2014:
8. Հ. Ս. Միքայելյան,Մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությունը, <<Մաթեմատիկան դպրոցում>>, N3, 2014:
9. Հ. Ս. Միքայելյան, Գեղեցիկի գիտական բաղադրիչները, <<Մաթեմատիկան դպրոցում>>, 2012, 5:
10. Հ. Ս. Միքայելյան, Կամային որակների ձևավորումը և մաթեմատիկական կրթությունը, <<Մարդ և հասարակություն>>, 2013, N2:
11. Հ. Ս. Միքայելյան, Գեղեցիկը և մաթեմատիկան, <<Մաթեմատիկան դպրոցում>>, 2013, N3:
12. Հ. Ս. Միքայելյան, Մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդների գեղագիտական գրավչությունը, <<Մաթեմատիկան դպրոցում>>, 2013, N4:

13. Հ. Ս. Միքայելյան, Գեղագիտական հույզերը և մաթեմատիկական կրթությունը, <<Մաթեմատիկան դպրոցում>>, 2013, , N5:

14. Լ.Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ. Կադոմյեվ, Է. Հ. Պոզնյակ, Ի. Ի. Յուդինա, Երկրաչափություն 7 դաս: