

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

10-րդ դասարան, օր 1

ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Խնդիր 1. Դիցուք a_1, a_2, a_3, \dots հաջորդականությունը որոշվում է հետևյալ կերպ. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ և ցանկացած $n > 1$ բնական թվի համար

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}(a_n - a_{n-1}) :$$

Ապացուցել, որ $\{a_n\}$ հաջորդականության ցանկացած երկու անդամ փոխադարձաբար պարզ են:

Լուծում 1. Նշանակենք $b_n = a_{n+1} - a_n \Rightarrow b_n = a_{n-1}b_{n-1}$:

$$b_{n+1} : a_n, b_{n+2} : b_{n+1}, b_{n+3} : b_{n+2} \Rightarrow a_{n+1} \equiv a_{n+2} \equiv a_{n+3} \equiv \dots \pmod{a_n}$$

Ինդուկցիայով ապացուցենք, որ $\gcd(a_n; a_{n+1}) = 1$: Նիմքն ակնհայտ է:

$$\gcd(a_{n+2}; a_{n+1}) = \gcd(a_{n+1} + a_n(a_{n+1} - a_n); a_{n+1}) = \gcd(-a_n^2; a_{n+1}) = 1$$

Այսպիսով՝ ցանկացած a_n փոխ. պարզ է իրենից հետո եկող բոլոր անդամների հետ:

Խնդիր 2. Ննարավոր է արդյոք բնական թվերի բազմությունը փրոհել երկու էլեմենտարանոց A_1, A_2, \dots անվերջ բազմությունների այնպես, որ A_k բազմության էլեմենտների գումարը հավասար լինի $k + 2023$ -ի:

Ծանոթություն: X բազմությունը փրոհել բազմությունների նշանակում է կառուցել իրար հետ զույգ առ զույգ հատում չունեցող բազմություններ, որոնց միավորումը հավասար է X -ի:

Լուծում 2. Դիտարկենք A_1, A_2, \dots, A_n բազմությունները, որտեղ n -ը ցանկացած բնական թիվ է: Այդ բազմությունները միասին պարունակում են $2n$ հար թիվ, հետևաբար իրենց գումարը կլինի առնվազն 1 -ից մինչև $2n$ բնական թվերի գումարի չափ $\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$: Մյուս կողմից այդ գումարը հավասար է $(2024 + 2025 + \dots + 2023 + n) = 2023n + \frac{n(n+1)}{2}$: Ներկայացնենք

$$n(2n+1) \leq 2023n + \frac{n(n+1)}{2}$$

կամ որ նույնն է

$$4n+2 \leq 4046+n+1$$

որտեղից էլ $3n \leq 4045$: Նիշենք, որ n -ը ցանկացած բնական թիվ է, մինչդեռ սրացված անհավասարությունը ճիշտ է միայն 1349 -ից փոքր բնական թվերի համար: Այսպետից եզրակացնում ենք, որ այդպիսի փրոհում հնարավոր չէ:

Խնդիր 3. Դիցուք ABC ոչ հավասարասրուն սուրանկյուն եռանկյան BE և AK բարձրությունները հատվում են H կետում: Դիցուք R -ը AH հատվածի միջնակետն է, իսկ AK ուղիղը ABC եռանկյանն արտագծած O կենտրոնով շրջանագիծը հատում է A -ից փարբեր D կետում: Դիցուք P -ն OH հատվածի միջնակետն է, իսկ T -ն DER եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցել, որ TP ուղիղը ուղղահայաց է RE ուղղին:

Լուծում 3. Քանի, որ $\angle CAD = \angle CBD = \angle CBE$ հետևաբար $\angle AHD = \angle BDH = \angle AHE = \angle REH$: Սրացվեց, որ $\angle REH = \angle HDB$, հետևաբար B, E, R, D կետերով անցնում է ω շրջանագիծ, իսկ R, E, K կետերով անցնող ω_9 շրջանագծի կենտրոնը P -ն է (Էյլերի շրջանագիծ): Քանի, որ RE -ն ω և ω_9 շրջանագծերի համար ընհանուր լար է, հետևաբար $TP \perp BE$: