

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

11-12-րդ դասարաններ

Առաջին օր (18 փետրվարի, 2023թ)

1. Ննարավոր է արդյոք բնական թվերի բազմությունը փրոհել երկու էլեմենտար A_1, A_2, \dots անվերջ բազմությունների այնպես, որ A_k բազմության էլեմենտների գումարը հավասար լինի $k + 2023$ -ի:

Ծանոթություն: X բազմությունը փրոհել բազմությունների նշանակում է կառուցել իրար հետ զույգ առ զույգ հատում չունեցող բազմություններ, որոնց միավորումը հավասար է X -ի:

2. Դիցուք փրված է p պարզ թիվը: Ապացուցել, որ

$$\begin{cases} x^2 - x = p(y^2 - y), \\ (x, y) = 1, \\ x > 1, y > 1, \end{cases}$$

համակարգը բնական թվերով ունի առավելագույնը մեկ լուծում:

Ծանոթություն: (x, y) -ով նշանակած է x և y թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

3. Դիցուք ABC ոչ հավասարասրուն սուրանկյուն եռանկյան BE և CF բարձրությունները հատվում են H կետում: Դիցուք AK բարձրությունը պարունակող ուղիղը ABC եռանկյանն արբազած O կենտրոնով շրջանագիծը հատում է A -ից փարբեր D կետում, իսկ R -ը AH հատվածի միջնակետն է: Դիցուք RE և BD ուղիղները հատվում են T կետում, իսկ RF և CD ուղիղները հատվում են M կետում: Ապացուցել, որ HO ուղիղը ուղղահայաց է TM ուղղին:

Աշխարհամանակը 4 ժամ

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր