

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

9-րդ դասարան, օր 1

ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Խնդիր 1. Գտնել բոլոր (x, y) փոխադարձաբար պարզ թվերի թվագույգերը, որոնք բավարարում են $x^2 - x = 13(y^2 - y)$ հավասարությանը:

Լուծում 1. $x(x - 1) = 13y(y - 1)$: Պարզ է, որ $x = y = 1$ լուծում է: Դիցուք $x > 1$ և $y > 1$: Քանի, որ $(x, y) = 1$ հետևաբար $x - 1$ բաժանվում է $y - 1$ -ի և $13(y - 1)$ բաժանվում է $x - 1$ -ի, ընդ որում քանորդները հավասար են: Այսպիսով $x - 1 = yn$ և $13(y - 1) = xn$, որպեսզի, արտաքսելով խ-ը կստանանք, որ

$$y = \frac{(n + 13)}{13 - n^2}$$

բնական թիվ է: Այսպիսով $n^2 < 13$: Ստուգելով $n = 1, 2, 3$ դեպքերը կստանանք, որ y -ը բնական թիվ է միայն $p = 3$ դեպքում. $y = 4$: Այդ դեպքում $x = yn + 1 = 13$: Ստուգումը ցույց է տալիս, որ բավարարում է:

Պար. $(1, 1)$ և $(13, 4)$:

Խնդիր 2. Դիցուք ABC ոչ հավասարաարուն սուրանկյուն եռանկյան BE և AK բարձրությունները հատվում են H կետում: Դիցուք AK ուղիղը ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատում է $(A$ -ից փարբեր) D կետում, իսկ R -ը AH հատվածի միջնակետն է: Դիցուք RE և BD ուղիղները հատվում են T կետում, իսկ O -ն TRB եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցել, որ TO ուղիղը ուղղահայաց է BR ուղիղին:

Լուծում 2.

Խնդիր 3. Գտնել ամենափոքր n բնական թիվը, որ 1 -ից n բնական թվերը հնարավոր է ներկել սև ու սպիտակ այնպես, որ ցանկացած սև թիվ կարող է գրվել իրարից փարբեր երկու սպիտակ թվերի գումար, իսկ ցանկացած սպիտակ թիվ որևէ երկու սև թվերի փարբերություն է:

Լուծում 3. Ակնհայտորեն 1 և 2 թվերը սպիտակ են, իսկ n -ը սև: Դիտարկենք 2 դեպք:

Դեպք 1: Դիցուք 4 -ը սև է: Այդ դեպքում պետք է 3 -ը պետք է լինի սպիտակ, որպեսզի 4 -ը ներկայացվի իրարից փարբեր երկու սպիտակների գումարի փեսքով: Քանի որ ամենափոքր սևը 4 է, իսկ 3 -ը երկու սևերի փարբերություն է, ուրեմն կա գոնե 7 հար թիվ: Քանի որ n -ը սև է, ուստի պետք է լինի 4 -ից մեծ սպիտակ, որից հետ հետևում է, որ կա այդ սպիտակից առնվազն չորսով մեծ սև: Ներկաբար $n \geq 9$:

Դեպք 2: Դիցուք 4 -ը սպիտակ է: Եթե 3 -ը լինի սպիտակ, ապա 4 -ը պետք է գրվի իրենից մեծ երկու թվերի փարբերության փեսքով, ուրեմն $n \geq 9$: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ 3 -ը սև է: Ունենք, որ ամենամեծ երեք թվերը պետք է լինեն սև, այսպես դրանցից սպիտակ թիվը հնարավոր չի լինի ներկայացնել երկու սևերի փարբերություն: Եթե $n < 9$ ապա 6 -ը և 7 -ը սև են: Որպեսզի 7 -ը ստացվի երկու սպիտակների գումար պետք է 5 -ը լինի սպիտակ: Ներկաբար կա նաև 8 թիվը, որը սև է: Նկատենք, որ ստացված ներկմամբ 8 սև թիվը չի ներկայացվում $1, 2, 4, 5$ թվերից որևէ երկուսի գումարի փեսքով:

Այսպիսով $n \geq 9$: Ահա օրինակ 9 -ի համար. $1, 2, 4, 5, 6$ սպիտակ, $3, 7, 8, 9$ սև: