

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

## 8-րդ դասարան

Առաջին օր (18 փետրվարի, 2023թ)

**Խնդիր 1.** Գտնել բոլոր  $\overline{ab}$  երկնիշ բնական թվերը, որ  $\overline{b0a}$  եռանիշ թիվն առանց մնացորդի բաժանվում է  $\overline{ab}$ -ի:

**Լուծում 1.** Ունենք, որ  $(100b + a):(10a + b)$ : Այսինքն

$$10 \cdot ((100b + a) - (10 + b)) = 999b$$

նույնպես կբաժանվի  $\overline{ab}$  երկնիշ թվին: Սրացվեց, որ  $999b = 3^3 \cdot 37 \cdot b$  թիվն ունի  $b$ -ով ավարտվող երկնիշ բաժանարար: Այդ բաժանարարը կարող է լինել  $3^3 = 27$ -ը,  $37$ -ը,  $74$ -ը եթե  $b:2$ ,  $15$ -ը և  $45$ -ը եթե  $b = 5$ : Ստուգմամբ պարզվում է, որ խնդրի պայմանին բավարարում են  $27$ ,  $37$  թվերը:

**Խնդիր 2.** Դիցուք  $1$ -ից  $n$  բնական թվերը ներկել են սև և ու սպիտակ (յուրաքանչյուր թիվ մեկ գույնով) այնպես, որ ցանկացած սև թիվ հավասար է իրարից փոքրեր որևէ երկու սպիտակ թվերի գումարի, իսկ ցանկացած սպիտակ թիվ՝ երկու սև թվերի փոքրերույթյան: Ապացուցել, որ  $n > 7$ :

**Լուծում 2.** Եթե որևէ սպիտակ ներկած  $x$  թիվ լինի  $3$ -ից մեծ, ապա  $x$ -ից մեծ երկու սև թվեր, որոնց փոքրերույթյունը  $x$  է: Այսպեղից կստացվի, որ կա  $7$ -ից մեծ սև թիվ: Փաստորեն,  $3$ -ից մեծ բոլոր թվերը սև են: Քանի որ ամեն մի սև թիվ երկու փոքրեր սպիտակի գումար է, ուրեմն ամենամեծ հնարավոր թիվը կլինի  $5$ -ը: Քանի որ  $1$  և  $2$ -ը սպիտակ են, ուստի  $3$  և  $5$  սև են: Սրացվեց, որ  $5$ -ը չի կարող լինել երկու սպիտակ թվերի գումար:

**Խնդիր 3.** Դիցուք  $ABC$  ոչ հավասարասրուն սուրանկյուն եռանկյան  $BE$  և  $AK$  բարձրությունները հարվում են  $H$  կետում: Դիցուք  $AK$  ուղիղը  $ABC$  եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատում է ( $A$ -ից փոքրեր)  $D$  կետում,  $R$ -ը  $AH$  հատվածի միջնակետն է, իսկ  $O$ -ն և  $T$ -ն համապատասխանաբար  $ABC$  և  $DRE$  եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի կենտրոններն են: Ապացուցել, որ  $TO$  ուղիղը ուղղահայաց է  $BD$  ուղղին:

**Լուծում 3.** Քանի, որ  $\angle CAD = \angle CBD = \angle CBE$  հետևաբար  $\angle AHD = \angle BDH = \angle AHE = \angle REH$ : Սրացվեց, որ  $\angle REH = \angle HDB$ , հետևաբար  $B, E, R, D$  կետերով անցնում է  $\omega$  շրջանագիծ, իսկ  $BD$ -ն  $\omega$  -ի և  $ABC$  եռանկյան արտագծած շրջանագծի համար ընդհանուր լար է, հետևաբար  $TO \perp BD$ :