ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

11-12-րդ դասարաններ, օր 1

Խնդիր 1. Հնարավո՞ր է արդյոք բնական թվերի բազմությունը տրոհել երկու էլեմենտանոց A_1, A_2, ... անվերջ բազմությունների այնպես, որ A_k բազմության էլեմենտների գումարը հավասար լինի $k + 2023$–ի:

Ծանոթություն: *X բազմությունը տրոհել բազմությունների նշանակում է կառուցել իրար հետ զույգ առ զույգ հատում չունեցող բազմություններ, որոնց միավորումը հավասար է X–ի:*

Լուծում 1. Դիտարկենք A_1, A_2, ..., A_n բազմությունները, որտեղ n-ը ցանկացած բնական թիվ է: Այդ բազմությունները միասին պարունակում են $2n$ հատ թիվ, հետևաբար իրենց գումարը կլինի առնվազն 1–ից մինչև $2n$ բնական թվերի գումարի չափ $\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$: Մյուս կողմից այդ գումարը հավասար է $(2024 + 2025 + \ldots + 2023 + n) = 2023n + \frac{n(n+1)}{2}$: Հետևաբար

$$n(2n+1) \leq 2023n + \frac{n(n+1)}{2}$$

կամ որ նույնն է

$$4n + 2 \leq 4046 + n + 1$$

որտեղից էլ $3n \leq 4045$: Հիշենք, որ n–ը ցանկացած բնական թիվ է, մինչդեռ ստացված անհավասարությունը ճիշտ է միայն 1349-ից փոքր բնական թվերի համար: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ այդպիսի տրոհում հնարավոր չէ:

Խնդիր 2. Դիցուք տրված է p պարզ թիվը: Ապացուցել, որ

$$\begin{cases} x^2 - x = p(y^2 - y), \\ (x, y) = 1, \\ x > 1, y > 1, \end{cases}$$

համակարգը բնական թվերով ունի առավելագույնը մեկ լուծում: **Ծանոթություն:** *(x, y)–ով նշանակած է x և y թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:*

Լուծում 2. Քանի, որ

$$\frac{x-1}{y} = \frac{p(y-1)}{x} = n,$$

հետևաբար $x = ny + 1$ և $nx = p(y-1)$, որտեղից $n(ny+1) = p(y-1)$:

Դեպք 1. Եթե $n = pl$, ապա $l(ply+1) = y-1$, որտեղից $y(pl^2-1) + y + 1 = 0$, բայց ձախ մասը միշտ դրական է: Ստացվեց, որ $(n, p) = 1$:

Դեպք 2. Քանի, որ $nx = p(y-1)$, հետևաբար $n(ny+1) = p(y-1)$, որտեղից ստացվում է, որ

$$y = \frac{n+p}{p-n^2} = 1 + \frac{n(n+1)}{p-n^2}$$

և քանի որ $(n, p-n^2) = (n,p) = 1$, ուստի

$$\frac{n+1}{p-n^2}$$

բնական թիվ է: Այստեղից $\frac{n+1}{p-n^2} \geq 1$, որտեղից $n^2 \leq p \leq n^2+n+1$: Այսպիսով $n \leq \sqrt{p} \leq \sqrt{n^2+n+1}$, որտեղից $n \leq [\sqrt{p}] \leq [\sqrt{n^2+n+1}]$: Այստեղից ստացվում է, որ $n = [\sqrt{p}]$ որոշվում է միակ ձևով: Այսինքն ունի առավելագույնը մեկ լուծում:

Խնդիր 3. Դիցուք ABC ոչ հավասարասրուն սուրանկյուն եռանկյան BE և CF բարձրությունները հատվում են H կետում: Դիցուք AK բարձրությունը պարունակող ուղիղը ABC եռանկյանն արտագծած O կենտրոնով շրջանագիծը հատում է A–ից տարբեր D կետում, իսկ R-ը AH հատվածի միջնակետն է: Դիցուք RE և BD ուղիղները հատվում են T կետում, իսկ RF և CD ուղիղները հատվում են M կետում: Ապացուցել, որ HO ուղիղը ուղղահայաց է TM ուղղին:

Լուծում 3. Քանի, որ $\angle CAD = \angle CBD = \angle CBE$ հետևաբար $\angle AHD = \angle BDH = \angle AHE = \angle REH$: Ստացվեց, որ $\angle REH = \angle HDB$, հետևաբար B, E, R, D կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $TR \cdot TE = TB \cdot TD$, իսկ R, E, K, F կետերով անցնող ω_9 շրջանագծի կենտրոնը HO հատվածի միջնակետն է (Էյլերի շրջանագիծ): Ստացվեց, որ T կետի աստիճանը ω_9 և ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագի նկատմամբ հավասար է: Նմանապես M կետի աստիճանը ω_9 և ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի նկատմամբ հավասար է, հետևաբար TM ուղիղը ω_9 և ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի արմատական առանցքն է, հետևաբար HO ուղիղը ուղղահայաց է TM ուղղին: