Հետազոտական աշխատանք

Թեմա.
Էքստրեմումի խնդիրների լուծման մեթոդների կիրառությունները ավագ դպրոցում

Կատարող՝ Գրիգորյան Մարինե

Դպրոց՝ Վ.Գ. Բելինսկու անվան թիվ 38 հիմնական դպրոց
Կազմակերպություն՝ ≪ Երևանի Լեոյի անվան հ.65 ավագ դպրոց ≫ ՊՈԱԿ
Խմբի ղեկավար՝ Զ. Խաչատրյան

Բովանդակություն

Ներածություն

Հետազոտական աշխատանքը նվիրված է էքստրեմումի խնդիրների լուծման մեթոդներին՝ նրանց նկարագրությանը ավագ դպրոցում և բուհական դասընթացում: Կոնկրետ օրինակների վրա ցույց է տրվում մեթոդի արդյունավետությունը և հզորությունը, որը պայմանավորված է դրա կիրառությունների լայն շրջանակով:

Աշխատանքի նպատակները

1. Ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասավանդման պրոցեսում կարևորել էքստրեմումի խնդիրները և նրանց լուծման մեթոդները:

2. Նպաստել էքստրեմումի խնդիրների մեթոդների կիրառման դերի կարևորության և ուսուցման արդյունավետության հետագա բարձրացմանը:

Աշխատանքի խնդիրները

Ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցման պրոցեսում ներառել այնպիսի խնդիրներ, որոնց լուծումները առավել արդյունավետ են դառնում էքստրեմումի մեթոդների կիրառման հետևանքով, ինչպես նաև զարգացնում սովորողների ինտելեկտուալ կարողությունները և հմտությունները:

Աշխատանքի արդիականությունը

ՀՀ-ում կրթական համակարգի բարեփոխումները միտում ունեն ստեղծելու կայուն զարգացման ռազմավարություն, ձգտելով ապահովել հաստատուն տեղ, միջազգային կրթական համակարգում: Այստեղ Կարևոր և արդիական է սովորողների բարձրակարգ մտածողության զարգացման տեմպերը ապահովող խնդիրների ներդրումը ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի 4 դասավանդման պրոցեսում, և հետագայում նպաստելու նաև սովորողների հմտությունների, մտածողության արդյունավետության բարձրացման և տնտեսության աճի խթանմանը:

Աշխատանքի մեթոդները:

Հետազոտության մեթոդական համակարգը ներառում է՝
ա) տեսական վերլուծություն. /թեմայի վերաբերյալ տեղեկատվության հավաքում, համեմատում և դասակարգում, առկա իրավիճակի բնութագրում և գնահատում/, բ) վերացարկում և ընդհանրացում. /նպատակների, խնդիրների և իրականացման հնարավորությունների հստակեցում, խնդիրների լուծման տարբերակների համադրում/, գ) հակադարձ կապի ապահովում. /մանկավարժական գիտափորձերի և հարցումների անցկացում, արդյունքների գնահատում, որոշումների ճշգրտում և կոնկրետացում/:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը:

Աշխատանքը բաղկացած է բովանդակությունից, ներածությունից, երկու գլուխներից, եզրակացությունից, գրականության ցանկից:

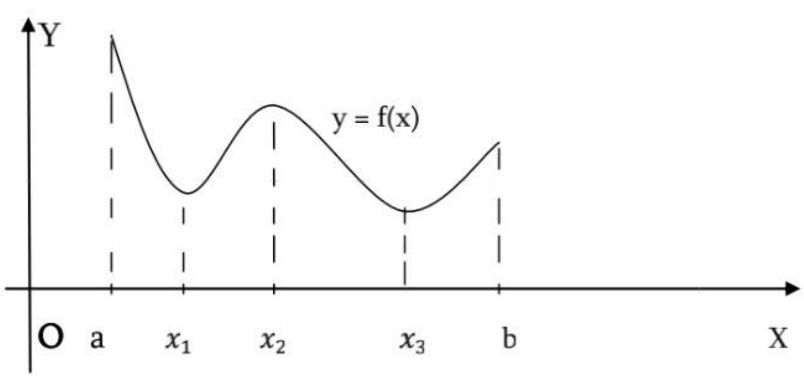
ԳԼՈՒԽ 1
Ֆունկցիայի էքստրեմումների դերը մաթեմատիկայի ավագ դպրոցական և բուհական դասընթացում
§1. Ֆունկցիայի էքստրեմում

Դիցուք f(x) ֆունկցիան որոշված է որևէ X տիրույթում:

Սահմանում 1.

ա) մենք կասենք, որ կետում y = f(x) ֆունկցիան ունի մինիմում (կամ x_1-ը՝ ֆունկցիայի մինիմումի կետ է), եթե գոյություն ունի այդ կետի այնպիսի (x_1-δ, x_1+δ) շրջակայք որտեղ տեղի ունի f(x)≥ f(x_1) $\forall x \in (x_1$ -δ, x_1+δ) անհավասարությունը:

բ) կասենք որ կետում տվյալ ֆունկցիան ունի մաքսիմում (կամ x_2-ը՝ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է), եթե այդ կետի որևէ (x_2 -δ, x_2+δ) շրջակայքում տեղի ունի f(x)≤ f(x_2) $\forall x \in (x_2$ -δ,x_2+δ) անհավասարությունը: Ֆունկցիայի մինիմումի և մաքսիմումի կետերը կոչվում են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր:



$(նկ. 1)$

Դիցուք տրված է y = f(x) ֆունկցիան, որը որոշված է (a,b) միջակայքում: Գտնենք այդ ֆունկցիայի էքստրեմումի բոլոր կետերը: Այդ խնդրի լուծման մեջ հիմնարար դեր է խաղալու ֆունկցիայի ածանցյալը: Ենթադրենք (a,b) միջակայքում f(x) ֆունկցիան ունի f´(x) ածանցյալ: Եթե x_0 կետում ֆունկցիան ունի էքստրեմում, ապա այդ կետի որևէ x_0-δ, x_0+δ) շրջակայքում ֆունկցիայի ընդունած արժեքների մեջ f(-ն կլինի մեծագույնը կամ փոքրագույնը: Համաձայն Ֆերմայի թեորեմի՝ (դիցուք f(x) ֆունկցիան որոշված է մի X միջակայքում և այդ միջակայքի ներքին c կետում ընդունում է մեծագույն (փոքրագույն) արժեք: Եթե այդ կետում գոյություն ունի f´(c) վերջավոր ածանցյալ, ապա անհրաժեշտաբար f´(c)=0), այդ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի՝

$$f\,'(x_0)=0: \qquad (1)$$

Այսպիսով մենք ստացանք էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը: Էքստրեմում պետք է որոնել միայն այն կետերում, որտեղ ածանցյալը հավասար է զրոյի: Այսպիսի կետերը կանվանենք կրիտիկական կետեր՝ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը կրիտիկական կետեր են: Սակայն պետք չէ կարծել, թե յուրաքանչյուր կրիտիկական կետ անպատճա էքստրեմումի կետ է, այսինքն (1) անհրաժեշտ պայմանը բավարար պայման չէ:

§2. Էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանը

Թեորեմ: Եթե y = f(x) ֆունկցիան ածանցելի է x =x_0 կետում, ապա ածանցյալը այդ կետում հավասար է 0-ի: (f ´(x_0)=0)

Ապացույց: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ y = f(x) ֆունկցիան x_0 կետում ունի մաքսիմում: Այդ դեպքում շատ փոքր Δx- ի համար ունենք

$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, այսինքն $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$,

Ապա այդ դեպքում

$$\frac{\mathbf{f}(\boldsymbol{x_0}+\Delta x)-\mathbf{f}(\boldsymbol{x_0})}{\Delta x} > 0, \text{երբ} \quad \Delta \boldsymbol{x} < 0 \quad (2)$$

$$\frac{\mathbf{f}(\boldsymbol{x_0}+\Delta x)-\mathbf{f}(\boldsymbol{x_0})}{\Delta x} < 0, \text{երբ} \quad \Delta \boldsymbol{x} > 0 \quad (3)$$

Այս անհավասարություններում անցնելով սահմանի, երբ $\Delta x \to 0$ և նկատի ունենալով, որ $f'(x_0)$ ածանցյալը գոյություն ունի ստանում ենք

$$\lim_{-\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(c) > 0 \quad (4)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(c) < 0 \quad (5)$$

(1)-ից հետևում է, որ f ΄(c)-ն կամ դրական է, կամ հավասար 0-ի, իսկ (2)-ից հետևում է որ, f ΄(c)-ն չի կարող լինել դրական, հետևաբար f ΄(c)=0: Նշված թեորեմը պնդում է այն, որ մաքսիմումի և մինիմումի կետերը կարող են գտնվել միայն արգումենտի այն արժեքների մեջ, որտեղ ածանցյալը հավասար է 0-ի:

Այս թեորեմը անհրաժեշտ, բայց ոչ բավարար պայման է: Նկատենք, որ $f'(x_0)=0$ պայմանը բավարար չէ էքստրեմումի գոյության համար:

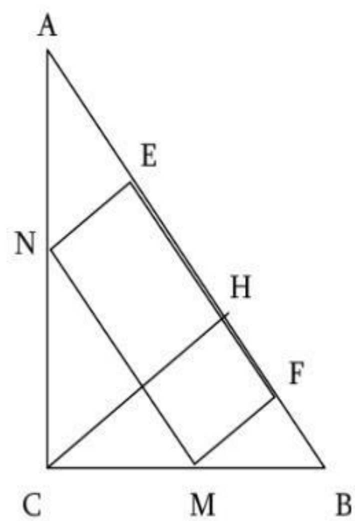
ԳԼՈՒԽ 2

Մաթեմատիկայի ավագ դպրոցական և բուհական դասընթացում էքստրեմումի խնդիրների ուսուցման մեթոդիկայի հարցեր

§1. Երկրաչափական խնդիրներ

Խնդիր՝ 1. Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծված է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթները գտնվում են ներքնաձիգի վրա, իսկ մյուս երկու գագաթները էջերի վրա: Գտնել ուղղանկյան մակերեսի մեծագույն արժեքը, եթե եռանկյան ներքնաձիգը 10 է, իսկ էջերից մեկը՝ 6սմ :

Լուծում՝ Նախ գծենք գծագիրը՝



(նկ. 1)

Տրված է՝

ΔABC,

$E, F \in BA$
$N \in CA$
$M \in CB$
$AB = 10$

S_{MNEF} max – ?

x նշանակենք NE

y նշանակենք NM

Եռանկյուն ANE-ն նման է եռանկյուն ACB-ին՝ $\Delta ANE \sim \Delta ACB$

այս նմանությունից ստանում ենք

$\frac{x}{6} = \frac{AE}{8}$

$AE = \frac{x \cdot 8}{6} = \frac{4}{3}x$

Եռանկյուն MFB-ն նման է եռանկյուն ACB-ին՝ $\Delta MFB \sim \Delta ACB$

այս նմանությունից ստանում ենք

$\frac{x}{8} = \frac{BF}{6}$

$BF = \frac{3}{4}x$

y = EF = 10 - $\frac{3}{4}$x - $\frac{4}{3}$x = 10 - $\frac{25}{12}$x

S_{MNEF} = x· y = x(10 - $\frac{25}{12}$x) = 10x - $\frac{25}{12}x^2$

Այս խնդիրն կարող ենք լուծել երեք եղանակով

- Առաջին եղանակ՝

  Դպրոցական դասընթացում խնդրի լուծումը տալիս են հետևյալ եղանակով:

  Ենթադրենք տրված է ax^2 + bx + c եռանդամը

  S = ax^2 + bx + c

  և վերևում արդեն իսկ նշված է որ

  $S_{MNEF} = 10x - \frac{25}{12}x^2$

  այստեղից ստանում ենք

  - $\frac{25}{12}x^2 + 10x$ գտնենք հատման կետերը x-երի առանցքի հետ այդ իսկ պատճառով մեր ֆունկցիան հավասարեցնենք 0-ի:

  f(x)= - $\frac{25}{12}x^2 + 10x$

  - $\frac{25}{12}x^2 + 10x$ = 0

  x (- $\frac{25}{12}x + 10$) = 0

  հատման կետերն են x-երի առանցքի հետ

  x_1 = 0

  x_2 = $\frac{120}{25}$ = 4,8

  S_{max} = - $\frac{25}{12}x^2 + 10x$ =12

  կրիտիկական արժեքները ստացվում են

  $x_0 = -\frac{b}{2a}$

  $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a}$

  այս կետերում ստանում ենք կրիտիկական արժեքները, մեր դիտարկվող օրինակի համար՝

  a = - $\frac{25}{12}$

  b = 10

  c = 0

հետևում է $x_0 = -\frac{10}{-\frac{25}{6}} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5}$

$y_0 = -\frac{100}{-\frac{25}{3}} = 12$

$y_{max} = 12$

- Երկրորդ եղանակն՝

Էքստրեմումի բավարարության առաջին կանոն

$S_{MNEF} = -\frac{25}{12}x^2 + 10x$

որոշենք այս ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը այդ նպատակով գտնենք ֆունկցիայի ածանցյալը և հավասարեցնենք 0-ի

$f'(x) = -\frac{25}{6}x + 10$

$-\frac{25}{6}x + 10 = 0$

$x = \frac{60}{25} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

$f'(x) > 0 \qquad x < \frac{12}{5}$

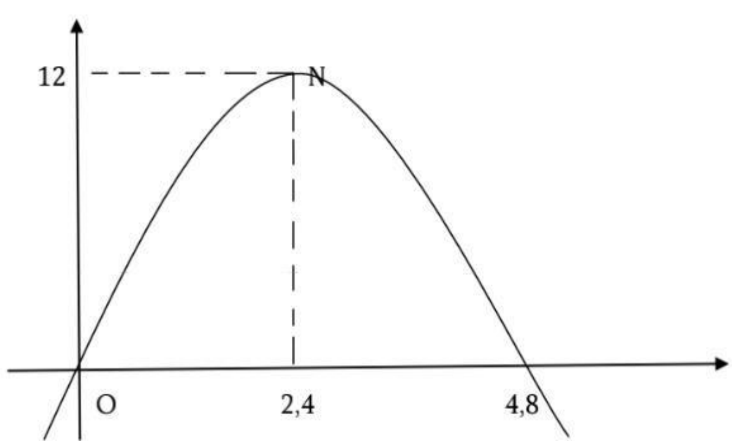
$f'(x) < 0 \qquad x > \frac{12}{5}$

max – ի բավարարության առաջին կանոնի ֆունկցիան

$x = \frac{12}{5}$ կետում կունենա մաքսիմում հետևապես

$S_{max} = -\frac{25}{12}x^2 + 10x = 12$

Քանի որ մեր x^2-ու գործակիցը բացասական է հետևաբար մեր պարաբոլայի ճյուղերն ուղղված են դեպի ներքև հետևաբար y_0 կետում կընդունի մաքսիմումի արժեք՝ $y_0 = 12$



(գր.1)

N (2,4 ; 12)

y_0 (2,4 ; 12)

x_0 (2,4 ; 0)

- Երրորդ եղանակ

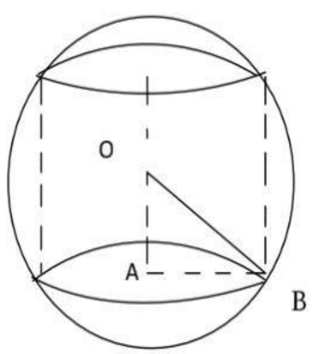
  Ըստ էքստրեմումի բավարարության երրորդ պայմանի ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի ածանցյալ x_0 = 2,4 կետում հաշվելով երկրորդ կարգի ածանցյալը այդ կետում կստանանք՝

  $f'(x) = -\frac{25}{6}x + 10$

  $f''(x) = -\frac{25}{6} < 0$ հետևապես ըստ էքստրեմումի բավարարության երկրորդ պայմանի այդ կետը կլինի մաքսիմումի կետ:

Խնդիր՝ 2. R շառավիղ ունեցող գնդին ներգծել գլան այնպես, որ այն ունենա մեծագույն ծավալ:

Լուծում՝ Որոնելի գլանի հիմքի շառավիղն ու բարձրությունը համապատասխանաբար նշանակենք h և r, կարող ենք գրել, որ V=$\pi r^2 h$, որտեղ V-ն գլանի ծավալն է:



(*նկ.* 2)

Δ AOB-ից $\frac{h}{2}=\sqrt{R^2 - r^2}$

h-ի արժեքը տեղադրենք գլանի ծավալի արտահայտության մեջ կստանանք

$$V=2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$$

կամ $$V^2 = 4\pi^2 r^4 (R^2 - r^2)$$

նշանակենք՝ $r^2 = x$, կունենանք

$$V^2 = 4\pi^2 x^2 (R^2 - x)$$

Քանի որ $4\pi^2$-ին հաստատուն մեծություն է, ապա գլանի ծավալը կունենա մեծագույն արժեք, երբ $x^2(R^2-x)$ արտադրյալն ունենա մեծագույն արժեք: x և R^2-x մեծությունների գումարը հաստատուն է, հետևաբար $x^2(R^2-x)$ արտադրյալն կունենա մեծագույն արժեք, երբ

$$\frac{x}{2}=\frac{R^2-x)}{1}$$

$$x=\frac{2}{3}R^2$$

$$r=\sqrt{x}=R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

գլանի բարձրությունը կլինի

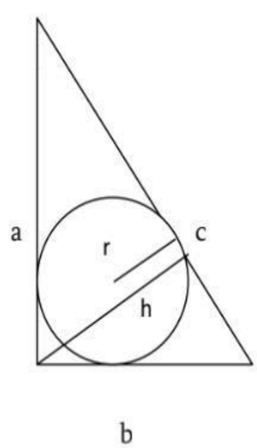
$$h=2\sqrt{R^2-r^2}=2\sqrt{R^2-\frac{2}{3}R^2}$$

$$h=2R\frac{1}{3}$$

$$V_{մեծ}=\pi r^2 h=\pi\frac{2R^2}{3}\cdot 2R\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3:$$

Խնդիր՝ 3. Ինչպիսի՞ արժեքներ կարող է ընդունել ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին իջեցրած բարձրության և այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավղի հարաբերությունը:

Լուծում՝ Ինչպես գիտենք ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը հաշվում են հետևյալ բանաձևով՝ $S=\frac{1}{2}ch$ (1)



(*նկ.* 3)

Ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել նաև a,b էջերով և c ներքնաձիգով և r շառավղով

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r \quad (2)$$

(1) և (2) բանաձևերից ստանում ենք, որ

$$\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

այստեղից՝ $\frac{h}{r}=\frac{a+b+c}{c} = 1+\frac{a+b}{c}$ (3)

Մնում է գնահատել $\frac{a+b}{c}$ հարաբերությունը, այսինքն a և b էջերի հարաբերությունը ներքնաձիգին:

Ըստ եռանկյան անհավասարության $a + b > c$

այսինքն՝ $\frac{a+b}{c} > 1$

հետևաբար $\frac{h}{r} > 2$:

Ապացուցենք, որ $\frac{h}{r}$ հարաբերությունը ցանկացած չափով մոտենում է 2-ի: Եվ 2-ը հանդիսանում է այդ հարաբերության ճշգրիտ ստորին եզր:

Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$:

Տեղադրելով (3)–ի մեջ ստանում ենք $\frac{h}{r} = 1 + \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Գնահատենք $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ հարաբերությունը: Համարիչը և հայտարարը բաժանենք a-ի՝

$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1+\frac{a}{b}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$$

$\frac{b}{a}$-ը նշանակենք x-ով՝ $\frac{b}{a} = x > 0;\ x\epsilon(0;+\infty)$

Երբ $x \to \infty$, այդ դեպքում b-ն ձգտում է անվերջության, իսկ a-ն ձգտում է 0-ի, ինչը հնարավոր չէ:

Երբ $x \to 0$, այդ դեպքում հակառակն է, ինչը նույնպես հնարավոր չէ:

Կստանանք հետևյալ ֆունկցիան

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}:$$

Երբ $x \to 0$, $f(x) \to 1$

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} > 1,$$

այստեղից էլ հետևում է որ

$$\frac{h}{r} = 1 + f(x) > 2$$

Այժմ փնտրենք f(x) ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը:

Ածանցենք տվյալ ֆունկցիան

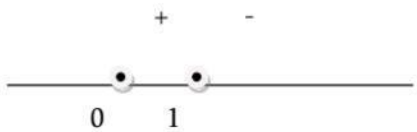
$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - (1+x)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1+x^2-(1+x)}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x)} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$$

էքստրեմումի համար <<կասկածելի>> կետերը գտնելու համար ստացված արտահայտությունը հավասարացնենք 0-ի:

$f'(x) = 0$

x-1=0

x=1



$(նկ. 4)$

Քանի որ ածանցյալը 1 կետով անցնելիս նշանը փոխում է՝ <<+>>-ից <<->>-ի, ուրեմն 1-ը մաքսիմումի կետ է: x_{max}=1

$$f_{max}(1) = \frac{1+1}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{h}{r} = 1 + f(x) \leq 1 + \sqrt{2}$$

Այսպիսով հարաբերությունը կարող է ընդունել հետևյալ արժեքները՝

$$2 < \frac{h}{r} \leq 1 + \sqrt{2}$$

Պատասխանք՝ $2 < \frac{h}{r} \leq 1 + \sqrt{2}$

Եզրակացություն

Աշխատանքում դիտարկվել են ավագ դպրոցի և բուհական առաջին կուրսի ուսուցման պրոցեսում քննարկվող էքստրեմումի որոնման մի շարք խնդիրներ, որոնք ունեն կիրառական մեծ նշանակություն ֆիզիկայում, ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցման և տնտեսագիտության մեջ: Նախ տրվել են էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանների տեսական հիմնավորումները և դիտարկվել են կոնկրետ խնդիրներ որոնք շարադրված են առաջին և երկրորդ գլուխներում: Խնդիրները նախատեսված են սովորողների գրավոր և բանավոր հարցումների ժամանակ կիրառելու, իսկ ստացված արդյուքները՝ համատեղ դիտարկման, ինչպես նաև խնդիրների լուծման տարբեր մեթոդների արդյունավետության որոշմանը: Աշխատանքում որպես նորույթ տրվել է երկրորդ կարգի ածանցյալի կիրառման էքստրեմումի բավարար պայմանի դիտարկումը 10-րդ դասարանի աշակերտների համար, նախատեսելով թեմային առնչվող տարբեր խնդիրներ: Մեր նպատակներից մեկն է նաև տալ կիրառված նորույթի արդյունավետության որոշումը: Էքստրեմումի խնդիրների լուծումը սովորողներին ևս մեկ անգամ հնարավորություն է տալիս համոզվելու, որ այդ խնդիրների դիտարկումը իքնանպատակ չէ, այլ պայմանավորված է առօրյա կյանքում առաջացած խնդիրների լուծումները գտնելու պահանջով

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Г. М. Фихтенгольц- Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 1
, Москва 1966г.

2. Արաբաջյան Լևոն- դասախոսություն

3. Գ. Գևորգյան, Ա. Սահակյան- Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, 10-րդ դասարան, Երևան 2009թ.

4. ՀՀ կրթության և գիտության նախարարություն, կրթության ազգային ինստիտուտ, գիտամեթոդական ամսագիր, թիվ 5-6 (68-69), 2009թ.

5. Գ. Գևորգյան, Ա. Սահակյան- Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, 11-րդ դասարան, Երևան 2010թ