Ավարտական հետազոտական աշխատանք

<u>ԹԵՄԱ՝</u>

Պարամետր պարունակող հավասարումների լուծումը

Կատարող՝ Մետաքսյա Մարգարյան

Դպրոց՝ Երևանի Սոս Հովսեփյանի անվան N 115 ավագ դպրոց

Առարկա՝ Մաթեմատիկա

Կազմակերպություն՝ Լեոյի անվան N65 ավագ դպրոց

Խմբի պատասխանատու՝ Զինա Խաչատրյան

Երևան 2022

Բովանդակություն

Ներածություն

Դպրոցական դասընթացում կարևոր տեղ է զբաղեցնում <<Պարամետր պարունակող հավասարումներ>> թեման: Այն բարդ է, քանի որ իր մեջ պարունակում է տարրական մաթեմատիկայում ուսումնասիրած, կարելի է ասել բոլոր թեմաները խորությամբ: Բայց այն հնարավոր է լիովին ուսումնասիրել միայն հոսքային դասարաններում:

Հիմնական դպրոցում այս թեմային, որպես այսպիսին, առանձին ժամեր չի հատկացվում: Այն առկա է համապատասխան թեմաների որոշ օրինակներում, այսինքն ax=b և $ax^2 + bx + c = 0$ գծային և քառակուսային հավասարումների լուծման շրջանակներում:

Պարամետրով առաջադրանքները շատ հետաքրքիր են, նրանք խորը գիտելիքներ և հատուկ ուշադրություն են պահանջում, որպեսզի պարամետրի որևէ արժեք բաց չթողնվի: Նման հավասարումները ճիշտ լուծելու համար պետք է տիրապետել հավասարումները լուծելու հիմնական մեթոդներին, սովորել դասակարգել առաջադրանքներն ըստ տեսակի և լուծման մեթոդների: Դա պայմանավորված է նրանով, որ պարամետրով յուրաքանչյուր հավասարում սովորական հավասարումների մի ամբողջ դաս է, որոնցից յուրաքանչյուրի համար պետք է լուծում ստանալ:

Պետական քննության և միասնական պետական քնությունների արդյունքների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ աշակերտները և դիմորդները մեծ դժվարությամբ են առաջադրանքները լուծում պարամետրերով, և շատերը դրանք չեն էլ սկսում: Սրա պատճառը այս թեմայի վերաբերյալ գիտելիքների համակարգի բացակայությունն է: Այս աշխատանքում մենք կդիտարկենք պարամետրական հավասարումների լուծման տարբեր մեթոդները: Աշխատանքը բաղկացած է 2 մասից՝ տեսական և գործնական: Տեսական մասում կսահմանենք <<Պարամետրով հավասարում>> հասկացությունը և կնկարագրենք նման հավասարումների լուծման ուղիները: Գործնական մասում կներկայացնենք պարամետր պարունակող որոշ հավասարումների լուծումներ:

<<Պարամետրով հավասարում>> թեմայով անհատական հետազոտական աշխատանքների իրականացման գործընթացում դիտարկել եմ պարամետրական

հավասարումների տարբեր օրինակների լուծման ուղիներ: Փորձել եմ ստեղծել փոքրիկ տեղեկատու պարամետրական հավասարումների լուծման ուսումնասիրության համար: Առանձնացնենք նախագծի խնդիրն ու նպատակը.

<u>Նախագծի խնդիրը-</u> Ինչպես սովորեցնել աշակերտներին լուծել պարամետրերով առաջադրանքները

<u>Նախագծի նպատակը-</u> Դիտարկել պարամետր պարունակող տարբեր օրինակներ, փնտրել լուծման ուղիներ: Ստեղծել մատչելի և ամբողջական տեղեկատու `սովորեցնելու համար, թե ինչպես լուծել օրինակներ այնպիսի պարամետրով, որը կօգնի աշակերտներին հաջողությամբ յուրացնել թեման: Բացի այդ, ներկայացման ձևաչափով հղման ձևաչափը կարող է օգնել ուսուցիչներին՝ աշակերտներին ծանոթացնել այս թեմային:

<u>Նախագծի նպատակները</u>

Վերլուծել պարամետրով հավասարումներ լուծելու վերաբերյալ ներկայացված նյութը:

Գտնել դրանք լուծելու լավագույն միջոցը ՝ աշակերտներին հետագայում տրամադրելու համար:

Ստեղծել գրագետ տեղեկատվական աղբյուր , որը պարզ և հասկանալի կլինի ընկալման համար:

Ժամանակակից գիտությունն անհնար է պատկերացնել առանց մաթեմատիկական ոլորտի զարգացման, քանի որ ճշգրիտ գիտությունների մեծ մասը հիմնված է հիմնական հանրահաշվական օրենքների և հատկությունների վրա:

Հանրակրթական դպրոցներում աշակերտները 7 -րդ դասարանում սկսում են խորությամբ ուսումնասիրել երկրաչափություն և հանրահաշիվ: Թվաբանության ներդրումը օգնում է երեխաներին զարգացնել քննադատական մտածողությունը և նպաստում տրամաբանական շղթաներ կազմելու ունակության զարգացմանը: Մաթեմատիկական մտածողությունը անհրաժեշտ է բոլոր մուտքային տեղեկատվության կառուցվածքի և ավելի լավ յուրացման համար: Այսպիսով, մաթեմատիկական կրթությունը ընդհանուր մշակույթի էական տարր է: Այս փաստն անվիճելի է:

Բարձրագույն ուսումնական հաստատություններում ուսումը շարունակելու համար բարձրորակ շրջանավարտներ ընտրելու համար `հաճախ պահանջվում է շրջանավարտների մաթեմատիկական պատրաստվածության բարձր մակարդակ: Պետական միասնական քննության 2-րդ մասի առաջադրանքները նախատեսված են գիտելիքները ստուգելու այն պահանջների մակարդակով, որոնք ավանդաբար ներկայացնում են մաթեմատիկայի պրոֆիլային քննություն ունեցող բուհերը:
Պարամետրով առաջադրանքները նախատեսված են նաև ամենաhեղինակավոր համալսարանների մրցունակ ընտրության համար, ինչպես նաև դիմորդների մաթեմատիկական ուսուցման պահանջների ավելացմամբ:

Այն կապված է նաև տարբեր տեսակի հանրահաշվական խնդիրների առատության և դրանց լուծման տեխնիկայի և մեթոդների բազմազանության հետ: Ամենից հաճախ այդ խնդիրների լուծման դժվարությունները ծագում են հետևյալ պատճառներով.

- թեմայի վերաբերյալ նյութը կամ վատ է յուրացվել հիմնական դպրոցում, կամ արդեն մոռացվել է շրջանավարտների կողմից.
- Խնդիրը լուծելու համար հարկավոր է իմանալ լուծման որոշ մեթոդներ և տեխնիկա, որոնք կամ հաշվի չեն առնվում հանրահաշվի հիմնական դասընթացի ուսումնասիրության ժամանակ, կամ չեն կիրառվում:

Ներկայիս իրավիճակը փոխելու համար անհրաժեշտ է համակարգել հիմնական դպրոցում, որը շարունակվում է նաև ավագ դպրոցում, սովորողների ձեռք բերած գիտելիքները, ինչպես նաև առկա աղբյուրները վերլուծել ավելի նեղ կենտրոնացված նյութով: Այս հետազոտական գործունեության արդյունքը կլինի տեղեկատվական գրքույկը, որը կհավաքի այս թեմայի վերաբերյալ ամենահարմար և հասկանալի մեթոդներն ու տեխնիկան՝ «Պարամետրով օրինակների լուծում»: Այն նաև կկենտրոնանա լուծման իրավասու ձևավորման վրա:

ԳԼՈՒԽ 1

Ի՞նչ է պարամետրով հավասարումը

Ինչպես գիտենք, հավասարումը որևէ անհայտ պարունակող հավասարություն է: Այդ անհայտը հավասարման մեջ նշանակվում է որևէ տառով (սովորաբար x-ով): Լուծել հավասարումը՝ նշանակում է գտնել անհայտի բոլոր արժեքները, որոնք բավարարում են հավասարմանը, կամ ցույց տալ, որ այդպիսի արժեքներ չկան:

Երբեմն հավասարումը, բացի անհայտից, պարունակում է նաև այլ տառեր, որոնք կոչվում են **պարամետրեր**: Այս դեպքում գործ ունենք անվերջ թվով հավասարումների հետ, քանի որ պարամետրի յուրաքանչյուր թույլատրելի արժեքի դեպքում ստանում ենք մեկ (սովորական հավասարում): Պարամետրի որոշ արժեքների դեպքում այն կարող է ունենալ մեկ կամ մի քանի արմատ, իսկ որոշ արժեքների դեպքում կարող է ընդհանրապես արմատ չունենալ:

Լուծել պարամետր պարունակող հավասարումը (անհավասարումը) նշանակում է լուծել այն պարամետրի բոլոր թույլատրելի արժեքների դեպքում:

Այսինքն՝ նախ պետք է գտնել պարամետրի թույլատրելի արժեքները, այնուհետև պարզել, թե այդ արժեքներից որոնց դեպքում որո՞նց դեպքում հավասարումն ունի արմատ և գտնել այդ արմատները:

Այսպիսի հավասարումներ մենք ուսումնասիրել ենք: Օրինակ՝

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

Հավասարումը, որն ունի երեք պարամետր՝ a,b,c: Երբ $a\neq 0$, այն քառակուսային հավասարում է, որը հետազոտելով պարզել ենք, որ.

ա)եթե $D=b^2-4ac<0$, ապա (1) հավասարումն **արմատ չունի**

բ)եթե D=0, ապա (1) հավասարումն ունի **մեկ արմատ՝** $x=-\frac{b}{2a}$

գ)եթե $D>0$, ապա (1) հավասարումն ունի **երկու արմատ՝** $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Երբ a=0, ստանում ենք $bx+c=0 \qquad (2)$

գծային հավասարումը: Ինչպես գիտենք

դ) եթե $b\neq 0$, *ապա* (2) հավասարումն ունի **մեկ արմատ՝** x=-c/b,

ե) եթե b=0, $c\neq 0$, *ապա* (2) հավասարումն **արմատ չունի**,

զ) եթե b=c=0, *ապա* (2) հավասարումն ունի **անվերջ թվով արմատներ:**

Այսպիսով փաստորեն լուծել ենք ax^2 +bx+c=0 հավասարումը a,b,c պարամետրերի բոլոր արժեքների դեպքում:

Գլուխ 2

Պարամետր պարունակող հավասարումների լուծման մեթոդները

Այս գլխում մենք կանդրադառնանք պարամետրով հավասարումների լուծման երկու հիմնական եղանակներին՝ վերլուծական և գրաֆիկական:

Շատ խնդիրների դեպքում պարամետրը դիտվում է որպես ֆիքսված, բայց անհայտ թիվ: Մինչդեռ, ֆորմալ տեսանկյունից պարամետրը փոփոխական է, և այն «հավասար է» օրինակում առկա մյուսներին: Օրինակ՝ $f(\,x;a\,)$ ձևի պարամետրի այս տեսքով ֆունկցիաները վերագրվում են ոչ թե մեկով (ինչպես նախկինում), այլ երկու փոփոխականով: Նման մեկնաբանությունը բնականաբար կազմում է պարամետրով հավասարումների լուծման վերլուծական մեթոդ:

Լուծման ալգորիթմ.

Նախքան վերլուծական մեթոդով պարամետրերի հետ կապված խնդրի լուծումը անցնելը, մենք պետք է հասկանանք իրավիճակը պարամետրի որոշակի թվային արժեքի համար: Օրինակ՝վերցրեք α=1 պարամետրի արժեքը և պատասխանեք հարցին. արդյո՞ք α= 1 պարամետրի արժեքը ցանկալի արժեքն է այս խնդրի համար:

Այնուհետև, օգտագործելով կոնկրետ օրինակ, մենք կփորձենք հասկանալ պարամետրով հավասարումների լուծման վերլուծական մեթոդը:

Այժմ լուծենք 1 պարամետրով քառակուսային հավասարում.

Օրինակ 1. $(a^2-9)x^2-2(a+3)+1=0$

Գտնենք հավասարման արմատները և արմատների քանակը կախված a պարամետրից:

Նախ քննարկենք այն դեպքը, երբ $a^2-9=0, (a+\pm 3)$:

Այդ դեպքում մենք կունենանք հետևյալ հավասարումները

1) -12x+1=0, երբ a=3,

Այս դեպքում հավասարումն ունի 1 արմատ $x=\frac{1}{12}$

2) -2· 0· x +1=0 երբ a=-3

Այս դեպքում հավասարումն արմատ չունի:

Այն դեպում, երբ a$\neq \pm 3-\text{ի}$ կունենանք քառակուսային հավասրաում, որի տարբերիչն է՝

D_1= $(a+3)^2-(a^2-9)=6a+18$

Դա նշանակում է, որ

ա) հավասարումն արմատ չունի, երբ 6a+18<0, այսինքն՝

a $<-3-\text{ից}$, բայց հավասարումն արմատ չունի նաև a=-3-ի դեպքում, այս պատասխանները միավորելով ստանում ենք $a \in (-\infty;-3]$ դեպքում հավասարումն արմատ չունի:

բ) երբ $D_{1>}$ 0, այսինքն $a \in (-3;3) \cup$ (3;∞) հավասարումն ունի 2 արմատ

x=$\frac{(a+3)\pm\sqrt{6a+18}}{a^2-9}$

Ամփոփելով մեր քննարկած դեպքերը՝ հանգում ենք վերջնական պատասխանին՝

երբ $a \in (-\infty;-3]$ դեպքում հավասարումն արմատ չունի,

երբ a=3 հավասարումն ունի 1 արմատ՝ x=$\frac{1}{12}$,

երբ $a \in (-3;3) \cup$ (3;∞) հավասարումն ունի 2 արմատ՝

$$x=\frac{(a+3)\pm\sqrt{6a+18}}{a^2-9}$$

Պարամետրով հավասարումներ լուծելը մեզ օգնում է ավելի հեշտությամբ գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը: Ենթադրենք տրված է որևէ f(x) ֆունկցիա: Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը բաղկացած է այնպիսի b թվերից, որոնց համար գոյություն ունի f(x)=b հավասարմանը բավարարող որևէ x թիվ: Հետևաբար մենք պետք է գտնենք b պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում f(x)=b հավասարումն ունի արմատ: Բերենք այդպիսի մի օրինակ

Օրինակ 2: Գտնել y=$\frac{2^x-1}{2^{2x}\ \ -2^x}$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:

Լուծում . $\frac{2^x-1}{2^{2x}\ \ -2^x}$ =b$\Leftrightarrow$ $2^x-1=b2^{2x}\ \ -b2^x$

2^x-ը նշանակենք t տառով՝ t=2^x կստացվի $bt^2+(b-1)t+1=0$, որտեղ t=$2^x>0$: Ուստի անհրաժեշտ է գտնել այն b-երը, որոնց դեպքում

$bt^2+(b-1)t+1=0$ հավասարումն ունի դրական լուծում: Երբ b=0 հավասարման արմատն է t=1: Երբ b$\neq$ 0, ստացվում է քառակուսային հավասարում, որը կունենա լուծում, երբ նրա տարբերիչը բացասական չէ:

D=(b-1)$^2 - 4b = b^2 - 6b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow b \in \left(-\infty; 3 - 2\sqrt{2}\right] \cup [3 + 2\sqrt{2}; \infty)$:

Այժմ պարզենք, թե որ դեպքում քառակուսային հավասարման արմատներից գոնե մեկը կլինի դրական: Դիցուք քառակուսային հավասարման արմատներն են t_1-ընt_2-ը: Քանի որ $t_1 t_2 = \frac{1}{b}$, ուստի, եթե b< 0, ապա արմատներից մեկը դրական է, իսկ մյուսը բացասական: Երբ b> 0, ապա արմատներն ունեն նույն նշանը, $t_1 + t_2 = \frac{b-1}{b}$: Ուստի արմատները կլինեն դրական, եթե 0< $b < 1$: Այսպիսով որոնելի b-երն են. $b =$ 0 կամ $\begin{cases} b \in \left(-\infty; 3 - 2\sqrt{2}\right] \cup [3 + 2\sqrt{2}; \infty) \\ b \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \end{cases}$

Այսինքն մեր ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է (-∞;3-2$\sqrt{2}$]:

Դիտարկենք նաև այն դեպքը, երբ պարամետրերը հանդիպում են գծային հավասարումների համակարգում: Այդպիսի օրինակներ կան ինչպես դասագրքում, այնպես էլ շտեմարաններում: Լուծենք մի օրինակ շտեմարանից:

Օրինակ 3: Տրված է $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$ համակարգը, որտեղ a-ն պարամետր է:

1. a-ի քանի՞ արժեքի դեպքում համակարգը լուծում Место для формулы.չունի:

2. Գտնել a-ի այն ամենափոքր բնական արժեքը, որի դեպքում համակարգն ունի մեկ լուծում:

3.a-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում համակարգն ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ:

4. Գտնել a-ի այն ամենափոքր բնական արժեքը, որի դեպքում համակարգն ունի լուծում:

Լուծում՝ համակարգը լուծենք տեղադրման եղանակով:

x=1-ay արժեքը տեղադրենք համակարգի 1-ին հավասարման մեջ:

a(1-ay)+y=a^2

a-$a^2 y + y = a^2$

y(1-$a^2) = a^2 - a$

y(1-a)(1+a)=-a(1-a)

1. a=-1 լուծում չունի
2. a≠ ± 1 ունի մեկ լուծում և ամենափոքր բնական արժեքը, որի դեպքում ունի մեկ լուծում երկուսն է (a=2):

3. a=1 դեպքում ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ
4. a=1-ը այն ամենափոքր բնական արժեքն է, որի դեպքում համակարգն ունի լուծում:

Գծային հավասարումների կամայական $\begin{cases} a_1\ x + b_1\ y = c_1 \\ a_2\ x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ համակարգի համար, որի a_2, b_2, c_2, գործակիցները տարբեր են 0-ից, ճիշտ է հետևյալը.

Եթե $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ապա համակարգն ունի մեկ լուծում

եթե $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ապա համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ

եթե $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, ապա համակարգը լուծում չունի

Պարամետրական հավասարումների լուծման գրաֆիկական եղանակը

Մենք գիտենք, որ հավասարումների լուծումը գրաֆիկական եղանակով կատարվում է հետևյալ կերպ.

ա)հավասարման աջ և ձախ մասերը դիտարկում ենք որպես առանձին ֆունկցիաներ՝ f(x)=g(x)

բ)կառուցում ենք նույն կոորդինատային համակարգում y=f(x) և y=g(x) ֆունկցիաները

գ)դիտարկում ենք այդ ֆունկցիաների հատման կետերը:

Եթե ֆունկցիաները չեն հատվում, ապա հավասարումը լուծում չունի, իսկ եթե հատվում են, ապա հատման կետերի կոորդինատները համարվում են հավասարման լուծումները: Այդ կետերի կորդինատները միշտ չէ, որ ճշգրիտ ենք կարողանում որոշել: Այդ է պատճառը, որ պարամետրական հավասարումներում ավելի շ ատ պահանջը լինում է այսպես. Պարամետրի տրված արժեքի դեպքում հավասարումը քանի լուծում ունի:

Օրինակ 4՝ $||x-2|-\ 4| = a^2$ +3a (1)

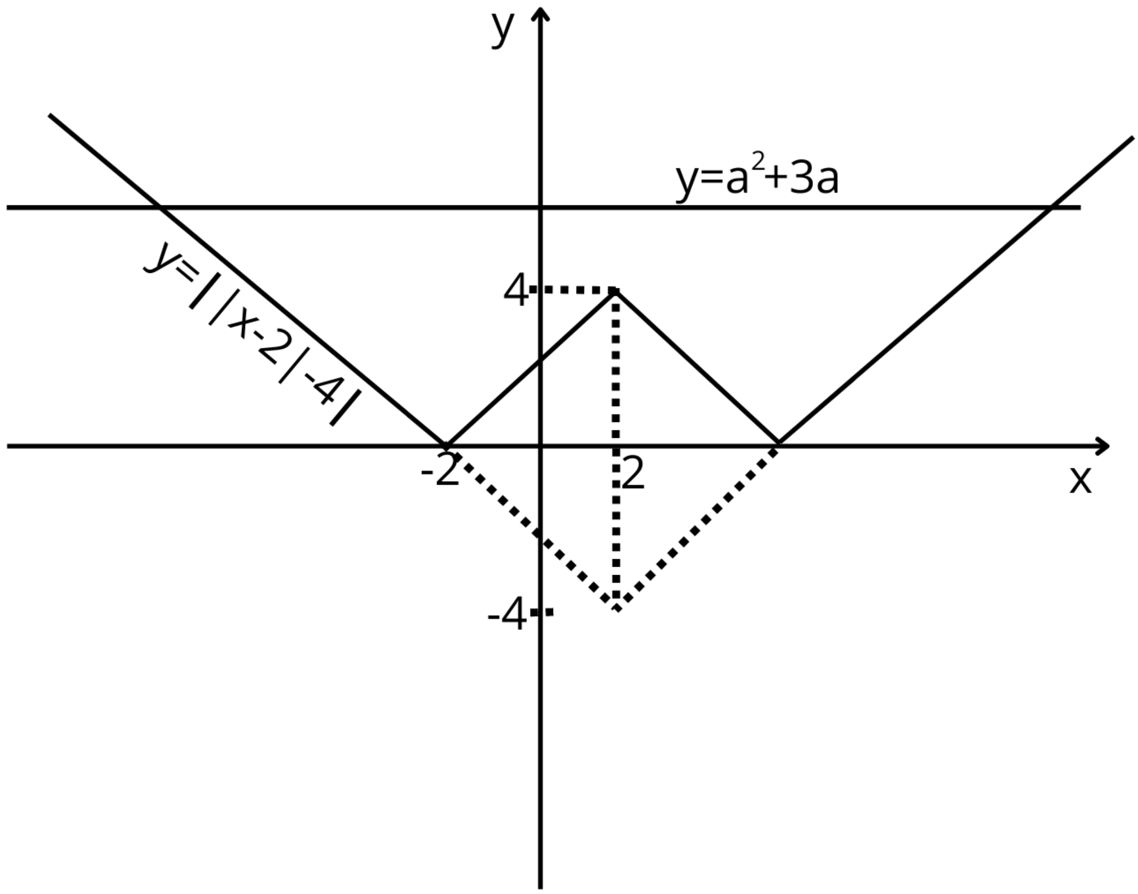
a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ երկու արմատ:

Նախ կառուցենք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները

y=$||x-2|-\ 4|$ (2)

y=$a^2\ + 3a$ (3)

Որպեսզի (1) հավասարումն ունենա ճիշտ երկու արմատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ (2) ֆունկցիայի գրաֆիկը և (3) ուղիղը հատվեն երկու կետում: (3) ֆունկցիայի գրաֆիկը ուղիղ գիծ է, զուգահեռ աբսցիսների առանցքին, որովհետև a-ն պարամետր է: Ձևափոխելով y=|x| ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցենք (2) ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Ելնելով մեր գծած գրաֆիկից պետք է տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝

$a^2 + 3a = 0$ կամ $a^2 + 3a > 4$, որը համարժեք է a=0, a=-3,

a$\in (-\infty;\ -4) \cup (1; \infty)$

Հետևաբար մեր հավասարումը կունենա ճիշտ 2 արմատ այն և միայն այն դեպքում, եթե a $\in (-\infty;\ -4 \cup \{-3; 0\} \cup (1; \infty)$

Պարամետրերի հետ կապված խնդիրները դժվար են, քանի որ դրանց լուծման մեկ ալգորիթմ գոյություն չունի: Նման խնդիրների առանձնահատկությունն այն է, որ դրանք անհայտ արժեքների հետ միասին պարունակում են այնպիսի պարամետրեր, որոնց թվային արժեքները հատուկ չեն նշված, բայց համարվում են հայտնի և տրված են որոշակի թվային բազմության վրա: Այս դեպքում պարամետրերի արժեքները էապես ազդում են խնդրի լուծման տրամաբանական և տեխնիկական ընթացքի և պատասխանի ձևի վրա:

Եզրակացություն

Պարամետրերով առաջադրանքները դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացի ամենադժվար բաժիններից են, քանի որ դրանց լուծումը կապված է բարդ տրամաբանական կոնստրուկցիաներ իրականացնելու ունակության հետ: Նրանք կարևոր դեր են խաղում տրամաբանական մտածողության և մաթեմատիկական մշակույթի ձևավորման գործում, սակայն, որպես կանոն, նման հավասարումների լուծումը դժվարություններ է առաջացնում:

Այս աշխատանքում մենք խորացրինք մեր գիտելիքները պարամետրով հավասարումների մասին: Մենք դիտարկել ենք հավասարումների լուծման երկու եղանակ՝ վերլուծական և գրաֆիկական: Եվ մենք եկանք այն եզրակացության, որ լուծման վերլուծական մեթոդի համադրությունը ստացված արդյունքների գրաֆիկական մեկնաբանության հետ հնարավորություն է տալիս ավելի գիտակցված դարձնել պարամետրերով հավասարումների լուծման գործընթացը՝ միաժամանակ նպաստելով հետազոտական գործունեության տարրերի ձևավորմանը:

Այս աշխատաքում մենք ներկայացրել ենք պարամետր պարունակող առաջադրանքներ և դրանց լուծումը տարբեր ձևերով:

Մենք եկանք այն եզրակացության, որ այս թեման պետք է ավելի խորը ուսումնասիրվի դպրոցական ուսումնական ծրագրում:

Այսպիսով, կարծում եմ, որ մեր առջև դրված խնդիրները լուծված են, աշխատանքի նպատակը՝ իրագործված:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1.Գ.Գևորգյան,Ա. Սահակյան << Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզիտարրեր 12>>, Երևան 2011

2.Յաշչենկո Ի. Վ., Շեստակով Ս. Ա. Զախարով Պ. Ի. Մաթեմատիկայի քննության նախապատրաստում 2012 թ. Մեթոդական ցուցումներ.

3.Մաթեմատիկայի թեստային առաջադրանքների շտեմարան, Մաս 1, Երևան, Հաշ Ընդ Հաշ Փրինթ 2013