Ավարտական հետազոտական աշխատանք

Թեմա՝ **Թվաբանական պրոգրեսիա**

Կատարող՝ Ռուզաննա Մուրադյան

Դպրոց՝ Երևանի Դ. Դեմիրճյանի անվան հ.27 հիմնական դպրոց

Առարկա ՝ Հանրահաշիվ

Կազմակերպություն՝ Երևանի Լեոյի անվան հ.65 ավագ դպրոց

Խմբի պատասխանատու՝ Զինա Խաչատրյան

ԵՐԵՎԱՆ 2022

Բովանդակություն

Ներածություն

«Թվաբանական պրոգրեսիա» թեման ներկայացված է տեսական նյութով և թվաբանական պրոգրեսիայի վերաբերյալ 16 խնդիրներով: Տեսական նյութը ներառում է թվաբանական պրոգրեսիայի գաղափարն ու հատկությունները, թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի առաջին և երկրորդ բանաձևերը, իսկ խնդիրները ներկայացված են լուծումներով: Բերված խնդիրները դասավորված են այնպիսի հաջորդականությամբ, որ հնարավորություն տան զարգացնելու դպրոցականի մտքի ճկունությունը:

Թվաբանական պրոգրեսիա

Թվաբանական պրոգրեսիայի գաղափարը

Հիշենք, որ թվային հաջորդականությունը թվերի համարակալված բազմությունն է:

Սահմանում: **Թվաբանական պրոգրեսիա** են անվանում այն թվային հաջորդականությունը, որի յուրաքանչյուր անդամ, սկսած երկրորդից, հավասար է իր նախորդ անդամի և միևնույն հաստատուն թվի գումարին: Այդ թիվը կոչվում է **թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերություն**:

Այսպիսով, եթե $\{a_n\}$ թվային հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է, ապա գոյություն ունի այնպիսի d թիվ, որ ցանկացած n բնական թվի համար

$$a_{n+1}= a_n+d:$$

Այդ d թիվը, ինչպես նշվեց, թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունն է: Օրինակ, 1,4,7,10 թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը 3-ն է:

Եթե d>0, ապա թվաբանական պրոգրեսիայի յուրաքանչյուր անդամը, սկսած երկրորդից մեծ է իր նախորդից: Այդ դեպքում պրոգրեսիան կոչվում է **աճող**: Իսկ եթե d<0, ապա պրոգրեսիան կոչվում է **նվազող**: Եթե d=0, ապա պրոգրեսիան ոչ աճող է, ոչ էլ նվազող, նրա բոլոր անդամները իրար հավասար են:

Նշենք թվաբանական պրոգրեսիայի որոշ հատկություններ.

1. **Եթե $\{a_n\}$ հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է, ապա նրա n-րդ անդամը՝ a_n-ը այդ պրոգրեսիայի a_1անդամով և d տարբերությամբ արտահայտվում է**

$$a_n= a_1+(n-1)d \qquad (1)$$

բանաձևով, որը կոչվում է թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձև:

Իրոք,

$$a_2= a_1+d,$$
$$a_3= a_2+d=(a_1+d)+d= a_1+2d,$$
$$a_4= a_3+d=(a_1+2d)+d= a_1+3d:$$

Կամայական n բնական թվի համար կունենանք՝

$$a_n = a_1 + (n-1)d:$$

Կատարենք այս հատկության խիստ ապացույցը մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով (այս ապացույցը 9-րդ դասարանի ծրագրից դուրս է):

1)Ստուգենք բանաձևի ճիշտ լինելը n=1 դեպքում.

երբ n=1, ապա $a_1 = a_1 + (1-1)d$, այսինքն բանաձևը ճիշտ է:

2)Ենթադրենք բանաձևը ճիշտ է n=k դեպքում, այսինքն՝

$a_k = a_1 + (k-1)d$ բանաձևը ճիշտ է:

3)Ապացուցենք, որ բանաձևը ճիշտ է n=k+1 դեպքում.

$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + (k-1+1)d = a_1 + kd:$

Ստացվեց, որ $a_{k+1} = a_1 + kd$, այսինքն բանաձևը ճիշտ է նաև n=k+1 դեպքում: Համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի (1) բանաձևը ճիշտ է ցանկացած բնական n-ի դեպքում:

2. **Թվաբանական պրոգրեսիայի յուրաքանչյուր անդամ, սկսած երկրորդից, իր նախորդ և հաջորդ անդամների միջին թվաբանականն է, այսինքն**

$$\mathbf{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}, \text{ որտեղ } n=2,3,\ldots: \qquad (2)$$

Իրոք,

$a_{n-1} = a_n - d$, $a_{n+1} = a_n + d$, ուստի

$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = a_n:$

Ճիշտ է նաև այս պնդման հակադարձը: Ենթադրենք ունենք $a_1, a_2, \ldots, a_n$ հաջորդականությունը, որի յուրաքանչյուր անդամ հավասար է իր հարևանների թվաբանական միջինին, այսինքն ճշմարիտ է (2) հավասարությունը: Այդ դեպքում (2) հավասարությունից կստանանք՝ $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$: Նշանակենք այս հավասարության աջ և ձախ մասերում գրված իրար հավասար տարբերություններից յուրաքանչյուրը d-ով՝ $d = a_n - a_{n-1}$, $d = a_{n+1} - a_n$: Այս հավասարություններից կստանանք՝ $a_n = a_{n-1} + d$, $a_{n+1} = a_n + d$: Իսկ սա նշանակում է, որ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է:

2-րդ հատկությունը կոչվում է **թվաբանական պրոգրեսիայի բնութագրիչ հատկություն**:

Թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարը

Կարո՞ղ եք հաշվել 1-ից մինչև 100-ը բոլոր բնական թվերի գումարը: Ահա այս խնդրի լուծման մեջ է առաջին անգամ լիարժեք փայլատակել ապագա մեծագույն մաթեմատիկոս կամ ինչպես ժամանակակիցներն էին ասում մաթեմատիկայի արքա Կարլ Գաուսի միտքը: Գաուսը դպրոց է հաճախել յոթ տարեկանում: Մարմնական պատիժները այդ ժամանակ ընդունված էին: ՈՒսուցիչ Բյուտների մտրակը հաճախակի էր դաղում աշակերտներին: Դաղվել էր նաև փոքրիկ Գաուսի մեջքը, քանի որ նա սկզբնական շըրջանում առանձնապես չէր փայլում: Բայց պատկերը արմատապես փոխվեց, երբ սկսվեցին թվաբանության դասերը: Մի անգամ ուսուցիչը հանձնարարեց աշակերտներին գտնել 1-ից մինչև 100-ը բոլոր բնական թվերի գումարը: Նա նոր էր վերջացրել խնդրի շարադրանքը, երբ լսվեց փոքրիկ Գաուսի ձայնը.

Ես արդեն վերջացրել եմ, և իր լուծումը դրեց ուսուցչի սեղանին:

ՈՒսուցիչը չէր շտապում ստուգել Գաուսի առաջարկած լուծումը: Նա համոզված էր, որ աշակերտը սխալվել է:

_Այդքան կարճ ժամանակում չի կարելի լուծել նման դժվար խնդիր ,_ասաց նա:

Բայց մեծ եղավ ուսուցչի զարմանքը և հիացմունքը, երբ նա տեսավ, որ Գաուսը ամեն ինչ ճիշտ էր արել. Ճիշտ և չափազանց հնարամիտ եղանակով:

Ահա, թե ինչպես էր հաշվել 1-ից 100 թվերի գումարը փոքրիկ Գաուսը.

$1+2+3+\ldots+98+99+100=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(49+52)+(50+51)=101\cdot 50=5050$:

Լուծման այս եղանակը կարելի է օգտագործել կամայական թվաբանական պրոգրեսիայի որոշ թվով անդամների գումարը գտնելու համար: Դրա համար նախ ապացուցենք հաջորդականության ծայրերից հավասարահեռ անդամների հատկությունը:

Սահմանում: Ինչ-որ հաջորդականության երկու զույգ անդամներ՝ (a_m, a_n) և (a_k, a_p) կանվանենք ծայրերից հավասարահեռ զույգեր, եթե նրանց ինդեքսների գումարը նույնն է, այսինքն՝ $m+n=k+p$, որտեղ $m, n, p, k \in N$:

Հաջորդականության ծայրերից հավասարահեռ անդամների հատկությունը: **Թվաբանական պրոգրեսիայի ծայրերից հավասարահեռ անդամների գումարներն իրար հա-**

վասար են: Այսինքն, եթե $m+n=k+p$, որտեղ $m, n, p, k \in N$, ապա թվաբանական պրոգրեսիայի (a_m, a_n) և (a_k, a_p) անդամների համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$a_m+ a_n= a_k+a_p$:

Ապացույց: $a_m+ a_n=a_1+(m-1)d+a_1+(n-1)d=2a_1+(m+n-2)d$, $a_k+ a_p=a_1+(k-1)d+a_1+(p-1)d=2a_1+(k+p-2)d$: Հետևաբար, $a_m+ a_n = 2a_1+(m+n-2)d=2a_1+(k+p-2)d = a_k+a_p$:

$\{ a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարին հավասար թիվը նշանակում են S_n-ով, այսինքն՝

$$S_n= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad (n\geq1):$$

Թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի առաջին բանաձևը

$a_1 , a_2 , \ldots , a_n ,\ldots$ թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների S_n գումարը որոշվում է հետևյալ բանաձևով .

$$S_n= \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n:$$

Իրոք,

$$2 S_n= S_n + S_n= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)+(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)=(a_1 + a_n) +(a_2+ a_{n-1}) +\ldots+(a_n+a_1):$$

Քանի որ

$a_2+ a_{n-1}=a_1+d+a_n-d= a_1+ a_n$,

$a_3+ a_{n-2}= a_1+2d+a_n-2d= a_1+ a_n$

և այլն,

$a_m +a_{n-m}= a_1+(m-1)d+ a_n-(m-1)d= a_1+ a_n$, ապա ստանում ենք՝ $2S_n=(a_1 + a_n)\cdot n$: Այստեղից էլ հետևում է, որ

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$:

Թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի երկրորդ բանաձևը

Հաճախ թվաբանական պրոգրեսիան տրված է լինում առաջին անդամի և տարբերության միջոցով: Նման դեպքերում թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի առաջին բանաձևից նպատակահարմար չէ օգտվել: Այստեղ օգտակար է երկրորդ բանաձևը.

$$S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n:$$

Այս բանաձևը ստացվում է թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի առաջին բանաձևից, եթե բանաձևում a_n-ը փոխարինենք $a_1+(n-1)d$-ով:

Խնդիրներ.

Խնդիր №1:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա՞ է:

Լուծում:

$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$, $\qquad \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3-4}{12} = -\frac{1}{12}$

Քանի որ $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$, հետևաբար տրված հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա չէ: Պատ.՝ ոչ:

Խնդիր №2:

Օգտվելով թվաբանական պրոգրեսիայի բնութագրիչ հատկությունից՝ ապացուցել, որ 2,6,10,14 հաջորդականությունը կազմում է թվաբանական պրոգրեսիա:

Ապացույց:

$6 = \frac{2+10}{2}$, $10 = \frac{6+14}{2}$: Քանի որ հաջորդականության 2-րդ և 3-րդ անդամները հավասար են իրենց նախորդ և հաջորդ անդամների թվաբանական միջինին, հետևաբար նշված հաջորդականությունը կազմում է թվաբանական պրոգրեսիա:

Խնդիր №3:

Հերթականությամբ գտնել $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայի ևս 4 անդամներ, եթե $a_1=3$,

$d=5$:

Լուծում:

$a_2=a_1+d=3+5=8$,

$a_3=a_2+d=8+5=13$,

$a_4=a_3+d=13+5=18$,

$a_5=a_4+d=18+5=23$:   Պատ.՝ 8; 13; 18; 23:

Խնդիր 4:

Գտնել x-ը, եթե 8,x,14 հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է:

Լուծում:

Օգտվելով թվաբանական պրոգրեսիայի բնութագրիչ հատկությունից՝ կարող ենք գրել.

$x = \frac{8+14}{2}=11$:   Պատ.՝ 11:

Խնդիր 5:

Գտնել 3,7; 2,2; … թվաբանական պրոգրեսիայի քսանհինգերորդ անդամը:

Լուծում:

$a_1=3,7$,

$d= a_2-a_1=2,2-3,7=-1,5$,

$a_{25}= a_1+24d=3,7+24\cdot(-1,5)=3,7-36=-32,3$: Պատ.՝ -32,3:

Խնդիր 6:

Գտնել $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը, եթե $a_1=7$, $a_9=11$:

Լուծում:

$a_9= a_1+8d$

$11=7+8d$

$4=8d$

$d=\frac{1}{2}$ Պատ.՝ $\frac{1}{2}$:

Խնդիր 7:

Գտնել $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին անդամը, եթե $a_{15}=68$, $d=4$:

Լուծում:

$a_{15}= a_1+14d$

$68= a_1+14\cdot4$

$68= a_1+56$

$a_1=12$ Պատ.՝ 12:

Խնդիր 8:

2 և 4 թվերի միջև գրել երեք այնպիսի թվեր, որոնք տրված թվերի հետ թվաբանական պրոգրեսիա կազմեն:

Լուծում:

2, a_2, a_3, a_4, 4 թվաբանական պրոգրեսիայում

$a_5= a_1 +4d$

4=2+4d

d=$\frac{1}{2}$

a_2= a_1+d=2+$\frac{1}{2}$ =2$\frac{1}{2}$

a_3= a_2+d=2$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{2}$ =3

a_4= a_3+d=3+$\frac{1}{2}$ =3$\frac{1}{2}$

Պատ.՝ 2; 2$\frac{1}{2}$; 3; 3$\frac{1}{2}$; 4:

Խնդիր 9:

{ a_n} թվաբանական պրոգրեսիայում տրված է՝ a_{23}=-26, a_{18}+ a_4=20: Գտնել a_7 -ը:

Լուծում:

a_7= a_1+6d,

a_7-ը գտնելու համար նախ գտնենք a_1-ը և d-ն:

$$\begin{cases} a_{23} = -26 \\ a_{18} + a_4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 22d = -26 \\ (a_1 + 17d) + (a_1 + 3d) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 22d = -26 \\ 2a_1 + 20d = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 22d = -26 \\ a_1 + 10d = 10 \end{cases}$$

Համակարգի առաջին հավասարությունից հանելով երկրորդը, կստանանք՝

12d=-36, որտեղից՝ d=-3:

d-ի արժեքը տեղադրելով համակարգի երկրորդ հավասարության մեջ, կստանանք՝

a_1+10•(-3)=10

a_1=40

a_7=40+6•(-3)=22 Պատ.՝ 22:

Խնդիր 10:

{ a_n} թվաբանական պրոգրեսիայում տրված է՝ a_3=-7, a_2+ a_7=-13: Գտնել նրա ամենամեծ բացասական անդամը:

Լուծում:

$$\begin{cases} a_3 = -7 \\ a_2 + a_7 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = -7 \\ (a_1 + d) + (a_1 + 6d) = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = -7 \\ 2a_1 + 7d = -13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2d - 7 \\ -4d - 14 + 7d = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2d - 7 \\ 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2d - 7 \\ d = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -7\frac{2}{3} \\ d = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$a_n = a_1+(n-1)d$, բայց ունենք՝ $a_n<0$, այսինքն՝ $a_1+(n-1)d<0$, ուստի՝ $-7\frac{2}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}<0$, որտեղից

$n<24$, բայց $n\in N$, հետևաբար $n=1,2,3,\dots,23$ դեպքում $a_n<0$ և քանի որ $d = \frac{1}{3} >0$, ուրեմն՝

$a_1< a_2< a_3<\dots< a_{23}<0$, իսկ a_{24}-ը փոքր չէ 0-ից: Հետևաբար ամենամեծ բացասական անդամը a_{23}-ն է:

$a_{23}= a_1+22d=-7\frac{2}{3}+22\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$ Պատ.՝ $-\frac{1}{3}$:

Խնդիր 11:

$\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայում $a_1=1$, $a_{20}=20$: Գտնել S_{20}-ը:

Լուծում:

$S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot20 = \frac{1+20}{2}\cdot20 = 210$ Պատ.՝ 210:

Խնդիր 12:

$\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայում՝ $a_1=-2$, $d=4$: Գտնել S_{11}-ը:

Լուծում:

$S_{11}= \frac{2a_1+10d}{2}\cdot11=\frac{2\cdot(-2)+10\cdot4}{2}.11 = 198$ Պատ.՝ 198:

Խնդիր 13:

$\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայում՝ $a_9=2$: Գտնել S_{17}-ը:

Լուծում:

$a_9=2$, հետևաբար՝ $a_1 +8d=2$,

$S_{17}=\frac{2a_1+16d}{2}\cdot 17=(a_1+8d)\cdot 17=2\cdot 17=34$ Պատ.՝ 34:

Խնդիր 14:

Հաշվել գումարը.

30+31+32+…+38+39+40:

Լուծում:

Նշված գումարը 30,31,32,…,38,39,40 թվաբանական պրոգրեսիայի 11 անդամների գումարն է, որտեղ $a_1=30$, $d=1$: Հետևաբար՝

$30+31+32+\ldots+38+39+40=\frac{2a_1+10d}{2}\cdot 11=\frac{2\cdot 30+10\cdot 1}{2}\cdot 11=385$ Պատ.՝ 385:

Խնդիր 15:

Գտնել առաջին 40 զույգ թվերի գումարը:

Լուծում:

Խոսքը $a_n=2n$, որտեղ $n\in N$ բանաձևով տրված թվաբանական պրոգրեսիայի մասին է: Պարզ է, որ $a_1=2$, $n=40$, $a_{40}=80$: Հետևաբար՝

$S_{40}=\frac{a_1+a_{40}}{2}\cdot 40=\frac{2+80}{2}\cdot 40=1640$ Պատ.՝1640:

Խնդիր 16:

Գտնել բոլոր եռանիշ թվերի գումարը:

Լուծում:

Եռանիշ թվերն են՝ 100,101,…,999: Նշված հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է, որտեղ $a_1=100$, $d=1$, $a_n=999$:

$a_1+(n-1)d=999$, որտեղից՝ $n=900$: Այսպիսով, եռանիշ թվերի քանակը 900 է:

$S_{900}=\frac{2a_1+899d}{2}\cdot 900=\frac{2\cdot 100+899\cdot 1}{2}\cdot 900=494550$ Պատ.՝494550:

Եզրակացություն

Առավել մանրամասն փորձեցինք ներկայացնել թվաբանական պրոգրեսիան՝ իր հիմնական հատկություններով և կիրառական բնույթի խնդիրներով:

Գրականություն

1. Ս. Մ. Նիկոլսկի և ուրիշներ Հանրահաշիվ-9 Երևան «Անտարես» 2013թ.
2. Հ. Ս. Միքայելյան Հանրահաշիվ-9 Երևան Էդիթ Պրինտ 2008թ.
3. Նիկիտա Պողոսյան «Սովորենք մաթեմատիկա» օժանդակ ձեռնարկ V-IX դասարաններ Երևան ԼԻՄՈՒՇ հրատարակչություն 2008թ.
4. Մաթեմատիկայի խնդիրների շտեմարան Երևան «Անտարես» 2009թ.