ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Թեմա՝ Կոմբինատորիկան մեր շուրջը և դպրոցում:

Կատարող՝ Շողակաթ Բաբայան

Դպրոց՝ Երևանի հ.50 հիմնական դպրոց ՊՈԱԿ

Առարկա՝ Մաթեմատիկա

Կազմակերպություն՝ Երևանի Լեոյի անվան հ.65 ավագ դպրոց ՊՈԱԿ

Խմբի պատասխանատու՝ Ջինա Խաչատրյան

Երևան 2022

Բովանդակություն

Ներածություն

Կոմբինատորիկան դիսկրետ մաթեմատիկայի ամենահին ճյուղերից մեկն է, որը սկիզբ է առել 16-րդ դարից, երբ պատահական խաղերը առանցքային դեր խաղացին հասարակության կյանքում: Այս խաղերի համար տեսություն ապահովելու նպատակով ստեղծվել են հաշվելու հատուկ տեխնիկա և մաթեմատիկական գաղափարներ: Մասնավորապես, Պասկալի և Ֆերմատի աշխատանքը, որոնք ուսումնասիրել են կոմբինատորային խնդիրների տեսությունը, հիմք են դրել հավանականության տեսությանը և տրամադրել մոտեցումներ «թվային կոմբինատորիկայի» զարգացմանը (Աբրամովիչ և Պիպեր, 1996):

Կոմբինատորիկան կարող է սահմանվել որպես հաշվարկման սկզբունք, որը ներառում է օբյեկտների ընտրություն և դասավորություն վերջավոր բազմության մեջ: Կոմբինատորիկան մաթեմատիկայի ուսումնական ծրագրի կարևոր բաղադրիչն է, որը ներառում է հզոր սկզբունքների հարուստ կառուցվածք, որոնք ընկած են մի շարք այլ ոլորտների հիմքում, ինչպիսիք են հաշվումը և հավանականությունը (Borovcnik & Peard, 1996; English, 1993):

Դպրոցական մաթեմատիկայի ուսումնական ծրագրում կոմբինատորիկան ներառելու վերաբերյալ առաջարկությունները սկսվում են 1970-ականների սկզբից (օրինակ՝ Կապուր, 1970; Քեննի և Հիրշ, 1991; Մաթեմատիկայի ուսուցիչների ազգային խորհուրդ [NCTM], 1989): Դպրոցական մաթեմատիկայի ստանդարտների հանձնաժողովի աշխատանքային խումբը (K-4) (NCTM, 1986) ընդգրկեց կոմբինատորիկան որպես ուսումնական պլանի մշակման իր երկու թեմաների ուսումնասիրության ոլորտ, որոնք էին «Պատկերացումների մոդելների կառուցման ուղիները» և «Հաշվի/հաշվարկի ուղիները»: Այս առաջարկությունից շատ չանցած եկավ 1991թ. NCTM Տարեգիրքը, որը վերնագրված էր «Դիսկրետ մաթեմատիկա ամբողջ ուսումնական պլանում», K-12 (Kenny & Hirsch), որտեղ մի քանի գլուխներ նվիրված էին կոմբինատորիկայի ուսուցմանը հատկապես միջին և միջնակարգ դպրոցական տարիներին:

Չնայած իր կարևորությանը մաթեմատիկայի ուսումնական ծրագրում, կոմբինատորիկան շարունակում է անտեսված մնալ, հատկապես տարրական դպրոցի մակարդակում:

Այդուհանդերձ, ինչպես Կապուրը (1970) նշել է ավելի քան 30 տարի առաջ, տիրույթի իրական բնույթը կոմբինատորիկան դարձնում է բոլոր դասարանների մակարդակներում ուսումնասիրելու համար հարմար: Իրոք, կոմբինատորիկան հիմք է տալիս բովանդակալից խնդիրների լուծմանը տարբեր ձևերով և ներկայացման տարբեր գործիքներով:

Կոմբինատոր խնդիրները նաև նպաստում են թվային գործընթացների, ինչպես նաև ենթադրությունների, ընդհանրացումների և համակարգված մտածողության զարգացմանը: Հարաբերությունների, համարժեքության դասերի, քարտեզագրման և ֆունկցիաների կարևոր հասկացությունների զարգացումը նույնպես նպաստվում է կոմբինատոր գործողությունների միջոցով: Ավելին, հաշվի առնելով կոմբինատորային տիրույթի լայն կիրառելիությունը (օրինակ՝ քիմիա, կենսաբանություն, ֆիզիկա), սովորողների համար կարող են ստեղծվել միջառարկայական խնդիրներ իրական աշխարհի համատեքստում:

Աշխատանքում ներառված են Սուսաննա Վասկասի[1], Բերտա Բարկերոյի[2], Մարիաննա Բոշի[3] համատեղ հետազոտությունն ու արդյունքները՝ «Սովորել և սովորեցնել կոմբինատորիկան միջնակարգ դպրոցում» հոդվածից, ինչպես նաև Լին Դ.Ենգլիշի[4] «Կոմբինատորիկա և երեխաների համակցված դատողության զարգացում» աշխատանքից:

<u>Նպատակը</u> - Այս թեմայի ուսումնասիրության նպատակն է՝ ուսումնասիրել, հետզոտել, սովորել կոմբինատոր մտածողության ձևերը և դրանց փոխանցման, ուսուցանման մեթոդները: Պատասխանել հետևյալ հարցին. Ինչպե՞ս անել, որ սովորողները առաջադրված խնդիրները մոդելավորեն, հեշտությամբ հաղթահարեն դժվարությունները և հաճույք ստանան հաղթահարման գործընթացում: Ինչպե՞ս կարող է մոդելավորման այս հեռանկարն օգնել նախագծել, իրականացնել և վերլուծել միջնակարգ դպրոցում կոմբինատորիկայի վերաբերյալ ուսուցման առաջարկը:

<u>Արդիականությունը</u> – Ժամանակակից մարդու փոխարեն ավտոմատացված սարքերը անում են ավելին քան պետք է, և մարդուն մնում է մի քանի կարևորագույն ֆունկցիաներ, որոնք գոնե այս փուլում անփոխարինելի են, դրանցից է մտածողությունը: Քանի որ կոմբինատորիկան նպաստում է թվային գործընթացների, ենթադրությունների, ընդհանրացումների և համակարգված մտածողության զարգացմանը, հարաբերությունների, համարժեքության դասերի, քարտեզագրման և ֆունկցիաների կարևոր հասկացությունների զարգացմանը , ապա կարող ենք ունենալ մտքերի արտադրության, գեներացման, համակարգման մեծ պոտենցիալ, որը կնպաստի թե՛ անհատի, թե՛ պետության զարգացմանն ու հզորացմանը: Իսկ այս ամենին հասնելու համար երեխաներին ավելի վաղ հասակից է պետք նման մտածողության զարգացմանը վարժեցնել:

[1] https://orcid.org/0000-0002-4480-5324
[2] https://orcid.org/0000-0001-7228-6210
[3] https://orcid.org/0000-0001-9756-116X
[4] https://www.researchgate.net/profile/Lyn-English

Գլուխ 1: Կոմբինատորիալ խնդիրներ

Այս խնդիրների տեսակները՝ հաշվի առնելով խնդիրների առավել տարածված տեսակները, ներառյալ տարրական դպրոցի աշակերտների համար հարմարները, ներառում են հետևյալը.

- Խնդիրներ, որոնք արտացոլում են հաշվման հիմնարար սկզբունքը և որոնք օգտագործում են ***ծառի դիագրամներ***, ***համակարգված ցուցակներ*** և ***աղյուսակներ***.

– Համակցված կոնֆիգուրացիաներ[5], որոնք ներառում են

(ա) ընտրություն,

(բ) բաշխում և

(գ) բաժանումներ:

Հաշվառման հիմնարար սկզբունք

– Վազաչափի ռազմավարության կիրառումը նպաստում է այլընտրանքային լուծումների համակարգված փորձարկում պահանջող խնդիրների ավելի արդյունավետ լուծմանը:

Ընտրություններ

Կոմբինատորական խնդիրների դասակարգումը որպես «ընտրություններ» ընդգծում է ընտրանքի հայեցակարգը: Այս բնույթի խնդիրներում y օբյեկտների նմուշը պետք է վերցվի x (սովորաբար տարբեր) օբյեկտների մի շարքից:

Ստորև բերված տիպի օրինակները կարևոր են հավանականության վաղ պատկերացումները զարգացնելու համար: Ստորև բերված խնդիրը հեշտությամբ կարող է փոխվել, որպեսզի յուրաքանչյուր օբյեկտ ընտրվի միայն մեկ անգամ (այսինքն՝ ընտրություն առանց փոխարինման):

– Սեմն ունի պայուսակ, որը պարունակում է չորս համարակալված մարմարներ, որոնցից յուրաքանչյուրը ցույց է տալիս այս թվանշաններից մեկը՝ 4, 6, 8 և 1: Նա խնդրում է իր ընկերոջը պայուսակից ընտրել մարմար և գրել դրա համարը: Հետո նա ընկերոջն ասում է, որ մարմարը նորից դնի տոպրակի մեջ: Նրա ընկերը կրկնում է այս գործընթացը այնքան ժամանակ, քանի դեռ չի կազմել 3 թվանշան: Քանի՞ տարբեր եռանիշ թվեր կարող է կազմել նրա ընկերը:

Բաշխումներ

Այս կատեգորիային պատկանող խնդիրները ներառում են n օբյեկտների բազմության բաշխումը m բջիջներում ինչպես հետևյալ օրինակում.

[5] (Batanero, Navarro-Pelayo, et al., 1997; Dubois, 1984)

– Կառլան ունի երեք նույնական ծննդյան հրավերներ և ունի չորս տարբեր գույների ծրարներ, որոնց մեջ կարող է դրանք դնել: Նա չի կարող մեկից ավելի հրավերներ տեղադրել մեկ ծրարի մեջ: Քանի՞ ձևով կարող է նա տեղադրել երեք հրավերները ծրարների մեջ:

Վերոնշյալ տիպի խնդիրների դեպքում պայմանները կարող են փոխվել՝ առաջացնելու բաշխման այլ իրավիճակներ, օրինակ՝ բաշխվող իրերը նույնական են, թե ոչ, բեռնարկղերը նույնական են, թե ոչ, ապրանքները պետք է պատվիրվեն և այլն:

Միջնորմներ

Բաժանման խնդիրները ենթադրում են n օբյեկտների մի շարք m ենթաբազմությունների բաժանում, ինչը, ինչպես Բատաներոն, Նավարո-Պելայոն և այլն (1997) ցույց է տալիս, երկակի (կամ մեկ առ մեկ) համապատասխանության մեջ է բաշխման խնդիրների հետ: Բաժանման խնդիրն ունի հետևյալ ձևը.

– Ջեյմսն ունի 6 պահեստային դրոշի կպչուն պիտակներ, որոնց վրա պատկերված են Ավստրալիան, ԱՄՆ-ը, Ֆրանսիան, Իտալիան, Նիդեռլանդները և Նոր Զելանդիան: Նա որոշում է այս դրոշները կիսել իր երկու ընկերների՝ Սամանթայի և Փենիի միջև: Քանի՞ ձևով նա կարող էր կիսել դրոշները /անունները՝ ինչպես բնագրում է/:

Կոմբինատորային կոնֆիգուրացիաների դժվարությունը կախված է կոմբինատոր գործողությունների տեսակից և միավորվող տարրերի բնույթից: Ինչ վերաբերում է կոմբինատոր գործողություններին, մենք կարող ենք տարբերակել դասավորությունները, փոխարկումները և համակցությունները՝ կախված հաշվված տարրերի քանակից և արդյոք կարևոր է հերթականությունը: Միավորվող տարրերը սովորաբար թվանշաններ, տառեր կամ առարկաներ են, ի թիվս այլոց:

Այնուամենայնիվ, ինչպես ընդգծել է Լոքվուդը (2013), կոմբինատորական կրթության վերաբերյալ գրականությունը այնքան էլ զարգացած չէ և դեռ չի անդրադարձել այնպիսի մտածողության ձևերին, որը հնարավորություն կտա հետազոտողներին և մանկավարժներին հասկանալ, թե ինչպես են սովորողները պատկերացնում հաշվելու խնդիրները:

Գլուխ 2: «Ուսումնասիրության և հետազոտության ուղիների» (ՈՒՀՈՒ) մոդելը:

Հետազոտությունը հիմնված է Դիդակտիկի մարդաբանական տեսության (ԴՄՏ) և մաթեմատիկական մոդելավորման հայեցակարգի վրա: ԴՄՏ-ն մոտենում է ուսուցման և հետազոտման երևույթներին ինչպես իմացաբանական (վերլուծության կենտրոնում դնելով ուսուցանվելիք և սովորելու գիտելիքները) այնպես էլ ինստիտուցիոնալ (մաթեմատիկան դիտարկելով որպես մարդկային գործունեություն, որն իրականացվում է տարբեր սոցիալական միջավայրերում):

Հետազոտության համար օգտագործվել է մոդելավորման պրաքսեոլոգիա[6] հասկացությունը և այսպես կոչված «***Ուսումնասիրության և հետազոտության ուղիների***» (ՈՒՀՈՒ) առաջարկը մաթեմատիկական մոդելավորման ուսուցման և հետազոտման համար:

<u>ՈՒՀՈՒ-ն սկսվում է գեներացնող հարցից, թե ո՞ր կողպեքն է (մի քանիսներից) ավելի անվտանգ:</u>

Հետազոտությունը իրականացվել է Իսպանիայի Բարսելոնա քաղաքի կատալոնական դպրոցում՝ 10-րդ դասարանի աշակերտների հետ, որն ունի կրթական նորարարության երկար փորձ: Առանձնացվել է մոդելավորման երկու փուլ.

Նախ, նայում ենք կոմբինատորիկայի դերին մոդելավորման գործընթացում, որն առաջացել է սկզբնական կողպեքների խնդրահարույց իրավիճակից: Համարում ենք, որ սովորողների կողմից մոդելների կառուցումը ներկայացնում է նրանց ուսումնասիրությունները կողպեքների հետ փոխազդեցության միջոցով՝ ընդգծելով փոփոխականների անվանման և սահմանման կարևորությունը և փոխհարաբերությունները, որոնք օգտագործվում են կողպեքների տեսակները բնութագրելու համար:

Երկրորդ, վերլուծում ենք, թե ինչպես են սովորողները նմանակում և վավերացնում այս տարրական կոմբինատոր մոդելները՝ նախքան դրանք ընդհանրացնելը՝ կողպեքներից դուրս այլ համակարգեր ուսումնասիրելու համար:

Առաջարկում ենք ՈՒՀՈՒ, որը սկսվում է գեներացնող հարցից, թե ***<u>որքա՞ն ժամանակ կպահանջվի որոշակի տեսակի կողպեքներ բացելու համար:</u>***

[6] հին հունարեն՝ πράξις *«գործունեություն»* և λογία *«գիտություն»*

Չնայած մոդելավորման գործունեության հայեցակարգերի բազմազանությանը (Barquero, Bosch, & Wozniak, 2019; Perrenet & Zwaneveld, 2012), մոդելավորման գործընթացի և տարբեր քայլերով դրա տարրալուծման վերաբերյալ համատարած կոնսենսուս կա՝ սինթեզված մոդելավորման ցիկլերի տարբեր օրինակներում: Շատ մոդելավորման ցիկլեր կարելի է գտնել գրականության[7] մեջ՝ տարբեր մոտեցումներով: Նրանք հատկապես օգտակար են ճանաչողական գործընթացները վերլուծելու համար, որոնց հետևում են սովորողները՝ մոդելավորման գործողությունները լուծելիս, ուսումնասիրելիս, թե ինչ է տեղի ունենում մոդելավորման գործընթացի յուրաքանչյուր քայլում, ինչպես նաև ուսումնասիրել սովորողների կամ ուսուցիչների հետևած ուղիները և նախագծել նոր մոդելային գործողություններ:

ԴՄՏ-ի դեպքում մոդելավորումը կապված է մաթեմատիկական գործունեության հասկացության հետ՝ ենթադրելով, որ մաթեմատիկա վարելը հիմնականում բաղկացած է մաթեմատիկական մոդելների արտադրությունից, վերափոխումից, մեկնաբանությունից և մշակումից (Chevallard, 1989; García et al., 2006):

Մի կողմից, մաթեմատիկական գործունեությունը, ինչպես ցանկացած այլ մարդկային գործունեություն, նկարագրվում է պրաքսեոլոգիաների տեսանկյունից, որոնք ԴՄՏ-ի կողմից առաջարկված առաջնային գործիքն են՝ ինստիտուցիոնալ միջավայրում գիտելիքներին և գործունեությանը մոտենալու համար (Chevallard, 1999):

Պրաքսեոլոգիան մի ամբողջություն է, որը ձևավորվում է պրակտիկայի՝ նոու-հաուի[8] կամ անելու եղանակների և լոգոների՝ պրակտիկայի մասին կազմակերպված դիսկուրսի համակցությամբ: Պրաքսիսի բլոկը պարունակում է առաջադրանքների տեսակներ և առաջադրանքների կատարման տեխնիկայի մի շարք, մինչդեռ լոգոների բլոկը ներառում է տեխնոլոգիա (խոսակցություն տեխնիկայի մասին) և տեխնոլոգիան արդարացնելու տեսություն: Այս քառյակը տրամադրում է մարդկային գործունեության միասնական տեսլական՝ չտարանջատելով ***«անելն» «անելու մասին մտածելուց և պատմելուց»***:

Մյուս կողմից, ԴՄՏ-ն առաջարկում է մոդելավորման լայն հասկացություն՝ գիտելիքի արտադրությունը նկարագրելու համար (Chevallard, 1989): Երկու հիմնական տարրերը համակարգ և մոդել հասկացություններն են, որոնք ավելի շատ գործառույթ են ներկայացնում, քան սուբյեկտ:

[7] օրինակ՝ Blum & Leiß, 2007; Borromeo Ferri, 2007; Galbraith & Stillman, 2006; Kaiser & Sriraman, 2006; Niss & Blum, 2020
[8] know-how - Գիտեմ ինչպես, տերմին, որը միջազգային հարաբերություններում օգտագործվում է փաստագրված տեխնիկական գիտելիքները, փորձը, նորությունները մի այլ երկիր փոխանցելու պարտավորությունը նշելու նպատակով:

<u>Մոդելը</u> մի բան է, որը մարդը համարում կամ մշակում է համակարգի մասին տեղեկատվություն ստանալու համար: Օրինակ, կոտորակը կարող է օգտագործվել որպես օբյեկտների որոշակի համամասնության մոդել (կատարելով համակարգի դեր): Այնուամենայնիվ, այն կարելի է համարել նաև համակարգ, որը պետք է մոդելավորվի մեկ այլ մոդելով, ինչպիսին է հավասարումը կամ հանրահաշվական արտահայտությունը: Այս ընդհանուր հայեցակարգում և՛ մոդելները, և՛ համակարգերը կարող են լինել ***մաթեմատիկական*** կամ ***արտամաթեմատիկական***: Դա կախված է նրանից, թե ինչպես են դրանք օգտագործվում և ինչպես է դրանք դիտարկվում: Նրանց դերը նույնպես կարելի է փոխանակել:

Այժմ արտամաթեմատիկական մոդելն է, որն օգնում է մեզ նոր գիտելիքներ ստանալ մաթեմատիկական համակարգի մասին: Այս իրավիճակը շատ տարածված է դպրոցում, օրինակ՝ բացասական թվեր սովորեցնելիս՝ օգտագործելով վերելակներ, պարտքեր և ջերմաստիճան:

Ինչպես մյուս մոտեցումներում, մոդելավորման գործընթացը ներառում է տարբեր փուլեր, ինչպիսիք են.

- *ուսումնասիրվող համակարգի սահմանազատումը,*
- *մոդելի կառուցումը,*
- *մոդելի հետ աշխատելը համակարգի մասին տեղեկատվություն ստանալու համար*
- *և վերադարձը համակարգ՝ ստացված արդյունքները մեկնաբանելու, վավերացնելու և ընդլայնելու համար:*

Այն դառնում է կրկնվող գործընթաց, երբ մոդելի բերած տեղեկատվությունը նոր հարցեր է դնում սկզբնական համակարգի, մոդելի վավերականության կամ համակարգի և մոդելի միջև փոխհարաբերությունների վերաբերյալ:

Այստեղ ներկայացվում է մոդելավորման նախագծի օրինակ տարբեր տեսակի կողպեքների անվտանգության վերաբերյալ, մասնավորապես՝ կապված յուրաքանչյուր կողպեքի բացման համար պահանջվող ժամանակի հետ: Մենք օգտագործում ենք ԴՄՏ-ում առաջարկված դիդակտիկ սարք՝ կրթական նպատակներով հարցումների գործընթացներ նախագծելու և իրականացնելու համար, որոնք կոչվում են ուսումնական և հետազոտական ուղիներ (ՈՒՀՈՒ)[9]:

Ինչպես բացատրվում է ավելի ուշ, ՈՒՀՈՒ-ն նպատակ ունի տրամադրել կամ մշակել բաց հարցի պատասխանը հարցման գործընթացի միջոցով:

---

[9] Bosch, 2018; Chevallard, 2015

Այս գործընթացը (կամ «ուղին») ներառում է ծագած հարցերի բարձրացում, արդեն հասանելի պատասխանների կամ գիտելիքների գործիքների որոնում, գիտելիքի մոբիլիզացում և այլ տեսակի ռեսուրսներ՝ գտնված տեղեկատվությունը վավերացնելու, հարմարեցնելու և զարգացնելու համար:

Մեր հետազոտության մեթոդաբանությունը համապատասխանում է դիդակտիկ ինժեներական գործընթացին (Barquero & Bosch, 2015), որը կառուցված է չորս քայլով:

- Նախ՝ մատնանշելու դիդակտիկ երևույթների բացահայտում: Մեր դեպքում դրանք համապատասխանում են Իսպանիայում միջնակարգ մակարդակում կոմբինատորիկայի ներկայիս դասավանդման ֆորմալ բնույթին (Roa et al., 2003):
- Երկրորդ քայլը վերաբերում է տվյալ ուսուցման առաջարկի տեսական վերլուծությանը որոշակի պայմաններում. այստեղ, կողպեքների անվտանգության մասին ՈՒՀՈՒ-ի նախագծումը որպես համապատասխան նախնական համակարգ՝ հիմնավորելու և զարգացնելու կոմբինատորիկան որպես մոդելավորման գործիք:
- ՈՒՀՈՒ-ի իրականացումը հանդես է գալիս որպես երրորդ քայլ կամ բնական վերլուծություն՝ իրականացվող դիդակտիկ գործընթացի վերաբերյալ տեղեկատվություն և ապացույցներ հավաքելու համար:
- Վերջապես, չորրորդ քայլը համապատասխանում է հետին վերլուծությանը, որը վերաբերում է ՊԵԿ-ի գործարկման համար ստեղծված պայմաններին, դրա նախագծմանը և վտանգված դիդակտիկ երևույթներին:

ՈՒՀՈՒ մեթոդաբանությունը նոր էր սովորողների համար. և ուսումնասիրման նպատակով ընտրվել է աշակերտակենտրոն մանկավարժության երկար ավանդույթ ունեցող դպրոց, որտեղ 1-ին դասարանից աշակերտները սովորել են տարբեր տեսակի նորարարական ուսումնական առաջարկներ, ինչպիսիք են՝ ***<u>նախագծային ուսուցումը</u>***, ***<u>համագործակցային աշխատանքը</u>***, ***<u>մետաճանաչողական</u>***[10] ***<u>հմտությունները զարգացնելու ռազմավարությունները</u>*** և ***<u>թվային գործիքների օգտագործումը</u>***:

Ըստ ուսուցիչների, 2020-2021 ուսումնական տարում 10-րդ դասարանի աշակերտները համեմատաբար միատարր են եղել լավ գնահատականներով, նրանք աշխատում էին համագործակցային թիմերում և ունեին ուժեղ ինքնավար աշխատանքային հմտություններ,

[10] **Մետաճանաչում** «ճանաչողության մասին ճանաչողություն», «մտածելու մասին մտածելը», «իմանալը իմանալը», «իրազեկվածության մասին իրազեկ դառնալը» և ավելի բարձր կարգի մտածողության հմտությունները: Տերմինը ծագել է meta բառից, որը նշանակում է «անդուր», կամ «վերևում»:

նախատրամադրվածություն և մոտիվացիա: Այս պատճառներով ուսուցիչները համակարծիք են, որ դասարանի կառավարումը, ընդհանուր առմամբ, արգելք չէ:

Ինչ վերաբերում է իրենց նախնական գիտելիքներին, ապա այս սովորողները նախորդ տարում կատարել են միայն մեկ գործունեություն՝ կապված կոմբինատորիկայի հետ։ Այս հետազոտության ընթացքում նրանք բախվեցին մի պարզ հաշվելու դեպքի, որտեղ ձեռքով հաշվեցին համակցությունների ընդհանուր թիվը:

Գլուխ 3: ՌԻՀՌԻ-ի տեսական եզրակացության ձևավորում՝ կողպեքները որպես մոդել կիրառելիս:

ՌԻՀՌԻ-ի առաջին նախագծումը սկսվեց գեներացնող հարցից.

Որքա՞ն ժամանակ կպահանջվի որոշ կողպեքներ բացելու համար:

Այս հարցը ներկայացնելու համար օգտագործվեցին հինգ տարբեր կողպեքներ, և սովորողներն արագորեն նկարագրեցին կողպեքի յուրաքանչյուր տեսակի բացման հնարավոր համակցությունների քանակը: Երկրորդ ներկայացման ժամանակ գեներացնող հարցի ձևակերպումն ավելի լայն էր.

Ո՞ր կողպեքն է ավելի ապահով:

Այս երկրորդ ձևակերպումը նպատակ ուներ թույլ տալ սովորողներին ինքնուրույն որոշել՝ նայելու, թե յուրաքանչյուր կողպեք քանի համակցություն ունի՝ համեմատելու յուրաքանչյուր կողպեքի անվտանգությունը: Ավելին, մենք նաև ակնկալում էինք, որ սովորողները կփնտրեն կողպեքների այլ հատկանիշներ և կհարցնեն նրանց ֆիզիկական հատկությունների ու ուժերի մասին:

#1 #2 #3 #4 #5

Նկ.1

1, 3 և 4 համարի կողպեքները ունեն նմանատիպ գործունակություն, կոմբինացիաների թվանշանները կարող են ներմուծվել որոշ անիվների պտտման միջոցով: Սկսենք նրանից, որ ***<u>կողպեք 1-ը</u>*** թույլ է տալիս 4 թվանշանների ցանկացած համադրություն, այլ կերպ ասած՝ մենք կարող ենք ներկայացնել ցանկացած թիվ 0000-ից մինչև 9999, ուստի հնարավոր է 10000 համակցություն: ***<u>Կողպեք 3-ն</u>*** աշխատում է նույն կերպ, մենք կարող ենք ներկայացնել ցանկացած ամսաթիվ 00-ՀՈՒՆ-00-ից մինչև 39-ԴԵԿ-99-ը (կողպեքը չի ճանաչում ամսաթիվը իրական է, թե ոչ), ուստի հնարավոր է 40·12·100 համակցությունները: Վերջապես, ***<u>կողպեք 4-ն</u>*** ունի նույն մեխանիզմը, ինչ կողպեք 1-ը, բայց ունի 5 բջիջ: Ցանկացած բջիջում մենք կարող ենք ներմուծել 10 տարբեր տառեր, որոնք տալիս են 100000 հնարավոր համակցություններ, քանի որ կողպեքը չի ճանաչում ստեղծված բառը, արդյոք որևէ նշանակություն ունի թե ոչ:

Կողպեք 2-ը տարբերվում է նախորդներից: Այն չունի անիվներ, այլ ունի կոճակներ: Այն բացվում է, երբ սեղմվում են ճիշտ երեք կոճակները: Երբ համարը սեղմվում է, այն մնում է ակտիվ, մինչև այն իրվի կողպեքի հետնի կողմից: Հետևաբար, այս դեպքում թվերը չեն կարող կրկնվել, և կոճակների ակտիվացման հերթականությունը չի ազդում վերջնական համադրության վրա: Այնուհետեւ, այս կողպեքն ունի $\binom{10}{3}$ տարբեր համակցություններ:

Վերջապես, ***կողպեք 5-ը*** հագեցած է հավաքիչով, որը թույլ է տալիս ընտրել չորս հնարավոր ուղղություններ (վերև, վար, ձախ և աջ): Ճիշտ գաղտնաբառը այս ուղղություններից չորսի համադրություն է, որը հնարավորություն է տալիս կրկնել: Այս կողպեքն իրականում շատ նման է #1, #3 և #4 կողպեքներին, բայց անիվների փոխարեն հավաքատեղով: Այն ունի $4^4 = 256$ հնարավոր համակցություններ:

Առաջին փուլում սովորողներից ակնկալվում էր, որ պատասխանեն հարցերին.

- Քանի՞ համակցություն ունի յուրաքանչյուր կողպեքը:
- Ի՞նչ ռազմավարություններ կարող են օգտագործվել դրանք հաշվելու համար:

Նրանցից ակնկալվում էր, որ որոշ տեխնիկա կկիրառեն համակարգը հասկանալու համար: Մասնավորապես

(1)յուրաքանչյուր կողպեքի համար հնարավոր կոդերի կամ համակցությունների ցանկը (օրինակ՝ դրանք ձեռքով գրել կամ Excel-ի միջոցով);

(2)նախնական ցուցակ կազմելը հնարավոր կոդերի օրինակով և օգտագործելով թվաբանական հաշվարկներ՝ ընդհանուր հաշվարկը հեշտացնելու համար.

(3)օգտագործելով նախահանրահաշվական նկարագրությունը՝ համակցությունների ընդհանուր թիվը հաշվարկելու համար:

Մենք համարում ենք, որ այս սկզբնական տեխնիկայի հիմնավորումը հիմնված է բոլոր հնարավոր համակցությունների ընտրանքային տարածությունը նկարագրելու անհրաժեշտության վրա՝ նախքան ընդհանուր հաշվարկը:

Այս առաջին փուլում կարևոր է, որ երբ սովորողները գուշակեն կոդերի ընդհանուր թիվը, նրանք բացատրեն օգտագործված տեխնիկան ու մոդելները և հիմնավորեն դրանց օգտագործումն ու ստացված պատասխանը, իսկ ուսուցիչը չի լինի միակ պատասխանատուն իրենց պատասխանների վավերացման համար, քանի որ սովորողները կարող են ձեռքով ստուգել՝ օգտագործելով կողպեքները՝ բոլոր հնարավոր համակցությունները մոդելավորելու համար:

Համեմատելով սովորողների կողմից օգտագործվող տարբեր մոդելները, հատկապես ավելի ոչ ֆորմալները, առաջարկում ենք՝ ուսումնասիրել ընդհանուրը հաշվարկելու այլ տեխնիկա՝ առանց ամբողջ ցուցակը մեկ առ մեկ գրելու: Այս փուլում մենք ակնկալում ենք, որ սովորողները կարող են բացահայտել և քննարկել համակարգի կրիտիկական փոփոխականները՝ մոդելավորելու համար: Մասնավորապես՝

- ✓ Ինչպե՞ս անվանել կողպեքի բջիջները և մյուս տարրերը (թվեր, տառեր, նշաններ և այլն):
- ✓ Քանի՞ խորհրդանիշ կարող ենք ունենալ խցում:
- ✓ Կարո՞ղ են տարրերը կրկնվել (թե ոչ):
- ✓ Արդյո՞ք կարևոր է այն հաջորդականությունը, որով մենք մուտքագրում ենք յուրաքանչյուր տարր:

Սրանք ածանցյալ հարցերից մի քանիսն են, որոնք հնարավոր է առաջադրել այս առաջին փուլում:

Երկրորդ փուլում ուսուցիչները չորս նոր կողպեքներ բերեցին՝ նախնական հինգից որոշ տարբերությամբ: Սարքերը նույնն էին, բայց գաղտնաբառի կազմման նոր պայմաններ մտցրեցին.

<u>Կողպեք 6</u>. դա կողպեք 1-ն է, բայց մենք գիտենք, որ ճիշտ գաղտնաբառը չունի կրկնվող համար: Այնուհետև գաղտնաբառերի թիվը 10·9·8·7 է:

<u>Կողպեք 7</u>. դա կողպեք 2-ն է, բայց մենք չգիտենք, թե քանի կոճակ պետք կլինի հրել: Ճիշտ գաղտնաբառը կարող է ունենալ 0-ից 10 ակտիվ կոճակ: Հետևաբար գաղտնաբառերն են $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \cdots + \binom{10}{10} = 2^{10}$:

<u>Կողպեք 8.</u> Դա կողպեք 3-ն է, բայց մենք գիտենք, որ ճիշտ օրն ու տարին է Գաղտնաբառը, որը չունի կրկնվող համար:

<u>Կողպեք 9.</u> Դա կողպեք 5-ն է, բայց մենք գիտենք, որ ճիշտ գաղտնաբառը չունի կրկնվող ուղղություն:

Հիմնական հարցը, որը պետք է ներկայացվի սովորողներին, հետևյալն է. ***Հնարավո՞ր է արդյոք օգտագործել նույն տեսակի հաշվման տեխնիկան՝ գտնելու այս նոր կողպեքներից որևէ մեկի անվտանգության ծածկագրերի ընդհանուր թիվը:***

Այս փուլի հիմնական նպատակն է փորձարկել մոդելավորման տեխնիկայի և դրանից բխող մոդելների վավերականությունը, որոնք դիտարկվել են նախորդ իրավիճակում և հասկանալ նոր կողպեքների փոփոխությունները համակարգում: Ավելին, սա մոդելների շրջանակը քննարկելու միջոց է՝ սովորողներին առաջարկելով ընդլայնված համակարգ: Ինչ-որ առումով, կարելի է ասել, որ այս երկրորդ փուլը նպատակ ունի ամրապնդել մոդելավորման պրաքսեոլոգիան: Երբ փորձում ենք կիրառել սկզբնական տեխնիկան նոր կողպեքների վրա, մենք ակնկալում ենք, որ սովորողները լոգոները ավելի հստակ կդարձնեն (ինչ են նրանք արել, ինչն է այժմ աշխատում և չի աշխատում, ինչու և այլն):

Երբ սովորողները ունենան բոլոր հաշվարկները ինը տարբեր կողպեքների համար (հինգը սահմանափակումներով և չորս նորերով), մենք ակնկալում ենք, որ կհայտնվեն հետևյալ հարցերը.

- Կա՞ն բանաձևեր, որոնք կարող են պարզեցնել համակցությունների ընդհանուր հաշվարկը:
- Արդյո՞ք այս բանաձևերը հատուկ են այն «կողպեքի տեսակին», որը մենք ուզում ենք հասկանալ:

Այնուհետև մենք ակնկալում ենք ***առցանց որոնում*** հնարավոր բանաձևերի համար և դժվարություններ՝ դրանք մեկնաբանելու համար: Այս փուլում ուսուցիչները մի քանի բացատրություններ կտան՝ կոմբինատորիկայի մասին որոշ գիտելիքներ ինստիտուցիոնալացնելու, տերմինաբանությունը միավորելու և օգնելու նրանց տեսնելու կիրառվող տարբեր տեխնիկաների և գտած արդյունքների նմանությունները:

Երրորդ փուլը գալիս է սկզբնական իրավիճակի կարևոր ընդլայնմամբ՝ դուրս գալով կողպեքի սկզբնապես ներկայացված խնդրահարույց փուլից: Այս առումով, նախորդ փուլերում կառուցված բոլոր աշխատանքները այժմ մոդելավորման համակարգի մաս են կազմում: Հարցը, որը պետք է ուղղվի սովորողներին.

Կարո՞ղ ենք օգտագործել նույն բանաձևերը և հաշվելու մեթոդները տարբեր խնդիրներ լուծելու համար, որոնք ներառում են (միայն) կողպեքներ:

Այս փուլը կսկսվի, երբ սովորողները որոնեն տեղեկատվություն «դրսում», այսինքն՝ հնարավոր բանաձևեր, որոնք գոյություն ունեն հնարավոր համակցությունների ընդհանուր թվի համար: Նրանք հավանաբար տեղեկատվություն կգտնեն այլ համատեքստերի մասին, որոնք պահանջում են համակցված գիտելիքներ: Այս փուլում ուսուցիչները նախատեսում են ներկայացնել այլ համատեքստերի ցանկ (գուցե դրանցից մի քանիսը առաջարկված են սովորողների կողմից), իրավիճակների օրինակներով, ներառյալ տարրերի տարբեր համակցությունները, որոնք պետք է հաշվել: Այս փուլում մենք ակնկալում ենք, որ սովորողները վերլուծեն առաջարկված նոր համակարգերը և որոշումներ կայացնեն կոմբինատոր իրավիճակները բնութագրող փոփոխականների արժեքի և օգտագործվող մոդելի վերաբերյալ:

Սովորողները կստեղծեն աղյուսակ, որտեղ կգրառեն բոլոր փորձերի վերջնական արդյուքները, այնքանով ինչքանով կարոացել են հավաքագրել, համակարգել, վերլուծել, ստեղծել: Աղյուսակների մեջ լրացնում են նաև առցանց որոնաումների արդյուքները: Հնարավոր է նաև, որ առցանց որոնված բանաձևերը հարմարեցված էլ լինել, այնքան էլ հասկանալի չլինեն, կամ հակառակը՝ տան ամբողջական պատկերացումներ և հետազոտական արդյուքները համակարգեն սովորողների մտածողության տիրույթում: Այս փուլում ուսուցիչները կարող են որոշակի օգնություն ցուցաբերել՝ հավաքագրման, ամբողջացման և ներկայացման գործընթացներում:

Classification of all padlocks according to the resolution method

Name of the group of padlocks	Padlocks in the group	Calculation of the number of combinations of each padlock	Proposed formula
The raised padlocks	1	10 · 10 · 10 · 10 = 10.000 combinations	n^m n = number of cell elements m = number of cells *unless the number of cell elements is different, we use the multiplication of the number of cell elements (as in padlock 3)
	3*	4 · 10 · 12 · 10 · 10 = 48.000 combinations	
	4	10 · 10 · 10 · 10 · 10 = 100.000 combinations	
	5	4 · 4 · 4 · 4 = 256 combinations	
The dividing padlocks	2	10 · 9 · 8 = 720 / 6 = 120 combinations	**n!** is the number of cell elements multiplied by the next number in descending order. **m!** is the number of cells multiplied by the next number in descending order. $\frac{n!}{m!(n-m)!}$
	7	10 · 9 /1·2 + 10 · 9 · 8/1 · 2 · 3... = 1.013 combinations	
The factorial padlocks	6	10 · 9 · 8 · 7 = 5.040 combinations	n · (n - 1) · (n - 2) · (n - 3) ... n = number of cell elements *unless the number of cell elements does not change (as in padlock 8)
	8*	4 · 9 · 12 · 10 · 9 = 38.880 combinations	
	9	4 · 3 · 2 · 1 = 24 combinations	

Նկ.2 /նկարը հետազոտության արդյունքների բնագրից է, առանց թարգմանության/

Երրորդ փուլ՝ մոդելավորման գործընթացի «ռեկուրսիվություն»:

ՌԻՀՈՒ-ի առաջին երկու փուլերից հետո նախատեսվում էր վարպետության դաս: Ուսուցիչներից յուրաքանչյուրը պատասխանատու էր յուրաքանչյուր խմբին վարպետության դասը ներկայացնելու համար: Նրանք սկսում են վերանայել սովորողների կողպեքների դասակարգումը և վերհիշում տրված բացատրությունները՝ գտնելու համակցությունների քանակը: Այստեղ ուսուցիչները պաշտոնապես հաստատում լուծումները:

Երբ դա արվում է, նրանք հարցնում են.

- Ինչպե՞ս կարող ենք մշակել ընդհանուր տեխնիկա յուրաքանչյուր կողպեքի համար համակցությունների քանակը գտնելու համար:
- Արդյո՞ք նույն տարրերով, բայց տարբեր ձևերով դասավորված երկու համակցությունները հաշվվում են որպես երկու համակցություն, թե միայն մեկ:
- Կարո՞ղ են երկու կամ ավելի տարրեր կրկնվել յուրաքանչյուր համակցության մեջ:
- Քանի՞ բջիջ ունի յուրաքանչյուր համակցություն:
- Քանի՞ տարր կարող ենք տեղադրել յուրաքանչյուր բջիջում:

Ուսուցիչները այդպիսով ինստիտուցիոնալացնում են կոմբինատորիկայի, տեխնիկայի և ընդհանուր բանաձևերի տերմինաբանությունը՝ արագորեն հաշվարկելու համակցությունների քանակը (Նկար 3):

Let m mean the number of cells and n the number of elements in each cell:		
 All combinations allowed	• The order matters • Elements can be repeated • *Variation with repetition*: $VR_{n,m} = n^m$	$VR_{10,4} = 10^4$
 Only combinations without repeated elements	• The order matters • Elements cannot be repeated • *Variation without repetition*: $V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$	$V_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$ $= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$
 Only combinations without repeated elements and $n = m$	• Same case than before but with $n = m$ • *Permutation*: $P_n = n!$	$P_4 = 4!$
 Combinations pressing 3 of 10 numerical keys	• The order does not matter • Elements cannot be repeated • *Combination*: $C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$	$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}$ $= \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3}$

Նկ.3 /նկարը հետազոտության արդյունքների բնագրից է, առանց թարգմանության/

Հետազոտության ավարտին ուսուցիչները սովորողներին առաջարկում են վերանայել իրենց նախկին պատասխանները և դրանք կապել այժմ ինստիտուցիոնալացված դասակարգման և մեթոդների հետ: Նրանք նաև տրամադրում են տիպիկ կոմբինատորական խնդիրների ցանկ տարբեր համատեքստերում: Յուրաքանչյուր կոմբինատորիկայի խնդրի սկզբում նրանք սովորողներին առաջարկում են կապել դրա բնութագրերը և լուծումը ուսումնասիրված կողպեքների տեսակների հետ: Այնուհետև նրանք սովորողներին հարցնում են, թե արդյո՞ք գտել են այլ բանալիները, որոնցում կարող են կիրառել այս նոր բանաձևերը:

Վարպետության դասից հետո սովորողները պատասխանեցին անհատական բազմակի ընտրության թեստին: Այս թեստը պարունակում էր տասը հարց տարբեր կոմբինատորական իրավիճակներով (պաղպաղակի համեր, գունավոր շապիկներ և այլն), բայց միշտ նույն կառուցվածքով. «Քանի՞ տարբեր ձևերով կարող ենք հաշվել…»: Հաջորդ օրը ուսուցիչները տվեցին գնահատականները, իսկ մեկ շաբաթ անց ցանկացող սովորողներին թույլ տվեցին կրկնել նմանատիպ թեստ:

Եզրակացություն

Կոմբինատորիկայի խնդիրները հիմնականում վերաբերում են առարկաների բարդ հավաքածուների հաշվմանը վերաբերող հարցերին: Այս հավաքածուների մոդելավորումը կարևոր քայլ է դրանք լուծելու համար անհրաժեշտ բոլոր ընթացակարգերում: Այնուամենայնիվ, մոդելավորման գործընթացը սովորաբար պահանջում է սկզբնական իրավիճակի մեկից ավելի մոդել: Ավանդաբար, միջանկյալ մոդելները, որոնք օգտագործվում են կոմբինատորային խնդիրներ լուծելու համար, հավաքածուները բնութագրող արտահայտություններն են՝ տատանումներ, փոխադարձություն, համադրություն: Սովորողների հարցումների գործընթացում կողպեքները խաղում են այս միջանկյալ դերը և օգնում «նյութականացնել» յուրաքանչյուր տեսակի իրավիճակ: ***Կողպեքը որպես մոդել*** ավելի հարուստ է հատկությունների առումով, քան պարզ բանավոր արտահայտությունը: Ի վերջո, կողպեքները հայտնվում են կոմբինատորիկայի խնդիրներում որպես դիտարկվող իրավիճակների տեսակների ներկայացուցիչներ: Այսպիսով, մենք ունենք մոդելավորման գործընթացի օրինակ, որտեղ արտամաթեմատիկական համակարգերը՝ կողպեքներն են ու հանդես են գալիս որպես մաթեմատիկական իրավիճակների մոդելներ:

ՌԻՀՈԻ-ները դեռևս նոր ուսուցման ձևաչափ են միջնակարգ կրթության մեջ, և դրանց տարածման պայմանները որպես նորմալացված գործունեություն կարիք ունեն լրացուցիչ հետազոտության:

Այս հետազոտությունը նպատակ ունի կապել երկու խնդիրները՝ բարելավելու ՌԻՀՈԻ-ների ներդրումը և կոմբինատորիկայի դասավանդումը որպես մոդելային գործունեություն միջնակարգ կրթության մեջ:

Կողպեքները ընդունում են համակցություններ: Համակցությունը կլինի այն բառը, որն օգտագործվում է հնարավոր գաղտնաբառ նշելու համար: Մենք օգտագործում ենք միայն գաղտնաբառ ճիշտ համակցության համար: Բոլոր համակցությունները կազմված են բջիջներից, որոնք այն ֆիզիկական բծերն են, որոնք մենք կարող ենք օգտագործել բջիջ-տարրեր ընտրելու համար:

Այսպիսով հետազոտության արդյունքները կարևոր խթան հանդիսացան Իսպանիայի Բարսելոնա քաղաքում, որը ինչպես գիտենք նաև համարվում է Խելացի քաղաք, իսկ ինչ կտա այս փորձը ՀՀ որևէ քաղաքի կամ գյուղի դպրոցին: Քանի որ կատալոնական դպրոցում սովորողները բավականին պատրաստ էին նորարարություններին, դասարանները կառավարելի և մոտիվացված, իսկ ՀՀ-ում աշակերտները նոր օրենքսրության փոփոխությունների արդյունքներում պետք է դեռ ադապտացվեն կրթության ձև նորարարական փոփոխություններին և դեռ չունեն բավականին փորձառություն և տեխնիկա հետազոտական աշխատանքների, ապա ծրագրում այս թեմաները բաց չմնալու նպատակով կառաջարկեմ կողպեքների մոդելը կիառել, բայց կոմբիանացիաների թիվը սկսել 2-ից, ինչպես նաև ավելի ցածր դասարաններում ժամանակ առ ժամանակ մաթեմատիկայի ժամերին կողպեքների հետ աշխատանքները պարզ մոդելներով կիրառել խաղերի տեսքով: Որպես խաղ կարելի է կիրառել նաև ավագ դասարաններում՝ չմոռանալով վերոնշյալ հարցադրումները:

Կոմբինատորիկան մեր շուրջն է ամենուր, ինչքան կամ մաթեմատիկա, այնքան էլ կա կոմբինատորիկա: Առօրյայում անընդհատ օգտագործում ենք համադրությունները, որոնք մեր կյանքը ավելի հետաքրքիր և գունեղ են դարձնում:

Օգտագործված գրականություն և հղումներ:

1. S. Vasquez, B.Barquero, M.Bosch, «Teaching and learning combinatoriecs in secondary school», Spain-2021
2. Lyn D.English, «Combinatoriecs And The Development Of Children's Combinatorial Reasoning», Australia-2017
3. Пилипенко В. В., «Комбинаторика вокруг нас», 2015
4. Ա.Գ. Կարապետյան, «Կոմբինատորիկայի բովանդակային գիծը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում», Բնագետ N3, 2017
5. https://hy.wikipedia.org/wiki/Նոու-հաու
6. https://hy.wikipedia.org/wiki/Պրաքսեոլոգիա
7. https://hy.answers-life.com/13968443-what-is-the-metacognitive-process