«ԻՆՏԵՐԱԿՏԻՎ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄ»
ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2022

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ	**Ածանացյալ և Շվարցի ածանցյալ: Ածանցյալի հանրահաշվական կիրառությունները**
ԱՌԱՐԿԱ	**Մաթեմատիկա**
ՀԵՂԻՆԱԿ	**Կարո Գեղամի Դավթյան**
ՄԱՐԶ	**Արագածոտն**
ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ	**Եղիպատրուշի միջնակարգ դպրոց**

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ներածություն ____3

§1. Ածանցյալ ____5

§2. Երկու ֆունկցիաների գումարի և արտադրյալի ածանցման կանոնները ___________8

§3. Երկու ֆունկցիաների քանորդի և բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնները ______10

§4. Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները ___________________________________11

§5. Ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող ____14

§6. Ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը և ածանցյալը: Կրիտիկական կետեր __16

§7. Ֆունկցիայի էքստրեմումները և ածանցյալը ________________________________17

§8. Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները ____________________________19

§9. Ֆունկցիայի հետազոտումը ածանցյալի միջոցով ______________________________21

§10. Շվարցի ածանցյալ ____22

§11. Ածանցյալի հանրահաշվական կիրառությունների մասին______________________25

Եզրակացություն ____28

Օգտագործված գրականության ցանկ ____30

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ածանցյալի վերաբերյալ աշակերտները սկսում են գաղափար կազմել և ուսումնասիրել 11-րդ դասարանում՝ <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> առարկայի շրջանակներում: Մինչև այս թեմային անցնելը սովորողները նախորդող պարագրաֆներում գաղափար են կազմում մի շարք մաթեմատիկական հասկացությունների վերաբերյալ, որոնցից կարծում եմ, որ առավել հիմնաքարայինը ֆունկցիայի անընդհատությունն է, քանի որ նույնանուն պարագրաֆի շրջանակներում գաղափար է կազմվում **արգումենտի աճին համապատասխանող ֆունկցիայի աճ** հասկացության մասին: Իսկ արդեն <<Ակնթարթային արագություն և արագացում>> պարագրաֆում աշակերտները հասկանում են, որ ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանն ունի որոշակի ֆիզիկական իմաստ: <<Ածանցյալ>> պարագրաֆում ևս մեկ անգամ մատնանշելով, որ ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանն ունի որոշակի ֆիզիկական իմաստ և, ինչու չէ, նաև հատուկ գործնական նշանակություն, կարելի՝ անցնել f(x) ֆունկցիայի՝ x_0 կետում ածանցյալի սահմանմանը:

<<Երկու ֆունկցիաների գումարի և արտադրյալի ածանցման կանոնները>>, <<Երկու ֆունկցիաների քանորդի և բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնները>>, <<Տարրական ֆուկցիաների ածանցյալները>> թեմաները էապես մեծացնում են ֆունկցիաների ածանցյալները հաշվելու հնարավորությունները: Հաջորդ՝ <<Ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող>>, <<Ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը և ածանցյալը: Կրիտիկական կետեր>>, <<Ֆունկցիայի էքստրեմումները և ածանցյալը>>, <<Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները>>, <<Ֆունկցիայի հետազոտումն ածանցյալի միջոցով>> թեմաների ուսուցման գլխավոր նպատակը սովորողների մեջ մաթեմատիկական անալիզի մեթոդների ձևավորումն է: Այդ մեթոդների տիրապետման և կիրառման համապատասխան պրակտիկ կարողությունների մշակման համար, ամենից առաջ, անհրաժեշտ է հատուկ հաշվեկանոնների հստակ յուրացում: Ընդ որում, կարևոր է, որ սովորողներն ամեն անգամ ըմբռնեն կիրառված մեթոդի ներքին բովանդակությունը և

հաշվեկանոնների կիրառության իրավասությունը, կատարվող գործողությունների իմաստները: <<Ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող>> թեման ունի ճանաչողական իմաստով կարևոր նշանակություն, նրանում մեկնաբանվում է ածանցյալի ևս մեկ՝ երկրաչափական իմաստը:

Հայտնի է և դպրոցական դասընթացում էլ ածանցյալների կիրառությունները ուսումնասիրելիս պարզ է դառնում, որ ոչ բոլոր անընդհատ ֆունկցիաներն են, որ իրենց որոշման տիրույթի բոլոր կետերում ունեն ածանցյալ: Օրինակ. $y = |x|$ ֆունկցիան անընդհատ է թվային ուղղի բոլոր կետերում, բայց այն ածանցելի չէ x=0 կետում: Հետազոտական աշխատանքում տրվում է նաև Շվարցի ածանցյալի գաղափարը և նրա կապը սովորական ածանցյալի հետ, ցույց է տրվում, որ կան դեպքեր, երբ որոշակի անընդհատ ֆունկցիաներ իրենց որոշման տիրույթին պատկանող ինչ-որ կետում ածանցելի չեն, սակայն ունեն Շվարցի ածանցյալ, փաստորեն Շվարցի (սիմետրիկ) ածանցյալը հանդիսանում է սովորական ածանցյալի ընդհանրացում, հետևաբար, այն ունի ավելի լայն կիրառություններ քան սովորական ածանցյալը: Շվարցի ածանցյալով կարելի է ուսումնասիրել ուռուցիկ ֆունկցիաների դասը, արտածել որոշ անհավասարություններ: Շվարցի ածանցյալը լայն կիրառություն ունի եռանկյունաչափական շարքերի զուգամիտության հարցն ուսումնասիրելիս:

Հետազոտական աշխատանքում անդրադարձ է կատարվել նաև ածանցյալի հանրահաշվական կիրառություններին և հիմնավորվել է դրանց կարևորությունը:

§1. Ածանցյալ

Ֆուկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանն ունի որոշակի ֆիզիկական իմաստ: Դիտարկենք $y = f(x)$ ֆուկցիան և ենթադրենք x_0–ն դրա որոշման տիրույթի ներքին կետ է, այսինքն՝ կա x_0-ի շրջակայք, որն ընկած է $D(f)$-ում:

Ասում են, որ f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, եթե կամայական h_n անվերջ փոքրի համար՝ զուգամետ է

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$$

հաջորդականությունը:

Եթե f ֆուկցիան ածանցելի է x_0 կետում, ապա հաջորդականության սահմանն անվանում են f ֆունկցիայի ածանցյալ x_0 կետում և նշանակում $f'(x_0)$ (կարդացվում է էֆ շտրիխ x_0).

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}:$$

Դիցուք D-ն այն բազմությունն է, որին պատկանող կետերում $y = f(x)$ ածանցելի է: Այդ բազմության յուրաքանչյուր x կետի համապատասխանեցնելով $f'(x)$ թիվը՝ կստանանք D բազմությունում որոշված ֆուկցիա: Այդ ֆունկցիան անվանում են $y = f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ և նշանակում f' կամ y' :

Ածանցյալն ունի հետևյալ **ֆիզիկական իմաստները.**

ա) $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի $V(t)$ արագությունը ժամանակի t պահին հավասար է $s(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալին.

$$V(t) = s'(t):$$

բ) Եթե ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագությունը փոխվում է $V(t)$ օրենքով, ապա դրա $a(t)$ արագացումը ժամանակի t պահին հավասար է ֆուկցիայի ածանցյալին.

$$\boldsymbol{a(t) = V'(t)}:$$

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x) = a$ հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը: Կամայական x_0 կետի և կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$\frac{\boldsymbol{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}}{\boldsymbol{h_n}} = \frac{\boldsymbol{a - a}}{\boldsymbol{h_n}} = \mathbf{0}:$$

Հետևաբար, **հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է**:

Օրինակ 2: Գտնենք $\mathrm{f(x) = kx + b}$ գծային ֆուկցիայի ածանցյալը: Կամայական x կետի և կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$\frac{\boldsymbol{f(x + h_n) - f(x)}}{\boldsymbol{h_n}} = \frac{\boldsymbol{k(x + h_n) + b - (kx + b)}}{\boldsymbol{h_n}} = \boldsymbol{k}$$

Հետևաբար՝

$$\mathbf{(kx + b)' = k}:$$

Օրինակ 3: Գտնենք $\mathrm{f(x)} = x^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

$$\frac{\mathbf{f(x + h_n) - f(x)}}{\mathbf{h_n}} = \frac{\mathbf{(x + h_n)^2 - x^2}}{\mathbf{h_n}} = \mathbf{2x + h_n \to 2x},$$

փաստորեն ստանում ենք՝

$$\mathbf{(x^2)' = 2x:}$$

Օրինակ 4: Գտնենք $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը զրոյից տարբեր x կետում: Այս դեպքում՝

$$\frac{\boldsymbol{f(x + h_n) - f(x)}}{\boldsymbol{h_n}} = \frac{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x + h_n}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{h_n}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x(x + h_n)}}$$

Եթե $\mathrm{h_n}$-ն անվերջ փոքր է, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}(x + \mathrm{h_n})$=x: Կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների քանորդի սահմանի վերաբերյալ թեորեմը՝ կստանանք

$$\frac{\boldsymbol{f(x+h_n)-f(x)}}{\boldsymbol{h_n}} \to -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2}}:$$

Այսպիսով՝ $f(x)=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան ածանցելի է իր որոշման տիրույթի բոլոր կետերում և

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)' = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2}}:$$

Օրինակ 5: Գտնենք $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը զրոյից տարբեր x կետում: Այս դեպքում՝

$$\frac{\mathbf{f(x+h_n)-f(x)}}{\mathbf{h_n}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{x+h_n}}-\sqrt{\boldsymbol{x}}}{\mathbf{h_n}} = \frac{(\sqrt{\boldsymbol{x+h_n}}-\sqrt{\boldsymbol{x}})(\sqrt{\boldsymbol{x+h_n}}+\sqrt{\boldsymbol{x}})}{\mathbf{h_n}(\sqrt{\boldsymbol{x+h_n}}+\sqrt{\boldsymbol{x}})} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x+h_n}}+\sqrt{\boldsymbol{x}}}:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x+h_n}=\sqrt{\boldsymbol{x}}$**,** ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\boldsymbol{f(x+h_n)-f(x)}}{\boldsymbol{h_n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}}$$

Այսպիսով՝

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}}:$$

§2. Երկու ֆունկցիաների գումարի և արտադրյալի ածանցման կանոնները

Թեորեմ 1: Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են որևէ կետում, իսկ k–ն հաստատուն է, ապա k$\cdot f$, f+g և f-g ֆունկցիաները նույնպես ածանցելի են այդ կետում, ընդ որում,

$$(\mathbf{k}\cdot \boldsymbol{f})'=\mathbf{k}\cdot \boldsymbol{f}',\quad (\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'+\boldsymbol{g}',\quad (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'-\boldsymbol{g}':$$

Ապացուցում: Դիցուք, f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են x կետում, և h_n-ը կամայական անվերջ փոքր է: Օգտվելով զուգամետ հաջորդականությունների հատկություններից՝ ստանում ենք՝

$$\frac{kf(x+h_n)-kf(x)}{h_n}=k\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\to kf'(x)$$

Այսինքն՝ $(k\cdot f)'=k\cdot f'$:

Ապացուցենք գումարի ածանցման կանոնը.

$$\frac{[f(x+h_n)+\mathrm{g}(\mathrm{x}+h_n)]-[f(x)+\mathrm{g}(\mathrm{x})]}{h_n}=\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}+\frac{\mathrm{g}(\mathrm{x}+h_n)-\mathrm{g}(\mathrm{x})}{h_n}\to$$

$\to f'(x)+\mathrm{g}'(\mathrm{x})$:

Տարբերության ածանցման կանոնն ապացուցվում է հանգունորեն:

Այս թեորեմն ունի հետևյալ ֆիզիկական մեկնաբանությունը: Դիցուք, գետափնյա նավամատույցից միաժամանակ սկսում են շարժվել լաստն ու շոգենավը: Ենթադրենք ժամանակի կամայական t պահին շոգենավի հեռավորությունը լաստից $s_1(t)$ է, իսկ լաստի հեռավորությունը նավամատույցից՝ $s_2(t)$: Նշանակում է՝ շոգենավը լաստից հեռանում է $V_1(t)=s_1'(t)$ արագությամբ, իսկ լաստը նավամատույցից՝ $V_2(t)=s_2'(t)$ արագությամբ: Պարզ է, որ եթե լաստն ու շոգենավը շարժվեն նույն ուղղությամբ, ապա t պահին շոգենավի հեռավորությունը նավամատույցից կլինի՝ $s(t)=s_1(t)+s_2(t)$, իսկ եթե շարժվեն հակառակ ուղղություններով, ապա՝ $s(t)=s_1(t)-s_2(t)$: Հետևաբար, եթե լաստն ու շոգենավը շարժվեն նույն ուղղությամբ, ապա շոգենավը նավամատույցից կհեռանա $V(t) = s'(t) = s_1'(t) + s_2'(t) = V_1(t) + V_2(t)$ արագությամբ, իսկ հակառակ ուղղություններով շարժվելու դեպքում՝

$$V(t) = s'(t) = s_1'(t) - s_2'(t) = V_1(t) - V_2(t) \text{ արագությամբ:}$$

Թեորեմ 2: Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են որևէ կետում, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $f \cdot \mathrm{g}$ ֆունկցիան, ընդ որում՝

$$(\boldsymbol{f} \cdot \mathbf{g})' = \boldsymbol{f}' \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{g}'\text{:}$$

Հետևանք: Մեկից մեծ կամայական n բնական թվի համար

$$(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{n x^{n-1}}\text{:}$$

Կամայական α թվի համար ճիշտ է նաև՝ $(\boldsymbol{x^{\alpha}})' = \boldsymbol{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}$:

§3. Երկու ֆունկցիաների քանորդի և բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնները

Հետևյալ թեորեմներով տրվում է քանորդի ածանցման կանոնը:

Թեորեմ 1: Եթե g ֆուկցիան ածանցելի է x կետում և $g(x) \neq 0$, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $\frac{1}{g}$ ֆունկցիան, ընդ որում

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g}}\right)' = -\frac{\mathbf{g}'}{\mathbf{g^2}}:$$

Թեորեմ 2: Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են x կետում և $g(x) \neq 0$, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $\frac{f}{g}$ ֆունկցիան, ընդ որում

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\mathbf{g}}\right)' = \frac{\boldsymbol{f}' \cdot \mathbf{g} - \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{g}'}{\mathbf{g^2}}:$$

Հիշենք, որ երկու՝ f և g ֆունկցիաների համադրույթ՝ $f \circ g$, անվանել ենք այն F ֆունկցիան, որի արժեքն x կետում հավասար է f ֆունկցիայի արժեքն $g(x)$ կետում՝ $F(x)=f(\mathrm{g(x)})$: Իսկ F ֆուկցիան նման դեպքում կոչել ենք բարդ ֆուկցիա: Հետևյալ թեորեմով տրվում է բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը:

Թեորեմ 3: Եթե t=g(x) ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, իսկ y=$f(t)$ ֆունկցիան՝ t_0= $g(x_0)$ կետում, ապա $F = f \circ g$ ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, և

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x_0})=\boldsymbol{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x_0})) \cdot \mathbf{g}'(\boldsymbol{x_0}):$$

Ձևակերպենք այն մասնավոր դեպքը, երբ g –ն գծային ֆունկցիա է՝ g(x)=kx+b:

Թեորեմ 4: Եթե f ֆունկցիան ածանցելի է, ապա $F(x)$=$f(kx+b)$ ֆունկցիան նույնպես ածանցելի է, և

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{kx}+\boldsymbol{b}):$$

§4. Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները

Պարագրաֆ 2-ում արդեն ներկայացվել է աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը՝

$$(\boldsymbol{x^{\alpha}})'\boldsymbol{=\alpha\cdot x^{\alpha-1}}:$$

Այս պարագրաֆում կներկայացնենք մնացած տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը:

$$(\boldsymbol{sinx})'\boldsymbol{=cosx}:$$

Ապացույց: Մինչև ածանցյալի սահմանումը արտահայտող բանաձևի գրելը, նախ հիշենք եռանկյունաչափությունից հայտնի հետևյալ բանաձևը՝ $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$, Կամայական x կետի և կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$\frac{\mathrm{f(x+h_n)-f(x)}}{\mathrm{h_n}}=\frac{\sin(x+\mathrm{h_n})-\sin x}{\mathrm{h_n}}=\frac{2\sin\frac{\mathrm{h_n}}{2}\cos\frac{(2x+\mathrm{h_n})}{2}}{\mathrm{h_n}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\mathrm{h_n}}{2}}{\frac{\mathrm{h_n}}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\mathrm{h_n}}{2}\right),$$

$$\text{հաշվի առնելով, որ }\lim_{\mathrm{h_n}\to 0}\frac{\sin\frac{\mathrm{h_n}}{2}}{\frac{\mathrm{h_n}}{2}}=1,\text{և }\lim_{\mathrm{h_n}\to 0}\cos\left(x+\frac{\mathrm{h_n}}{2}\right)=\cos x,$$

$$\text{ստանում ենք՝ }\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\cos x}:$$

Կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝ այս բանաձևից ստանում ենք՝

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x:$$

Այսպիսով՝

$$(\boldsymbol{\cos x})'=\boldsymbol{-\sin x}:$$

Կիրառելով քանորդի ածանցման կանոնը՝ ստանում ենք՝

$$(tan\,x)' = \left(\frac{sin\,x}{cos\,x}\right)' = \frac{(sinx)'\cdot cos\,x - (cos\,x)'\cdot sin\,x}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}:$$

Այսպիսով՝

$$(\boldsymbol{tan\,x})' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos^2x}}:$$

Հանգունորեն կարող ենք ստանալ ctgx ֆունկցիայի բանաձևը՝

$$(\boldsymbol{ctgx})' = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{sin^2x}}:$$

Ստանանք y=a^x ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը:

$$(a^x)' = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x\cdot a^h - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h},$$

Օգտվելով սահմանների հաշվման $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ բանաձևից ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալի համար կստանանք՝

$$(\boldsymbol{a^x})' = \boldsymbol{a^x lna},\ \text{մասնավորապես՝}\ \ (\boldsymbol{e^x})' = \boldsymbol{e^x}:$$

y=lnx ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը ստանալու համար դրական x-երի դեպքում ածանցենք $x = e^{lnx}$ նույնության երկու մասերը որտեղից ստանում ենք՝

$$(\mathbf{ln}\boldsymbol{x})' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}:$$

Այս բանաձևի օգնությամբ հեշտությամբ կարող ենք ստանալ կամայական հիմքով լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝

$$(\boldsymbol{log_a x})' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{xlna}}\boldsymbol{:}$$

Տարրական ֆուկցիաների ածանցյալների բանաձևերի ցուցակի լրիվության համար ներկայացնենք նաև հակադարձ եռանկյունաչափական ֆուկցիաների ածանցյալների բանաձևերը:

$$(\boldsymbol{arcsinx})' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}},\ \ (\boldsymbol{arccosx})' = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}},\ \ (\boldsymbol{arctgx})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}},\ \ (\boldsymbol{arcctgx})' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}:$$

Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերի արտածումը դպրոցական դասագրքերում ներկայացված չէ, բայց ուսուցիչը կարող է այդ բանաձևերից մեկի արտածումը ներկայացնել դասարանին, ցույց տալ դրանց դուրս բերման հիմնական սկզբունքները կամ մաթեմատիկական հնարքները իսկ մնացած բանաձևերի արտածումը հանձնարարել աշակերտներին, երբ աշակերտները աշխատանքը հաջողությամբ ավարտեն կարծում եմ, որ դա գեղագիտական հաճույք կպատճառի նրանց:

Այս բանաձևերից ապացուցենք միայն *arcsinx*-ի ածանցման բանաձևը, մյուսները կնդունենք առանց ապացուցման, քանի որ դրանք ապացուցվում են հանգունորեն:

Եռանկյունաչափությունից հիշենք հետևյալ առնչությունները.

$$\sin(\arcsin x)=x, \quad \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}:$$

sin(arcsinx)=x հավասարման երկու մասերը ածանցենք.

$$\big(sin(arcsinx)\big)' = \cos(arcsinx)\cdot(arcsinx)' = \sqrt{1-x^2}\cdot(arcsinx)', \qquad \text{իսկ } x'=1$$

Հետևաբար՝ $\sqrt{1-x^2}\cdot(arcsinx)' = 1$

Որտեղից էլ՝

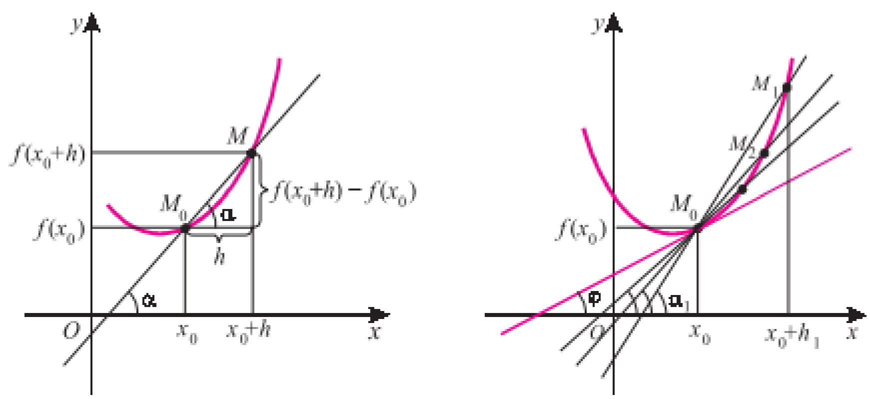
$$(\boldsymbol{arcsinx})' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}:$$

Երկու ֆունկցիաների գումարի, արտադրյալի, քանորդի և համադրույթի ածանցյալների հաշվման կանոնների և բանաձևերի օգնությամբ կարելի է հաշվել կամայական տարրական ֆունկցիայի ածանցյալը, որը, ինչպես նաև երևում է այդ բանաձևերից, դարձյալ կլինի տարրական ֆունկցիա: Հիշեցնենք, որ կամայական տարրական ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր կետում անընդհատ է: Սակայն ոչ բոլոր տարրական ֆունկցիաներն են, որ իրենց տիրույթի բոլոր կետերում ունեն ածանցյալ:

§5. Ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող

Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրֆիկը (նկ.1, ա): Այդ գրաֆիկի կամայական երկու կետով անցնող ուղիղն անվանում են f ֆունկցիայի գրաֆիկի հատող: Այսուհետև տրված ուղղի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյուն ասելով՝ կհասկանանք այն փոքրագույն ոչ բացասական α անկյունը, որով պետք է O կետի շուրջը պտտել աբսցիսների առանցքը, որպեսզի այն զուգահեռ դառնա կամ համընկնի տրված ուղղին: Նկարից պարզ է, որ $M_0(x_0, f(x_0))$ և $M_n(x_0+h_n, f(x_0+h_n))$ կետերով անցնող հատողի և աբցիսների առանցքի կազմած անկյան տանգեսը հավասար է x_0 կետում ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությանը (նկ.1, ա).

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}:$$



ա Նկ.1 բ

Եթե կամայական h_n անվերջ փոքրի դեպքում $M_0(x_0, f(x_0))$ և $M_n(x_0+h_n, f(x_0+h_n))$ կետերով անցնող հատողները n-ն անվերջի ձգտելիս մոտենում են մի սահմանային դիրքի (նկ.1, բ), ապա այդ սահմանային ուղիղն անվանում են $(x_0,\ f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող:

Եթե M_0M_n հատողները աբցիսների առանցքի հետ կազմում են α_n անկյուն, իսկ շոշափողը՝ φ անկյուն, ապա n-ը անվերջի ձգտելիս $\alpha_n \to \varphi$: Հետևաբար՝ $tg\alpha_n \to tg\,\varphi$, որտեղից ստանում ենք.

$$tg\,\varphi = \lim_{n\to\infty}(tg\alpha_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = f'(x_0):$$

Այստեղից էլ հետևում է ածանցյալի երկրաչափական իմաստը.

$y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում հավասար է $(x_0,\ f(x_0))$ կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի և աբցիսների առանցքի կազմած φ անկյան տանգենսին.

$$f'(x_0) = tg\,\varphi:$$

Նշենք, որ վերջին բանաձևը ճիշտ է այն դեպքում, երբ շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին, այսինքն՝ $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$: Հակառակ դեպքում $tg\,\varphi$-ն որոշված չէ, իսկ f ֆունկցիան ածանցելի չէ x_0 կետում: $(x_0,\ f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումն է՝

$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0):$$

§6. Ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը և ածանցյալը: Կրիտիկական կետեր

Թեորեմ 1: Եթե միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x) > 0$, ապա այդ միջակայքում f ֆունկցիան աճող է:

Թեորեմ 2: Եթե միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x) < 0$, ապա այդ միջակայքում f ֆունկցիան նվազող է:

Այսպիսով՝ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը կարելի է գտնել հետևյալ հաշվեկանոնով.

1. գտնել $f'(x)$-ը և նշել $D(f)$-ի այն կետերը, որտեղ ածանցյալը գոյություն չունի,

2. գտնել $f'(x)$ =0 հավասարման արմատները,

3. նախորդ երկու քայլերում գտնված կետերի միջոցով ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տրոհել միջակայքերի,

4. այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում որոշել ածանցյալի նշանը:

Այն միջակայքում, որտեղ $f'(x) > 0$, ֆունկցիան աճող է, իսկ այն միջակայքում, որտեղ $f'(x) < 0$, ֆունկցիան նվազող է:

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ներքին կետն անվանում են կրիտիկական կետ, եթե այդ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է կամ գոյություն չունի:

§7. Ֆունկցիայի էքստրեմումները և ածանցյալը

Ուսումնասիրեցինք՝ ֆունկցիայի մոնոտոնության և ածանցյալի կապը, այժմ ֆունկցիայի ածանցյալի միջոցով կհետազոտենք նրա էքստրեմումները:

Ինչպես գիտենք, եթե ֆունկցիան աճող է $(a;\, x_0]$ միջակայքում և նվազող՝ $[x_0; b)$-ում, ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է: Դիցուք, f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում: Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ եթե $(a;\, x_0)$ միջակայքում $f'(x) > 0$, ապա f-ն $(a;\, x_0]$ միջակայքում աճող է: Եթե նաև $f'(x) < 0$, երբ $x \in (x_0; b)$, ապա f-ը կլինի նվազող $[x_0; b)$-ում, և հետևաբար՝ x_0-ն f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ: Այսպիսով՝ ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1: Դիցուք, f ֆունկցիան անընդհատ է x_0կետում, և

1. $f'(x) > 0$, երբ $x \in (a;\, x_0)$,
2. $f'(x) < 0$, երբ $x \in (x_0; b)$:

Այդ դեպքում x_0-ն f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է՝x_0=x_{max}:

Համանմանորեն կարելի է համոզվել, որ ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: Դիցուք, f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, և՝

1. $f'(x) < 0$, երբ $x \in (a;\, x_0)$,
2. $f'(x) < 0$, երբ $x \in (x_0; b)$:

Այդ դեպքում x_0-ն f ֆունկցիայի մինիմումի կետ է՝ x_0=x_{max}:

Այդ երկու թեորեմները պարզեցված ձևակերպվում են հետևյալ կերպ.

եթե x_0 կետի վրայով ձախից աջ շարժվելիս ֆունկցիայի ածանցյալը փոխվում դրականից բացասականի, ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է, իսկ եթե փոխվում է բացասականից դրականի, ապա x_0-ն մինիմումի կետ է:

Ֆերմայի թեորեմ: Եթե x_0-ն f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է և այդ կետում f-ն ածանցելի է, ապա $f'(x_0)$ =0:

Փաստորեն, համաձայն Ֆերմայի թեորեմի, ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է փնտրել նրա կրիտիկական կետերի բազմությունում: Այսինքն՝ Ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը կրիտիկական կետեր են: Սակայն չպետք է կարծել, որ կամայական կրիտիկական կետ անպատճառ էքստրեմումի կետ է:

Այսպիսով՝ ածանցյալի միջոցով ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը գտնելու համար անհրաժեշտ է՝

1. ֆունկցիան ածանցել,
2. գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը,
3. եթե կրիտիկական կետի վրայով ձախից աջ անցնելիս՝

   ա) ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասական, ապա այդ կետը մաքսիմումի կետ է,

   բ) ածանցյալը փոխվում է բացասականից դրական, ապա այդ կետը մինիմումի կետ է,

   գ) ածանցյալը պահպանում է նշանը, ապա այդ կետը էքստրեմումի կետ չէ:

§8. Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները

Կիրառական նշանակություն ունեցող շատ խնդիրներում անհրաժեշտ է լինում գտնել որևէ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը տրված միջակայքում: Հնարավոր է երեք դեպք:

1. ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն (փոքրագույն) արժեք չունի:
2. ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ծարակետերում:
3. ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ներքին կետում:

Պարզ է, որ վերջին դեպքում այդ կետը կլինի նաև էքստրեմումի կետ: Վերը ասվածից կարելի է անել հետևյալ եզրակացությունը.

եթե ֆունկցիան որևէ միջակայքում ունի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք, ապա այդ արժեքը պետք է փնտրել միջակայքի ծայրակետերում և էքստրեմումի կետերում ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմության մեջ:

Ինչպես նշեցինք, ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք կարող է չունենալ: Պարզվում է, որ. եթե ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ միջակայքում, ապա այն ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ: Այս պնդումը Վայերշտրասի թեորեմն է, որը կնդունենք առանց ապացուցման: Կիրառական խնդիրներում հանդիպող ֆունկցիաները որպես կանոն միջակայքում ունենում են վերջավոր թվով էքստրեմումներ, ինչպես գիտենք էքստրեմումի կետերը պետք է փնտրել կրիտիկական կետերի բազմության մեջ: Ամփոփելով ասվածը՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ հաշվեկանոնը:

$[a;b]$ միջակայքում անընդհատ f ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը գտնելու համար անհրաժեշտ է.

1. գտնել f ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը,

2. այդ կետերից ընտրել այն $x_1, x_2, \dots, x_k$ կետերը, որոնք պատկանում են $[a;b]$ միջակայքին,
3. հաշվել $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$, արժեքները,

ստացված արժեքներից ամենամեծը կլինի ֆունկցիայի մեծագույն, իսկ ամենափոքրը՝ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը:

§9. Ֆունկցիայի հետզոտումը ածանցյալի միջոցով

Ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը հիմնականում բաղկացած է հետևյալ քայլերից:

1) Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
2) Պարզել՝ ֆունկցիան պարբերական է, թե ոչ:
3) Պարզել ֆունկցիայի զույգությունը:
4) Որոշել ֆունկցիայի գրաֆիկի և կորդինատային առանցքների հատման կետերը:
5) Գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:
6) Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումի կետերը:
7) Հաշվել ֆունկցիայի արժեքներն էքստրեմումի կետերում:
8) Եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բաղկացած է մեկ կամ մի քանի միջակայքերից, ապա պարզել ֆունկցիայի վարքն այդ միջակայքերի ծայրակետերին մոտենալիս:

Այս քայլերից 6-րդ կատարելիս արդյունավետ է ածանցյալի կիրառումը: Ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը գտնելով՝ հեշտությամբ կարող ենք գտնել մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումի կետերը:

§10. Շվարցի ածանցյալ

Սահմանում 1. Դիցուք F(x) ֆունկցիան որոշված է x կետի որոշ շրջակայքում: Եթե գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{F(x+h)-F(x-h)}}{\boldsymbol{2h}},$$

ապա այն կոչվում է F(x) ֆունկցիայի Շվարցի ածանցյալ x կետում և նշանակվում է $F^{(\prime)}(x)$ –ով: Եթե x կետում գոյություն ունի սովորական F′(x) ածանցյալը, ապա գոյություն ունի նաև Շվարցի ածանցյալը և $F^{(\prime)}(x)$= F′(x): Սրա ապացույցը անմիջապես հետևում է նրանից, որ հավասարության

$$\frac{\boldsymbol{F(x+h)-F(x-h)}}{\boldsymbol{2h}}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left[\frac{\boldsymbol{F(x+h)-F(x)}}{\boldsymbol{h}}+\frac{\boldsymbol{F(x-h)-F(x)}}{\boldsymbol{-h}}\right]$$

աջ մասը երբ h→ 0, ձգտում է F′(x)-ի: Բայց հնարավոր են դեպքեր երբ F′(x)-ը գոյություն չունի, իսկ $F^{(\prime)}(x)$-ը գոյություն ունի:

Օրինակ: f(x)=$|x|$: Այս ֆունկցիան x=0 կետում սովորական ածանցյալ չունի.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}:$$

Եթե $\Delta x>0$, ապա $|\Delta x|$=Δx , հետևաբար՝

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1:$$

Եթե $\Delta x<0$,ապա $|\Delta x|=-\Delta x$, հետևաբար՝

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-1:$$

հետևաբար f(x)=$|x|$ ֆունկցիան x=0 կետում սովորական ածանցյալ չունի: Այժմ հաշվենք նրա Շվարցի ածանցյալը՝

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h}=0,$$

ուրեմն $F^{(\prime)}(0)=0$: Նմանատիպ օրինակներ շատ կան, բայց այստեղ դրանք չենք քննարկի, կսահմանափակվենք միայն նախորդ օրինակով:

Այսպիսով Շվարցի ածանցյալը հանդիսանում է ածանցյալ հասկացության ընդհանրացումը: Հաշվի առնելով այս հանգամանքը կարծում եմ, որ Շվարցի ածանցյալի գաղափարը կարելի է ներառել <<Ածանցյալ>> թեմայի շրջանակներում, առնվազն այնքան ծավալով, ինչքանով, որ այն ներկայացված է հետազոտական աշխատանքի այս պարագրաֆում: Շվարցի ածանցյալը իհարկե ունի ավելի լայն կիրառություններ, քան սովորական ածանցյալը, սակայն դպրոցական դասընթացում նպատակահարմար չէ դրանք խորությամբ ուսումնասիրել: Շվարցի ածանցյալի ուսումնասիրումը և նրա համեմատումը սովորական ածանցյալի հետ կարող է մոտիվացնել աշակերտներին և մեծացնել <<Ածանցյալ>> թեմայի հանդեպ հետաքրքրությունը, իսկ ինչպես կարելի է դա անել. ինչպես գիտենք թեմայի շրջանակներում աշակերտները օգտվելով ածանցյալի սահմանումը արտահայտող բանաձևից ոչ բարդ դեպքերում գտնում են տարբեր ֆունկցիաների ածանցյալները, այս դեպքում դա անելուց հետո ուսուցիչը ևս մեկ անգամ հիշեցնելով Շվարցի ածանցյալի սահմանումը և սովորական ածանցյալին նրա հավասար լինելը՝ տալիս է հանձնարարություն, որ աշակերտները դրա ճշմարիտ լինելը հաստատեն կամ հերքեն տարբեր օրինակների վրա կատարած փորձերով. նույն ֆունկցիայի ածանցյալը կգտնեն օգտագործելով և սովորական ածանցյալի սահմանումը, և Շվարցի ածանցյալի սահմանումը, բնականաբար նրանք երկու դեպքում էլ միևնույն արդյունքը կստանան: Օրինակ դիտարկենք f(x)=kx+b ֆունկցիայի Շվարցի ածանցյալը, դասագրքում գծային ֆունկցիայի սովորական ածանցյալը արտածված է, մեզ մնում է միայն գտնել նրա Շվարցի ածանցյալը և համեմատել սովորականի հետ, որը ինչպես գիտենք գծային ֆունկցիայի դեպքում հավասար է k-ի:

$$f(x)=kx+b,\ F^{(\prime)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)+b-k(x-h)-b}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{kx+kh+b-kx+kh-b}{2h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2kh}{2h}=k:$$

Դիտարկենք մեկ այլ օրինակ. f(x)=x^2, $F^{(\prime)}(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}$ = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^2+(x-h)^2}{2h}$ = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2+2xh-h^2}{2h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{4xh}{2h} = 2x$: Այսպիսով քննարկելով մի քանի դեպքեր, նույնիսկ իրենց հայեցողությամբ՝ աշակերտները կհամոզվեն, որ սովորական և Շվարցի ածանցյալների դեպքերում միևնույն արդյունքներն են ստանում:

§11. Ածանցյալի հանրահաշվական կիրառությունների մասին

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ածանցյալը հիմնականում կիրառվում է ֆունկցիաների հետազոտման համար: Նվազ ուշադրություն է դարձվում ածանցյալի կիրառությանը մաթեմատիկայի այնպիսի թեմաներում, ինչպիսիք են արտահայտությունների պարզեցումը, արտադրիչների վերլուծումը, անհավասարությունների ապացուցումը, անհավասարությունների լուծումը և այլն: Այդ բացը կարելի է լրացնել, եթե ածանցյալի հետ ծանոթանալուց անմիջապես հետո այն կիրառենք նույնական ձևափոխություններ կատարելիս: Ածանցյալի կիրառմամբ հանրահաշվական խնդիրների լուծումների ընթացքում զարգանում են սովորողների հաշվողական ունակությունները, կրկնում են ֆունկցիաների որոշ հատկությունները, ամրապնդում են ածանցման տեխնիկան: Նկատի ունենալով այդ հանգամանքները, առաջարկում եմ, չծանրաբեռնելով <<Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր>> դասընթացի տեսական նյութը, ներմուծել նրանում խնդիրներ, որոնց օգնությամբ սովորողները կծանոթանան ածանցյալի հանրահաշվական կիրառություններին: Կդիտարկվեն ածանցյալի կիրառմամբ լուծվող հանրահաշվական խնդիրներ, այդ խնդիրների մի մասը դժվարությամբ է լուծվում ավանդական մեթոդներով, սակայն ածանցյալի կիրառմամբ դրանք հեշտությամբ են լուծվում: Դրա հետ մեկտեղ՝ պետք է աշակերտներին բացատրել, որ ածանցյալի կիրառմամբ լուծվող խնդիրների մի մասը արդյունավետ ձևով է լուծվում նաև սովորական մեթոդներով: Աշակերտներին հիշեցնում ենք, որ այդ խնդիրների լուծման համար ածանցյալի կիրառումը նպատակ չունի ցույց տալու այդ եղանակի առավելությունը դասականի նկատմամբ, այլ միայն բացահայտելու ածանցյալի կիրառության բնագավառները: **Աշակերտները հնարավորություն են ստանում յուրաքանչյուր առանձին խնդրի համար ընտրել, թե լուծման որ եղանակն է հարմար ու արդյունավետ:**

Դիտարկենք ածանցյալի կիրառությունների նմանատիպ մի օրինակ: Աշակերտներին նախ հիշեցնում ենք, որ որևէ միջակայքում հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի, եթե f(x)=c, ապա $f'(x) = 0$: Հակառակը ևս ճիշտ է. եթե մի որևէ միջակայքի վրա $f'(x) = 0$, ապա f(x) ֆունկցիան հաստատուն է այդ միջակայքի վրա: Եթե f(x) և g(x) ֆունկցիաները միջակայքի վրա ածանցելի են և այդ միջակայքի կամայական x կետի համար f(x) =g(x), ապա $f'(x) = g'(x)$: Սակայն $f'(x) = g'(x)$ պայմանից հետևում է, որ f(x)–g(x) =c: Դիցուք պահանջվում է ապացուցել հետևյալ նույնությունը՝

$$\boldsymbol{cos^4x - \frac{1}{8}cos4x = 2cos^2x - \frac{1}{2}cos2x - \frac{5}{8}}, \qquad \boldsymbol{x \in R}:$$

Ապացուցում: Ակնհայտ է, որ f(x) = $\boldsymbol{cos^4x - \frac{1}{8}cos4x}$ և g(x) = $\boldsymbol{2cos^2x - \frac{1}{2}cos2x - \frac{5}{8}}$ ֆունկցիաները անընդհատ են $\boldsymbol{R}$ բազմությունում: Մյուս կողմից՝

$$\boldsymbol{f'(x) = -4cos^3xsinx + \frac{1}{2}sin4x = -sin2x},$$

$$\boldsymbol{g'(x) = -4cosxsinx + sin2x = -sin2x}:$$

Ստացվեց, որ $f'(x) = g'(x)$, ուրեմն՝ f(x)–g(x) =c: c հաստատունը որոշելու համար բավական է հաշվել f(x)–g(x) տարբերությունը որևէ կետում, օրինակ՝ x=0 կետի համար կստանանք՝ f(0)–g(0)=0: Այսպիսով, ապացուցվեց, որ $\boldsymbol{R}$ բազմությունում f(x) =g(x):

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը. ապացուցել անհավասարությունը՝

$$\boldsymbol{x^5 + (1 - x)^5 \geq \frac{1}{16}}:$$

Ապացուցում: Դիտարկենք f(x)= $x^5 + (1 - x)^5$ ֆունկցիան: Հաշվենք այդ ֆունկցիայի ածանցյալը. $f'(x)$=5$x^4 - 5(1 - x)^4$: Լուծելով 5$x^4 - 5(1 - x)^4$=0 հավասարումը, կստանանք $x = 1/2$ միակ իրական արմատը: Հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ երբ x∈ $(-\infty; 1/2)$, ապա $f'(x) < 0$, իսկ երբ x∈ $(1/2; +\infty)$, ապա $f'(x) > 0$: Հետևաբար $x = \frac{1}{2}$ կետում ֆունկցիան ունի մինիմում: Քանի որ f(1/2)=1/16, ապա բոլոր x-երի համար f(x) ≥ $\frac{1}{16}$, այսինքն՝ $\boldsymbol{x^5 + (1 - x)^5 \geq \frac{1}{16}}$:

Դիտարկենք ևս մեկ օրինակ. m-ի ինչպիսի՞ իրական արժեքների դեպքում

$\sqrt{x - 2} + \sqrt{8 - 2x} = m$ հավասարումը լուծում ունի:

Լուծում: Դիտարկենք g(x)=$\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}$ ֆունկցիան: Նրա որոշման տիրույթն է $2 \leq x \leq 4$ հատվածը: Գտնենք g(x) ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$\boldsymbol{g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{\sqrt{8-2x}}}:$$

Լուծելով $g'(x)=0$ հավասարումը, կունենանք x=$2\frac{2}{3}$: Այդ կետը g(x) ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է, հաշվելով նշված ֆունկցիայի արժեքը իր որոշման տիրույթի ծայրակետերում (դրանք նույնպես հանդիսանում են կրիտիկական կետեր, քանի որ ֆունկցիայի ածանցյալը այդ կետերում գոյություն չունի) և մաքսիմումի կետում, գտնում ենք, որ g(2)=2, g($2\frac{2}{3}$)= $\sqrt{6}$, g(4)= $\sqrt{2}$: Հեշտ է նկատել, որ $\sqrt{6}$-ը g(x) ֆունկցիայի մեծագույն արժեքն է, իսկ $\sqrt{2}$-ը՝ փոքրագույնը: Հաշվի առնելով, որ g(x)-ն անընդհատ ֆունկցիա է, կարող ենք ասել, որ նրա արժեքների տիրույթը կլինի $[\sqrt{2};\sqrt{6}]$ հատվածը: Այսինքն՝ տրված հավասարումը լուծում ունի, երբ

$$\boldsymbol{\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{6}}:$$

Այսպիսի օրինակները բազմաթիվ են և կարող են ուսուցչի առաջնորդությամբ քննարկվել և լուծվել աշակերտների կողմից:

Եզրակացություն

«Ածանցյալ և նրա կիրառությունները» թեման առանձնահատուկ տեղ է զբաղեցնում հանրահաշվի դասընթացում: Այստեղ, փաստորեն, նախորդ գլխի հիման վրա ստեղծվում է այն ամենը, ինչն անհրաժեշտ է ամենատարբեր հանրահաշվական, երկրաչափական և ֆիզիկական բնույթի խնդիրներ լուծելու պրոցեսում ածանցյալը կիրառելու համար: Հանրակրթական միջնակարգ դպրոցի 11-րդ դասարանի «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրերը» դասընթացում աշակերտները ծանոթանում են մաթեմատիկական անալիզի հիմնական հասկացություններից մեկին՝ ֆունկցիայի ածանցյալի հասկացությանը, ուսումնասիրում են նրա որոշ կիրառությունները և լուծում խնդիրներ: Այդ խնդիրների լուծման ժամանակ լայնորեն օգտագործվում են հանրահաշվից ստացած գիտելիքները: Այսպես, օրինակ, ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերի որոշումը կատարվում է $f'(x) > 0$ և $f'(x) < 0$ անհավասարումների լուծման միջոցով: Ֆունկցիայի էքստրեմումների, մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոնման ժամանակ օգտագործվում են ինչպես $f'(x) = 0$ հավասարումը, այնպես էլ վերը նշված անհավասարումները: Առհասարակ կարելի է ասել, որ մաթեմատիկական անալիզի տարրերի, մասնավորապես ածանցյալի հասկացության և նրա կիրառությունների ուսումնասիրությունները մշտապես հիմնվում են հանրահաշվում ուսուցանվող հասկացությունների և փաստերի վրա: Մյուս կողմից, նկատենք, որ մաթեմատիկական անալիզի տարրերն օգնում են հանրահաշվական խնդիրների լուծմանը, մասնավորապես ածանցյալի կիրառմամբ կատարվում են նույնական ձևափոխություններ, ապացուցվում են նույնություններ, լուծվում են որոշ հավասարումներ, անհավասարումներ և դրանց համակարգեր, համեմատվում են որոշ արտահայտություններ և այլն: Սակայն դպրոցական մաթեմատիկայի ժամանակակից դասընթացում ածանցյալի հանրահաշվական կիրառությունները գրեթե չեն դիտարկվում: Մինչդեռ ածանցյալի կիրառմամբ հանրահաշվական խնդիրների լուծումներն ամրապնդում են անալիզի տարրերի և հանրահաշվի միջև եղած միջառարկայական կապերը, ծառայում են հանրահաշվի դասընթացում յուրացված նյութերի ամրապնդմանը, ապահովում են կրկնողության կազմակերպումը և գիտելիքների խորացումը: Այս ամենը հնարավորություն է տալիս ուժեղացնելու դպրոցական մաթեմատիկական կրթության կիրառական ուղղվածությունը, նորացնել «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրերը» դասընթացի ներառարկայական կապերը:

Հետազոտական աշխատանքը ընդհանուր բովանդակային առումով կարելի է բաժանել երեք մասի: Առաջին մասը իր մեջ ընդգրկում է դասագրքում առկա ածանցյալին և նրա կիրառություններին նվիրված թեմաները, կատարվել են որոշակի լրացումներ, որոնք դասագրքի համապատասխան պարագրաֆների տեսական նյութերում չկան: Երկրորդ մասը նվիրված է Շվարցի (սիմետրիկ) ածանցյալին, տրվում է նրա սահմանումը, ցույց է տրվում, որ այն հանդիսանում է սովորական ածանցյալի ընդհանրացումը, հետևաբար ունի ավելի լայն կիրառություններ քան սովորական ածանցյալը, առաջարկվում է, որ Շվարցի ածանցյալը մակերեսորեն ուսումնասիրվի նաև դպրոցական դասընթացում: Երրորդ մասը նվիրված է ածանցյալի հանրահաշվական կիրառություններին, ընդգծվում է դրանց կարևորությունը, բերվում են այդպիսի կիրառությունների մի քանի օրինակներ:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1. Գ. Գ. Գևորգյան, Ա. Ա. Սահակյան, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Երևան 2010, էջ 84-113:

2. Գ. Գ. Գևորգյան, Ա. Ա. Սահակյան, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Երևան 2010, էջ 130-171:

3. Է. Ի. Այվազյան, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, 10-12 դասարաններ, ուսուցչի մեթոդական ձեռնարկ (ընդհանուր և հումանիտար հոսքեր), Երևան 2009, էջ 56-60:

4. Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной, М., Наука, Москва 1974, ст. 279-289: