«ԻՆՏԵՐԱԿՏԻՎ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄ»
ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ
ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ
ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2022

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ	**Կրամերի մեթոդի կիրառումը, որպես գծային հավասարումների համակարգերի խորացված ուսուցման արդյունավետության պայման**
ԱՌԱՐԿԱ	**Մաթեմատիկա**
ՀԵՂԻՆԱԿ	**Նարինե Բաղդասարյան**
ՄԱՐԶ	**Լոռի**
ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ	**ՀՀ ԿԳՄՍՆ «Վանաձորի մաթեմատիկայի եւ բնագիտական առարկաների խորացված ուսուցմամբ հատուկ դպրոց» ՊՈԱԿ**
ՂԵԿԱՎԱՐ	**Գագիկ Էմինյան**

Վանաձոր 2022

Բովանդակություն

Ներածություն

Թեմայի արդիականությունը:

8-րդ դասարանում մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ուսումնասիրվում են 2 եւ ավելի անհայտներով գծային հավասարումների համակարգերի լուծման տարբեր մեթոդներ՝ գործակիցների հավասարեցման (հանման) կանոն, Գաուսի մեթոդ, գրաֆիկական եղանակ եւ այլն [2,15]:

Հետազոտության նպատակը: Ներկայացնել Կրամերի մեթոդի էությունը և դրա արդյունավետ կիրառումը ծրագրի Excel միջոցով:

Հետազոտության խնդիրները:

- Ուսումնասիրել Կրամերի հայտնի մեթոդի էությունը
- Կոնկրետ օրինակով ներկայացնել, թե ինչպես կարելի է մեծ թվով փոփոխականներով գծային հավասարումների համակարգերի լուծումը դարձնել ավելի մատչելի եւ արագ:

Կրամերի մեթոդ

Շատ աշակերտներ դժվարանում են հատկապես 3 եւ ավելի անհայտով գծային հավասարումների համակարգերի լուծման ժամանակ:

Կրամերի մեթոդով գծային հավասարումների համակարգի լուծման մեթոդի էությունը կայանում է հետեւյալում.

Դիտարկենք երկու անհայտով երկու հավասարումների հետեւյալ համակարգը [3, 248].

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = h_1 & (1) \\ a_2 x + b_2 y = h_2 & (2) \end{cases}$$

Կատարենք հետեւյալ նշանակումները

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ (համակարգի դետերմինանտ)

Երկրորդ կարգի դետերմինանտը հաշվվում է հետեւյալ ձեւով.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Δ_x դետերմինանտը ստացվում է հիմնական դետերմինատի մեջ առաջին սյունակը փոխարինելով ազատ անդամների սյունով: Δ_y դետերմինանտը ստացվում է հիմնական դետերմինատի մեջ երկրորդ սյունակը փոխարինելով ազատ անդամների սյունով:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

Հնավոր է 3 դեպք.

Դեպք 1: Հիմնական դետերմինանտը զրոյի հավասար չէ՝ $\Delta \neq 0$:

Այս դեպքում համակարգն ունի միակ լուծում. $x = \dfrac{\Delta}{\Delta_x}$, $y = \dfrac{\Delta}{\Delta_y}$

Դեպք 2: Հիմնական դետերմինանտը հավասար է զրոյի՝ $\Delta = 0$ (այսինքն անհայտների գործակիցները համեմատական են) եւ Δ_x, Δ_y դետերմինանտներից մեկը հավասար չէ զրոյի (այսինքն՝ ազատ անդամները համեմատական չեն անհայտների գործակիցներին): Այս դեպքում համակարգը լուծում չունի:

Դեպք 3: Հիմնական դետերմինանտը հավասար է զրոյի ՝$\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$ (այսինքն՝ գոր՛ծակիցները եւ ազատ անդամները համեմատական են):

Այս դեպքում համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Բերենք օրինակ, տրված է հետեւյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 7x - 5y = -3 \end{cases}$$

Այստեղ՝ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -31$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -31$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -62$

Համակարգն ունի միակ լուծում $\mathrm{x} = \frac{\Delta}{\Delta_\mathrm{x}} = 1$ $\mathrm{y} = \frac{\Delta}{\Delta_\mathrm{y}} = 2$

Այժմ դիտարկենք արդեն 3 անհայտով հավասարումների համակարգ.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2 & (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3 & (3) \end{cases}$$

Նորից կազմվում է համակարգի հիմնական դետերմինանտը՝ համակարգի մեջ մտնող անհայտների գործակիցները դուրս գրելով. $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Երրորդ կարգի դետերմինանտը հաշվվում է հետեւյալ ձեւով.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + b_1c_2a_3 - b_1a_2c_3 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$$

Հիմնական դետերմինանտից Δ_x դետերմինանտը ստացվում է հիմնական դետերմինատի մեջ առաջին սյունակը փոխարինելով ազատ անդամների սյունով: Համանման ձեւով ստացվում են նաեւ Δ_y-ը եւ Δ_z-ը:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

Եթե հիմնական դետերմինանտի մեջ որեւէ երկու տողերի, ասենք առաջինի եւ երկրորդի համապատասխան տարրերը համեմատական լինեն, ապա այդ դեպքում (1) եւ (2) հավասարումները կամ անհամատեղելի են, կամ հանգում են միեւնույն հավասարմանը: Առաջին դեպքում հավասարումների համակարգը լուծում չունի, երկրորդ դեպքում կստանանք երեք հավասարումներով համակարգի փոխարեն ստանում են երկու հավասարումներով համակարգ՝ (1) եւ (3), այդ համակարգն էլ իր հերթին կարող է հանգել մեկ հավասարման: Ենթադրենք, որ հիմնական դետերմինանտում տողերի ոչ մի զույգ չկա, որի տարրերը համեմատական լինեն: Այս ենթադրությամբ նորից կունենանք 3 դեպք:

Դեպք 1: Հիմնական դետերմինանտը զրոյի հավասար չէ՝ $\Delta \neq 0$

Այս դեպքում համակարգն ունի միակ լուծում. $x = \dfrac{\Delta}{\Delta_x}$, $y = \dfrac{\Delta}{\Delta_y}$ $z = \dfrac{\Delta}{\Delta_z}$

Դեպք 2: Հիմնական դետերմինանտը հավասար է զրոյի ՝ $\Delta = 0$ եւ $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ դետերմինանտներից մեկը հավասար չէ զրոյի:

Այս դեպքում համակարգը լուծում չունի:

Դեպք 3: Հիմնական դետերմինանտը հավասար է զրոյի ՝

$$\Delta = 0 \text{ եւ } \Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$$

Այս դեպքում համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Օրինակ 1: Լուծել հետեւյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 3x+4y+2z=5 \\ 5x-6y-4z=-3 \\ -4x+5y+3z=1 \end{cases}$$

Այստեղ $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -24 \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 60$$

Համակարգն ունի միակ լուծում. $x = \frac{\Delta}{\Delta_x} = 1$, $\quad y = \frac{\Delta}{\Delta_y} = -2 \quad z = \frac{\Delta}{\Delta_z} = 5$

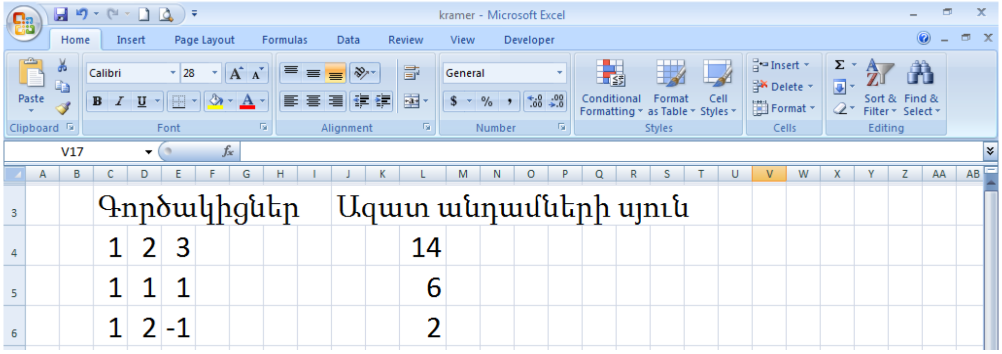
Իհարկե, կարելի է հաշվել նաեւ չորրորդ եւ ավելի բարձր կարգի դետերմինանտներ եւ դրա միջոցով լուծել գծային հավասարումների համակարգը, բայց մեր նպատակն է ցույց տալ, թե ինչպես կարող ենք օգտագործելով համակարգչային միջոցները՝ լուծել մի քանի փոփոխական պարունակող գծային հավասարումների համակարգը:

Կրամերի մեթոդի կիրառություն Excel ծրագրի միջոցով

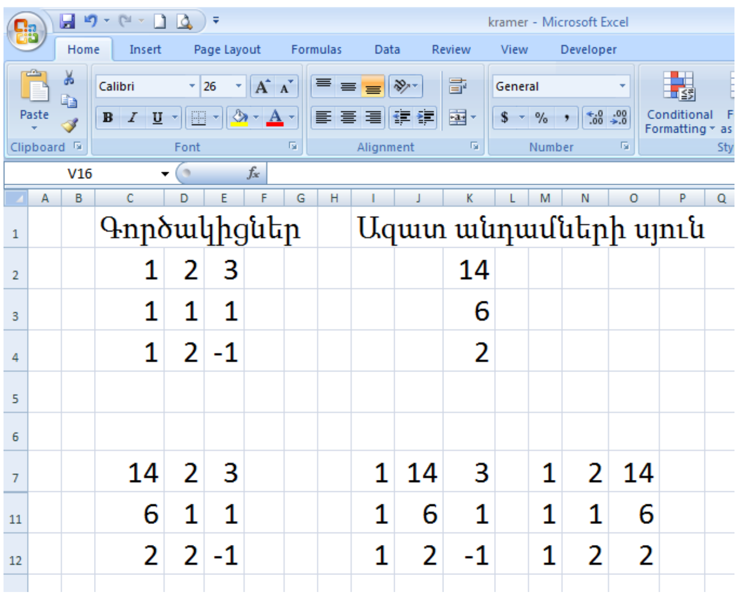
Դիտակենք հետեւյալ օրինակը.

Օրինակ 2: Տրված է հետեւյալ համակարգը, պահանջվում է լուծել այն եւ գտնել անհայտների արժեքները. $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ x+y+z=6 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$

Վարվում ենք հետեւյալ ձեւով՝ անհայտների գործակիցները առանձնացնելով գրում ենք Excel ծրագրի մեջ, առանձնացնում ենք նաեւ ազատ անդամների սյունը:

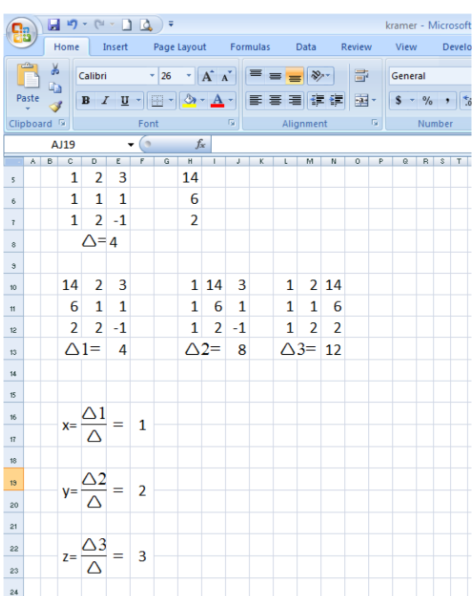


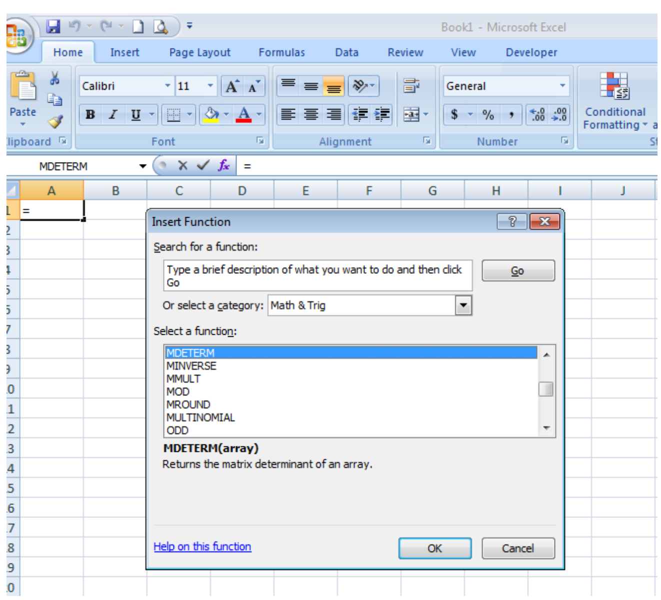
Այնուհետեւ ազատ անդամների սյունը տեղադրում ենք անհայտների գործակիցների մեջ առաջին, երկրորդ եւ երրորդ սյուների փոխարեն:



Յուրաքանչյուր սյան համար հաշվում ենք մատրիցայի որոշիչը՝ օգտվելով Excel ծրագրի Math&Trig խմբի MDETERM ֆունկցիայից [1,109]:

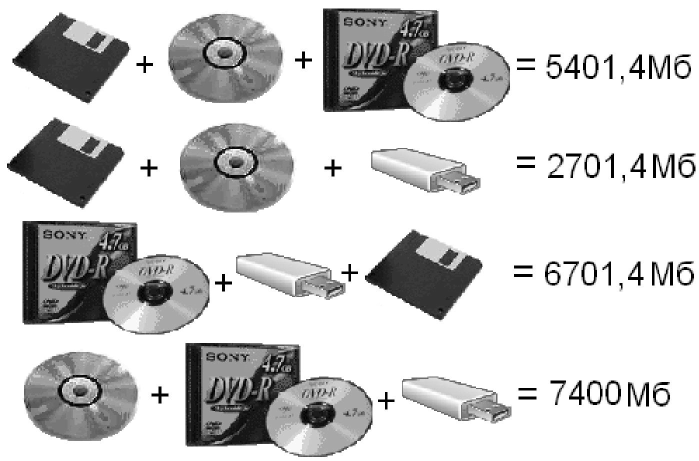
Փոփոխականների արժեքները ստանում ենք ստացված որոշիչները հիմնական մատրիցայի որոշիչին բաժանելով: Ստացված եռյակն էլ x=1, y=2, z=3 կլինի մեր համակարգի լուծումը





Օրինակ 3: Դիտարկենք հետեւյալ խնդիրը.

Գտնել USB կրիչի մեջ քանի հատ 5Mb ծավալով mp3 ֆորմատի երգ կտեղավորվի, եթե մեզ տրված է հետեւյալ նկարը.



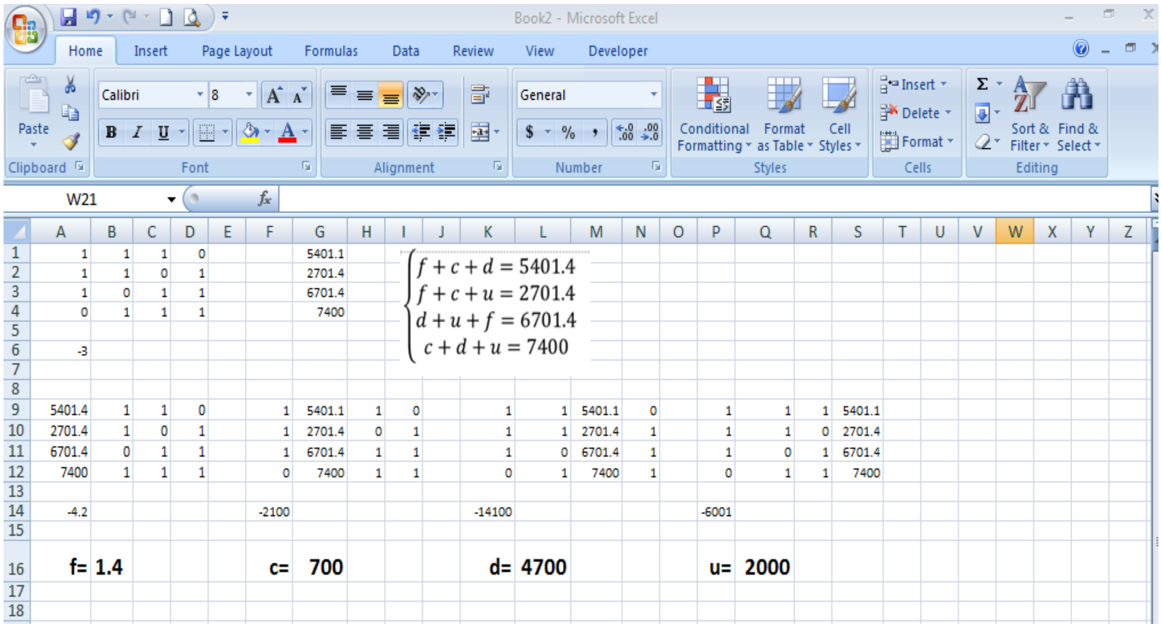
Խնդրի լուծումը հանգում է 4 անհայտով գծային հավասարումների համակարգի լուծմանը: Այս եւ նմանատիպ խնդիրների լուծման համար կարելի է օգտվել Կրամերի մեթոդից:

Մեր խնդրի մեջ յուրաքանչյուր կրիչ դիտարկելով որպես մեկ փոփոխական (floppy- f, CD- c, DVD-d, USB – u) կարող ենք ունենալ հետեւյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} f + c + d = 5401.4 \\ f + c + u = 2701.4 \\ d + u + f = 6701.4 \\ c + d + u = 7400 \end{cases}$$

Այստեղ նույնպես վարվում ենք նախորդ օրինակի նման, նախ առանձնանցնում ենք անհայտների գործակիցները, ապա ազատ անդամների սյունը տեղադրում ենք համապատասխանաբար առաջին, երկրորդ, երրորդ եւ չորրորդ սյուների փոխարեն:

Փոփոխականների արժեքները ստանում ենք ստացված որոշիչները հիմնական մատրիցայի որոշիչին բաժանելով:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	1	1	1	0			5401.1												
2	1	1	0	1			2701.4												
3	1	0	1	1			6701.4												
4	0	1	1	1			7400												
5																			
6	-3																		
7																			
8																			
9	5401.4	1	1	0		1	5401.1	1	0		1	1	5401.1	0		1	1	1	5401.1
10	2701.4	1	0	1		1	2701.4	0	1		1	1	2701.4	1		1	1	0	2701.4
11	6701.4	0	1	1		1	6701.4	1	1		1	0	6701.4	1		1	0	1	6701.4
12	7400	1	1	1		0	7400	1	1		0	1	7400	1		0	1	1	7400
13																			
14	-4.2					-2100					-14100					-6001			
15																			
16	f=	1.4				c=	700				d=	4700				u=	2000		

$$\begin{cases} f + c + d = 5401.4 \\ f + c + u = 2701.4 \\ d + u + f = 6701.4 \\ c + d + u = 7400 \end{cases}$$

Ստանալով USB կրիչի ծավալը 2000 Mb արդեն կարող ենք ասել, թե քանի 5 Mb ծավալով երգ կարող ենք տեղավորել նրա մեջ:

Եզրակացություն

Գծային հանրահաշվի մեջ Կրամերի կանոնը շատ կարևոր դեր ունի: Այն լայնորեն օգտագործվում է գծային հավասարումների համակարգերի լուծումը գտնելու համար: Կրամերի կանոնը օգնում է պարզելու արդյո՞ք համակարգը գոնե մեկ լուծում ունի, թե՞ ոչ:

Կրամերի մեթոդով գծային հավասարումների համակարգի լուծումը շատ ավելի արագ եւ արդյունավետ է, քան 8-րդ դասարանի դպրոցական դասընթացի մեջ ընդգրկված մյուս բոլոր մեթոդները (տեղադրման, գործակիցների հավասարեցման, Գաուսի մեթոդ եւ այլն), հատկապես 3 եւ ավելի փոփոխականներ պարունակող գծային հավասարումների համակարգերի լուծման համար: Մեթոդի կիրառության համար պահանջվում են մատրիցների վերաբերյալ լրացուցիչ գիտելիքներ:

Աշխատանքը ամփոփելով կարող ենք ասել, որ Կրամերի մեթոդը հասանելի է 8-րդ դասարանի աշակերտների ուսումնասիրության համար 2-րդ, 3-րդ եւ ավելի բարձր կարգի գծային հավասարումների համակարգեր լուծելիս և կարող է առաջարկվել որպես լրացուցիչ մեթոդ դասպրոցեսում կիրառելու համար:

Գրականություն

1. Դանիելյան Ս.Ս., Դանիելյան Ս.Վ., «Ինֆորմատիկա 10», բնագիտամաթեմատիկական հոսք, Երեւան, «Տիգրան Մեծ» 2010, 128 էջ:
2. Նիկոլսկի Մ.Մ., Պոտապով Մ.Կ. Հանրահաշիվ, 8-րդ դասարանի դասագիրք/թարգմանիչ և խմբագիր Ռուբեն Ավետիսյան-Եր.: Անտարես, 2012-280 էջ:
3. Վիգոդսկի Մ. Յա. «Բարձրագույն մաթեմատիկայի տեղեկագիրք» Երեւան «Լույս», 1973, 948 էջ: