Ինտերակտիվ կրթության զարգացման հիմնադրամ

Հետազոտական աշխատանք

Թեմա - Աճանցյալի ուսուցումը

Կատարող - Նունե Ղուկասյան

Ղեկավար - Արմեն Ծատուրյան

2022

Բովանդակություն

Ներածություն

«Բնության մեծ գիրքը գրված է մաթեմատիկայի լեզվով»:
Գալիլեյ

«Նա, ով չգիտի մաթեմատիկա, չի կարող իմանալ որևէ այլ գիտություն, և անգամ չի կարող բացահայտել իր տգիտությունը»:
Ռոջեր Բեկոն

Մաթեմատիկական կրթությունը բարիք է, որի իրավունքն ունի յուրաքանչյուր մարդկային էակ: Կրթության մեջ պետք է պահպանել ազատության սկզբունքը: Մաթեմատիկական կրթության կարևոր խնդիր է` մարդու մեջ որպես մտածող անհատի ինքն իր հանդեպ հետաքրքրություն արթնացնելը: Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունները շատ կարևոր դեր են կատարում ոչ միայն ուսման գործընթացում, այլ նաև անհատի` ինտելեկտուալ աշխարհի ձևավորման ու զարգացման համար: Ցավալի է, որ աշակերտների մոտ ցածր է հետաքրքրվածությունը և ավելի շատ ընկալունակությունը ֆիզիկամաթեմատիկական առարկաների նկատմամբ: Իհարկե դա պայմանավորված է շատ տարաբնույթ պատճառներով: Մաթեմատիկայի ուսման որակի բարձրացման գործում կարևոր է ձևավորել ու զարգացնել աշակերտների պրպտող միտքը, ճկուն լեզվատրամաբանական ունակությունները, ինքնուրույնությունը: Կարելի է շատ բան իմանալ, բայց խելացի չլինել: Ոչ միայն իմացող, այլև խելացի մարդ դաստիարակելն այնպիսի խնդիր է, որի լուծումը պահանջում է հատուկ ուշադրություն և հատուկ մեթոդների տիրապետում: Ուրեմն մեր հիմնական խնդիրն է` դաստիարակել խելացի, մտածող, հաստատակամ, դժվարություններից չընկճվող աշակերտներ: Առաջնորդվելով այս նպատակով` ուսուցիչը դասավանդման մեթոդիկան պետք է մշակի այնպես, որ աշակերտները ուսուցման գործընթացում ոչ թե հարկադրված լինեն անգիր անելու, այլ թափանցեն դասի էության մեջ, ինքնուրույն գտնեն իրենց մոտ առաջացած հարցերի պատասխանները: Շատ կարևոր է ճիշտ կազմակերպել աշակերտի աշխատանքը դասագրքի հետ: Դասը սովորելիս կամ խնդիրը վճռելիս աշակերտը պետք է շատ ուշադիր ընթերցի ու վերլուծի յուրաքանչյուր նախադասություն ու հասկացություն, ուսումնասիրի հիշատակված գծագրերն ու տեղեկությունները, նոր հասկացությունների իմաստները, դասի համակարգված շարադրանքը։ Ընդգծելով մաթեմատիկայի ամենակարևոր հասկացություններից մեկի արդիականությունը, հետաքրքրությունը, կիրառականությունը՝ հատկապես ֆիզիկայի որոշ բնագավառներում, սույն աշխատանքում զետեղված են «Ածանցյալ» թեմայի ձևակերպումը, հիմնադրույթները։ Ներկայացված են ածանցման օրենքները, բանաձևային տեսքը, երկրաչափական մեկնաբանությունը, կիրառական նշանակությունը։ Աշխատանքի նպատակներից է. նպաստել 21-րդ դարի քաղաքացու բնութագրին համապատասխանող անձի աշխարհայացքի ու անհատականության ձևավորմանը, բացահայտել, ամրապնդել մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի միջև գոյություն ունեցող միջառարկայական կապերը, որոնք կնպաստեն տվյալ թեմայի (գուցե նաև առարկայի) նկատմամբ հետաքրքրության բարձրացմանը։

1. Մաթեմատիկական կրթության հիմնախնդիրները

Մաթեմատիկան համընդհանուր կրթության մի կարևոր մասն է: Այն նպատակաուղղված է նպաստելու անձի ներդաշնակ զարգացմանը, ձևավորելու նրա ինտելեկտը և հիմք ստեղծելու ապագա մասնագիտական գործունեության համար: Անկասկած, անձի ներդաշնակ զարգացման կարևորագույն բաղադրիչներ են մայրենի լեզուն և հումանիտար գիտությունները: Ինտելեկտը ձևավորող առարկաների մեջ առաջին տեղում գտնվում է մաթեմատիկան:

Մաթեմատիկական կրթությունը, ինչպես և ցանկացած այլ կրթություն, ունի երեք նպատակաուղղվածություն. ուսուցում, դաստիարակություն և զարգացում: Այն պետք է իր մեջ պարունակի բովանդակային, գեղագիտական, հոգեբանական, գործնական, աշխարհայացքային գծեր: Մաթեմատիկական կրթությունը պետք է նպաստի, որպեսզի յուրաքանչյուր մարդ.

յուրացնի տրամաբանական և ալգորիթմական մտածողության տարրերը (սովորի վերլուծել, տարբերել վարկածը փաստից, քննադատել, հասկանա առաջադրված խնդրի էությունը, պլանավորել, հստակ ձևակերպել մտքերը), ինչպես նաև զարգացնի երևակայությունը և ինտուիցիան (տարածական պատկերացումներ, արդյունքը տեսնելու, լուծման ճանապարհը գլխի ընկնելու ունակություն), տիրապետի բազմաթիվ կոնկրետ մաթեմատիկական գիտելիքների, որոնք անհրաժեշտ են շրջակա աշխարհում կողմնորոշվելու և ապագա մասնագիտական գործունեության նախապատրաստվելու համար, գիտակցի մարդկային փոխհարաբերության բարոյական սկզբունքները (ինտելեկտուալ ազնվություն, օբյեկտիվություն, ճշմարտությանը հասնելու ձգտում՝ այս սկզբունքները ներդրվում են նաև այլ առարկաների միջոցով, սակայն դրանց գիտակցության գործում մաթեմատիկայի դերը շատ մեծ է և չի կարող փոխարինվել այլ առարկաներով):

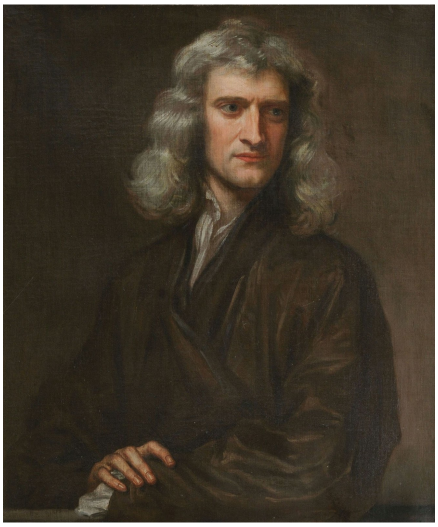
Մաթեմատիկական կրթությունը մեծ ավանդ ունի ինտելեկտի վարժեցման գործում, նույնքան կարևոր ուղեղի զարգացման համար, որքան ֆիզիկական կուլտուրան՝ ֆիզիկական առողջության համար և կոչված է նպաստելու գիտական աշխարհայացքի ձևավորմանը: Անկարելի է նշել մարդկային գործունեության որևէ բնագավառ, որտեղ հնարավոր լինի գոյատևել առանց ճշգրիտ մտածողության: Իսկ ճշգրիտ մտածել սովորելու համար կարելի է միայն ինտելեկտուալ արգելքներ հաղթահարելու միջոցով, միայն լուծելով խնդիրներ և ըմբռնելով թեորեմների ապացուցումներ: [1,14]

Օրինակ, տեքստային խնդիրները մարդկանց սովորեցնում են նպատակին հասնելու համար հաղթահարել ինտելեկտուալ դժվարություններ: Հանդիպելով կենցաղային, արտադրական, ֆինանսական ցանկացած բարդությամբ խնդիրների, մարդը պետք է վարվի այնպես, ինչպես յուրաքանչյուր բովանդակային մաթեմատիկական խնդիր լուծելիս. ըմբռնելով խնդրի էությունը, պատկերացնի առկա միջոցները և մտքի որոշ լարման միջոցով հանգի որոշակի պատասխանի: Երկրաչափական խնդիրները զարգացնում ու ձևավորում են ճշգրտություն, ուշադրության կենտրոնացում, ամենաչնչին մանրուքի դիտարկում, քննարկում, ապացուցման մեթոդի ուսուցում, կիրառում: Մաթեմատիկան կոչված է սովորեցնելու հենց այս ամենը:

Բնականաբար մաթեմատիկան, նրա մեթոդները լայնորեն ներթափանցել են գիտության և հասարակական գործունեության բոլոր ոլորտները: Այդ պատճառով անհրաժեշտ է սովորողների մեջ ձևավորել այնպիսի կարողություններ և հմտություններ, որոնցով հնարավոր լինի մաթեմատիկական գիտելիքների կիրառմամբ լուծել տեսական և կիրառական բնույթի խնդիրներ: Արտադրական ոլորտներում աշխատելու համար, հանրակրթական և միջին մասնագիտական կրթական հաստատությունների գերխնդիրն է՝ ուսուցման ընթացքում սովորողներին զինել տեսական և կիրառական բնույթի խորը գիտելիքներով, աշխատանքային գործուն կարողություններով և հմտություններով: Սակայն մաթեմատիկայի դասերին կիրառական հարցերի ուսումնասիրման հնարավորությունները սահմանափակ են: Այդ պատճառով անհրաժեշտ է բացահայտել և օգտագործել մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի կիրառական ուղղվածության հնարավորությունները:

2. Դիֆերենցիալի և ածանցյալի սկզբնավորողները

Պատկերացնենք, որ մեզանից յուրաքանչյուրը նստելով ավտոմեքենա՝ հետևում է նրա արագաչափի ցուցմունքներին: Եթե փորձենք մտածել այն մասին, թե կոնկրետ ինչ է ցույց տալիս ժամանակի տվյալ պահին արագության ցուցիչը, ապա անխուսափելիորեն կհանգենք ածանցյալի գաղափարին: Որպեսզի մոտավորապես իմանանք ավտոմեքենայի արագությունը ժամանակի ինչ-որ պահի, պետք է հաշվել նրա միջին արագությունը ժամանակի փոքր հատվածում: Նշանակում է այն արագությունը, որը մենք



փնտրում ենք, այդպիսի միջին արագությունների սահմանն է, երբ ժամանակի հատվածը ձգտում է զրոյի: Իսկ դա հենց ածանցյալն է: Այս սահմանման և ածանցյալի՝ Ֆրեշեի կողմից տրված ժամանակակից սահմանման միջև տարբերությունը մեծ չէ:

Կարելի է այս պատկերավոր տեղեկության հետ աշակերտներին հակիրճ ձևով ներկայացնել նաև ինտեգրալի գաղափարը:

Իսկ ի՞նչ է ինտեգրալը: Եթե թղթի կտորի վրա գծենք ֆունկցիայի գրաֆիկը ինչ-որ հատվածում, ապա ըստ սահմանման, այդ հատվածում ֆունկցիայի ինտեգրալը գրաֆիկից ցած ընկած պատկերի մակերեսն է, որը սահմանափակված է համապատասխան ուղիղներով:

Իսկ ինչպե՞ս հաշվել դրա մակերեսը: Օրինակ՝ կարելի է վարվել հետևյալ կերպ. ստացված պատկերը ծածկել սանտիմետրանոց քառակուսիներով և որպես առաջին մոտարկում հաշվել, թե քանի քառակուսի սանտիմետր է ամբողջությամբ ընկած պատկերի մեջ: Հետո հաշվել այն ծածկող քառակուսիների նվազագույն քանակը: Այսպիսով կտրվի ինտեգրալի գնահատականը առաջին մոտավորությամբ: Այնուհետև նույն կերպ պատկերը կարելի է ծածկել միլիմետրանոց քառակուսիներով և այսպես շարունակ: Մտովի պատկերացնելով այս ընթացքի շարունակությունը, հանգում ենք սահմանների տեսությանը, իսկ տվյալ սահմանը որոնելի պատկերի մակերեսն է: Այդ մակերեսը ֆունկցիաների տեսության մեջ կոչվում է. հատվածում ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ, որը հայտնաբերել են հանճարեղ գիտնականներ Նյուտոնը և Լայբնիցը:

Գիտակցելով այս պարզ ու բնական հասկացությունները՝ աշակերտներն արդեն ի վիճակի են հասկանալու և ճարտարագիտական հաշվարկների սկզբունքները, և երկնային մարմինների շարժումների օրենքները, և Տիեզերքի դինամիկան, քանի որ դրանք բոլորը հիմնված են ածանցյալի և ինտեգրալի հասկացությունների վրա:

Սովորեցնել է պետք իրերի էությունը հասկանալը, ամեն անգամ հիմնավորելով անցած նյութը նրա ինչ-որ նշանակությամբ՝ կամ կիրառական, կամ գիտական, կամ էթիկական:

Նոր ժամանակների գիտության ակունքներում երկու խոշոր անուններ են՝ Նյուտոն և Լայբնից: Նրանք երկուսն էլ դրեցին մաթեմատիկական անալիզի հիմքերը։ Նյուտոնը անալիզը ստեղծեց որպես բնագիտության ուսումնասիրման միջոց։ Եթե ի մի բերենք այս ուղղությամբ նրա թանկարժեք ասույթները, ապա կարող ենք ձևակերպել այսպես՝ աշխարհը կառավարվում է դիֆերենցիալի հավասարումներով։

Լայբնիցին հետաքրքրում էր ոչ միայն աշխարհի, այլև մտածողության կառուցվածքը։ Նա փորձում էր կառուցել միասնական լեզու մտքերն արտահայտելու համար և գտնում էր, որ տարբեր դատողությունների ճշմարտացիությունն ստուգելը կարելի կլինի վստահել «հաշվիչ մեքենային»։ Լայբնիցը մարդկությանը տվեց այդ նոր գիտական լեզվի շատ բառեր։ Նա գործածության մեջ մտցրեց այնպիսի բառեր, ինչպիսիք են դիֆերենցիալը և ինտեգրալը։ Դրանք արդեն իրենց նախնական իմաստներով, որպես «տրոհում» և «միավորում», բացահայտում են դիֆերենցման և ինտեգրման էությունը։ [1,16]

3. Ածանցյալը որպես դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական հասկացություն

Դիֆերենցիալ հաշիվը մաթեմատիկական անալիզի բաժին է, որն ուսումնասիրում է ածանցյալի և դիֆերենցիալի հատկությունները, հաշվման եղանակները և կիրառությունները։ Դիֆերենցիալ հաշիվը կազմավորվել է Իսահակ Նյուտոնի և Գոթֆրիդ Լայբնիցի աշխատանքների հիման վրա, որոնցում ձևակերպվել են դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական դրույթները և ցույց տրվել ինտեգրման և դիֆերենցման փոխհակադարձ բնույթը։ Հետագայում դիֆերենցիալ հաշիվը սկսել է զարգանալ ինտեգրալ հաշվի հետ սերտ կապված։ Սովորողներին կարելի է ներկայացնել դիֆերենցիալի գաղափարը շատ հակիրճ և մակերեսորեն. $f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը նշանակվում է dy կամ $df(x)$։ Դիֆերենցիալը ֆունկցիայի աճի գլխավոր (գծային) մասն է այն առումով, որ ֆիքսված x_0-ի դեպքում dy-ը գծայնորեն է կախված Δx-ից և $\Delta y - dy$ տարբերությունը անվերջ փոքր է Δx-ի համեմատ։ Ածանցյալի և դիֆերենցիալի գաղափարները էապես տարբեր են. տվյալ կետում ածանցյալը թիվ է, իսկ դիֆերենցիալը՝ Δx-ի նկատմամբ գծային ֆունկցիա:

Այժմ փորձենք ուսուցանել ֆունկցիայի ածանցյալի գաղափարը: Ֆունկցիայի ածանցյալը ֆունկցիայի հետազոտման տարր է, դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական հասկացություններից: Այն բնութագրվում է որպես ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը տվյալ կետում: Այն սահմանելու համար աշակերտները պետք է վերհիշեն հաջորդականության սահմանի, անընդհատ ֆունկցիայի գաղափարը, ի՞նչ է զուգամետ հաջորդականությունը, ի՞նչ է անվերջ փոքրը:

Ենթադրենք ունենք որևէ $y = f(x)$ անընդհատ ֆունկցիա, x_0-ն պատկանում է նրա որոշման տիրույթին, h_n-ը անվերջ փոքր է: Եթե ցանկացած h_n անվերջ փոքրի համար այս հաջորդականությունը զուգամետ է՝ $\frac{f\left(x_0+h_n\right)-f\left(x_0\right)}{h_n}$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ածանցելի x_0 կետում, իսկ վերոհիշյալ հաջորդականության սահմանը՝ $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ x_0 կետում և նշանակվում է $f'\left(x_0\right)$.

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{f\left(x_0+h_n\right)-f\left(x_0\right)}{h_n}, \quad \text{որը հակիրճ գրվում է.} \quad f'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}:$$

Այնուհետև ուսուցանվում են ածանցման կանոնները և տրվում են տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը:

Օրինակ՝ ապացուցենք, որ $(\sin x)' = \cos x$, օգտվելով ֆունկցիայի ածանցյալի վերոհիշյալ բանաձևից:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(x_0+\Delta x\right)-\sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x_0+\Delta x-x_0}{2}\cos\frac{x_0+\Delta x+x_0}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos x_0}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x_0,$$ օգտվեցինք հետևյալ նշանավոր սահմանից.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 :$$

Այստեղ պետք է նպաստել աշակերտների իմացական գործունեության ակտիվացմանը, էվրիստիկական մտածողության զարգացմանը, ապահովել մատչելիությունը, գիտականությունը, դիտողականությունը, գիտելիքների կայունությունը, նյութի գրավիչ ու հետաքրքրաշարժ լինելը: Աշակերտներին ծանոթացնելով տվյալ ֆունկցիայի ածանցյալն արտածելու գաղափարին, արժե տեղեկացնել, որ տարրական ֆունկցիաներից շատերի ածանցյալների ստացման ընթացքը հնարավոր չէ կատարել դպրոցական գիտելիքների սահմաններում: Քանի որ դրանցից շատերը հիմնվում են մաթեմատիկական անալիզում հայտնի «նշանավոր սահմաններ»-ի կիրառման վրա:

Ներկայացնենք նաև սովորողներին արդեն ծանոթ բարդ ֆունկցիայի՝ $y = f(g(x))$ ածանցման բանաձևը. $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$:

Հարկ է տեղեկացնել, որ համապատասխան թեման ուսումնասիրելիս ավելի հաճախ հանդիպում է հենց բարդ ֆունկցիան, և կարևոր է լավ իմանալ նրա ածանցման ալգորիթմը:

4. Ֆունկցիայի կրիտիկական կետեր, էքստրեմումներ, աճման և նվազման միջակայքեր

Ածանցյալի գաղափարի նկատմամբ հետաքրքրությունը կավելանա, եթե սովորողները իմանան և ուսուցանեն այն անմիջական կապը, որը գոյություն ունի ֆունկցիայի ածանցյալի և նրա աճման, նվազման միջակայքերի, մեծագույն ու փոքրագույն արժեքների միջև:

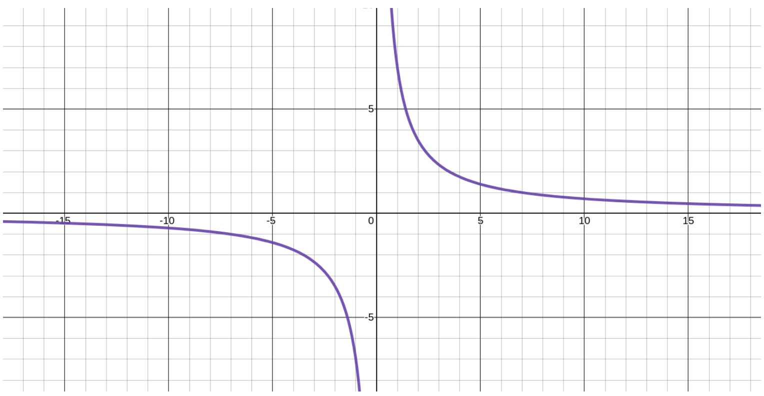
4.1 Ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքեր

Շատ կարևոր է հետևյալ թեորեմը, որը կոչվում է նաև ֆունկցիայի աճման (նվազման) բավարար պայման:

Թեորեմ: *Եթե որևէ միջակայքի բոլոր կետերում f(x) անընդհատ ֆունկցիայի համար f΄(x)>0 (f΄(x)<0), ապա այդ միջակայքում ֆունկցիան աճում (նվազում) է:*

Բերենք օրինակներ.

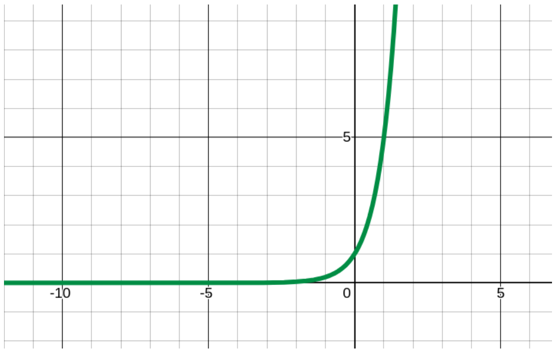
ա) $f(x) = \frac{7}{x}$, գտնենք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը. $D(f) = (-\ \infty, 0) \cup (0, +\ \infty)$ Հաշվենք ֆունկցիայի ածանցյալը. $f'(x) =- \frac{7}{x^2}$, նկատենք, որ որոշման տիրույթի ցանկացած կետում f΄(x)<0, հետեւաբար ֆունկցիան



նվազող է նշված միջակայքերից յուրաքանչյուրում: Դրանում կարելի է համոզվել նաև կառուցելով ֆունկցիայի գրաֆիկը:

բ) $f(x) = 5^x$

$f'(x) = 5^x ln5$, նկատենք, որ $f'(x) > 0$, այսինքն ֆունկցիան աճում է իրական առանցքի վրա:



4.2 Ֆունկցիայի կրիտիկական կետեր

Ածանցյալի հետ սերտորեն առնչվող հիմնական գաղափարներից է ֆունկցիայի կրիտիկական կետը: Այն սահմանվում է հետևյալ կերպ.

Սահմանում: *$f(x)$ ֆունկցիայի համար x_0 կետը կոչվում է կրիտիկական կետ, եթե այն պատկանում է որոշման տիրույթին և $f'(x_0) = 0$ կամ $f'(x_0)$-ը գոյություն չունի:*

Սովորողների հետաքրքրությունը թեմայի նկատմամբ մեծացնելու համար կարելի է շեշտել, որ կրիտիկական կետը ֆունկցիայի համար կատարում է «ճակատագրական» դեր: Ստացած գիտելիքները հիմք են հանդիսանում հետագայում լավ հասկանալու ֆունկցիաների տեսությունը, հմտորեն գծելու նրանց գրաֆիկները:

4.3 Ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր

Այս տեսության հաջորդ գաղափարը ֆունկցիայի էքստրեմումի (min, max) կետերն են:

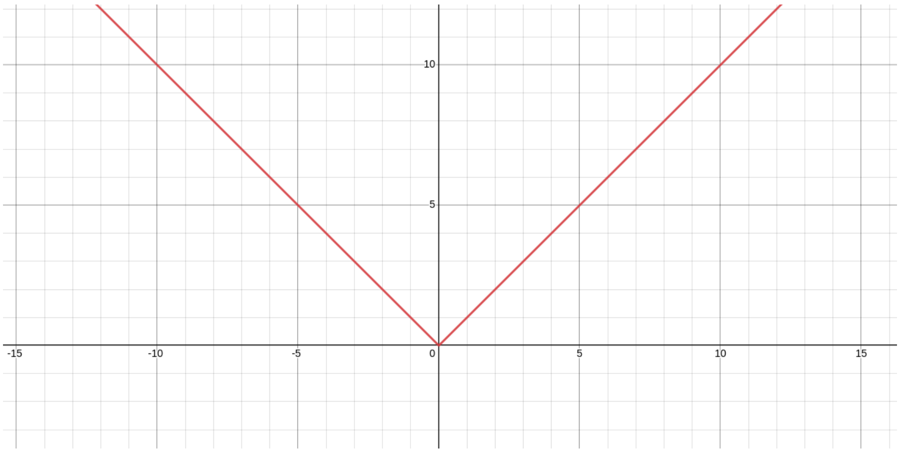
Այստեղ պետք է ուժեղացնել դասընթացի ու մեթոդիկայի հանրակրթական ուղղվածությունը, ուսուցմանը տալ նաև գործնական բնույթ:

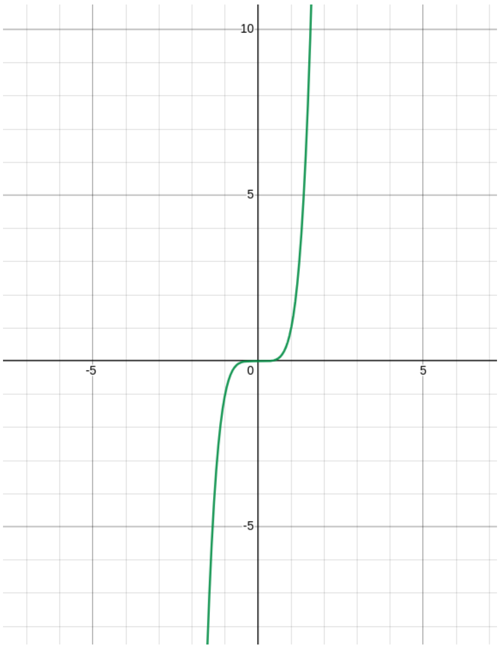
Ձևակերպենք մի թեորեմ՝ վերոհիշյալ գաղափարի վերաբերյալ.

Թեորեմ: *Եթե x_0 կետի վրայով ձախից աջ շարժվելիս ֆունկցիայի ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասականի, ապա x_0-ն մաքսիմումի (max) կետ է, իսկ եթե փոխվում է բացասականից դրականի, ապա x_0-ն մինիմումի (min) կետ է:*

Բերենք օրինակներ.

ա) $f(x) = |x|$: Նկատենք, որ $x_0 = 0$-ն կրիտիկական կետ է: Դպրոցական դասընթացում առանց ապացույցի տրվում է, որ այդ կետում ածանցյալը գոյություն չունի, չնայած որ այն ֆունկցիայի min-ի կետ է: Դրանում կարելի է համոզվել կառուցելով գրաֆիկը:





բ) $f(x) = x^5$: Հաշվենք ածանցյալը.

$f'(x) = 5x^4$, նկատենք, որ $f'(0) = 0$, հետևաբար 0-ն կրիտիկական կետ է: Ածանցյալի բանաձևից երևում է, որ $f'(x) > 0$ $(x \neq 0)$, ուստի ֆունկցիան աճող է ամբողջ թվային ուղղի վրա, բայց 0-ն էքստրեմումի կետ չէ, քանի որ ածանցյալը նշանը չի փոխում: Այսպիսի կետերը կոչվում են շրջման կետեր. այս կետում ֆունկցիայի գրաֆիկը իր կորությունը փոխում է ուռուցիկությունից՝ գոգավոր:

Ցանկալի կլիներ շրջման կետի մասին գոնե շատ հակիրճ տեղեկատվություն լիներ դասագրքում, քանի որ սովորաբար աշակերտների մոտ առաջանում է մշուշոտ ու թյուր պատկերացում կրիտիկական և էքստրեմումի կետերի մասին:

գ) $f(x) = sin\, x\ - x$

Գտնենք որոշման տիրույթը և ածանցյալը.

$D(f) = R\,,\ \ f'(x) = cos\, x\ - 1$

Նկատենք, որ $f'(x)$-ի արժեքներն են. [-2,0], հետևաբար ըստ (4.1)-ի թեորեմի՝ $f'(x)$-ը նվազող ֆունկցիա է: Գտնենք կրիտիկական կետերը.

$$cos\, x\ - 1\ = 0$$

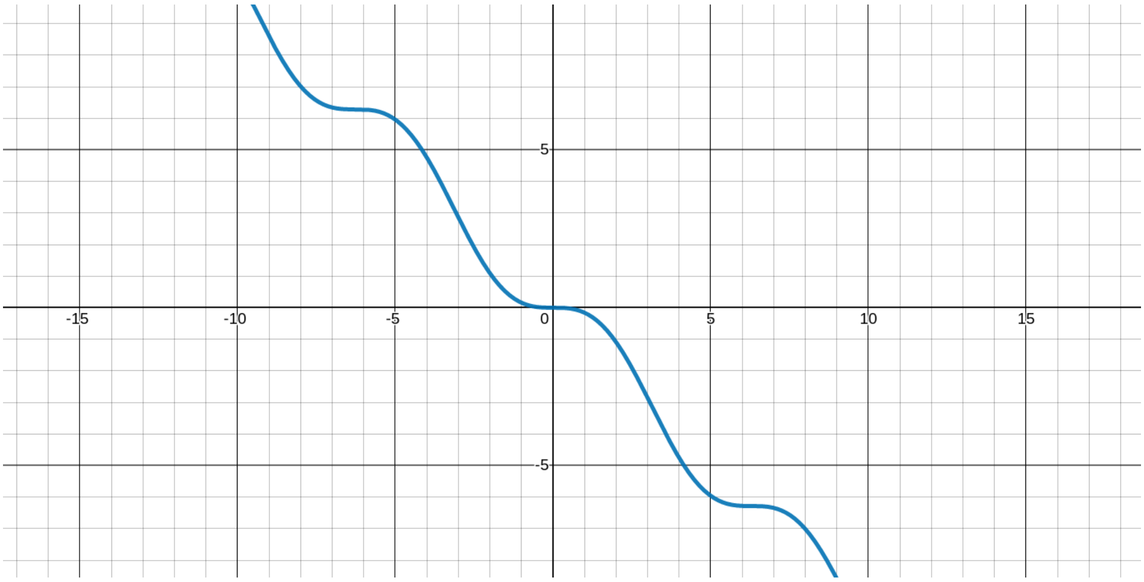
$$cos\, x\ = 1$$

$$x\ = 2\pi k, k\ \in\ Z$$

նկատենք, որ այս ֆունկցիայի վարքը կրիտիկական կետերում նման է *բ)* դեպքին: Կատարենք որոշ հաշվարկներ.

$$f(0) = 0, \quad f(-x) = -f(x)$$

Հետևաբար տրված ֆունկցիան կենտ է և գրաֆիկը համաչափ է (0,0)-ի նկատմամբ: Կառուցենք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

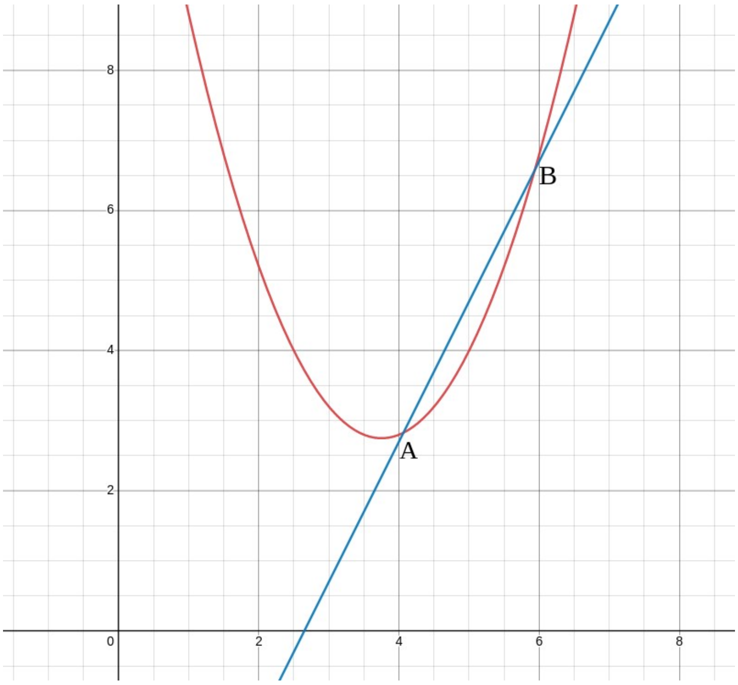


Քանի որ կրիտիկական կետերում $(2\pi k)$ ածանցյալն իր նշանը չի փոխում, ապա դրանք ոչ թե էքստրեմումի, այլ` շրջման կետեր են:
Ստեղծելով պրոբլեմային իրավիճակներ` պետք է աշակերտներին սովորեցնել, ուղղորդել, թե ինչպես կարելի է հաղթահարել և գտնել լուծման ճանապարհը:

5. Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը

Փորձենք հասկանալ ածանցյալի երկրաչափական իմաստը: Ենթադրենք տրված է որևէ միջակայքում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիա: Ֆունկցիայի գրաֆիկի հատողը սահմանվում է այսպես. դա նրա գրաֆիկի ցանկացած երկու կետով անցնող ուղիղն է: Ուղղի կազմած անկյունը աբսցիսների առանցքի (OX) հետ ընդունված է համարել այդ ուղղի և (OX)-ի դրական կիսաառանցքի կազմած անկյունը:

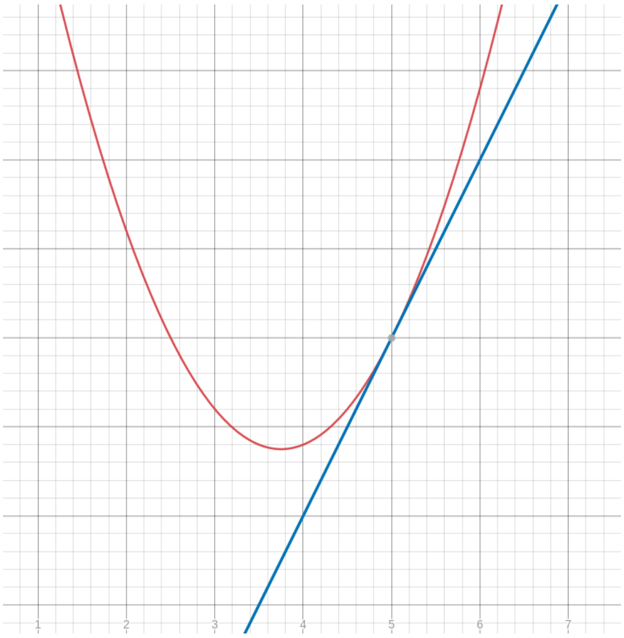
Ենթադրենք $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ կետը պատկանում է ֆունկցիայի գրաֆիկին, x_0-ին տանք Δx աճ և դիտարկենք գրաֆիկին պատկանող $B\left(x_0 + \Delta x, f\left(x_0 + \Delta x\right)\right)$ կետը: Կառուցենք ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը.



Նայելով գծագրին՝ AB հատողի և OX առանցքի կազմած α անկյան մասին կարող ենք ասել հետևյալը.

$$tg\ \alpha = \frac{f(B)-f(A)}{\Delta x} :$$

Հիմա տանք ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի սահմանումը.



Սահմանում: *Ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողը x_0 կետում ՝ այդ կետով անցնող հատողների սահմանային դիրքն է, երբ $(x_0 + \Delta x)$ աբսցիսով կետը գրաֆիկի վրայով սահելով ձգտում է x_0-ին, երբ $\Delta x \to 0$:*

Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից, ստացվում է.

$$tg\ \alpha = f'(x_0)$$

Նկատենք, որ որևէ ուղղի k անկյունային գործակիցը նույն $tg\ \alpha$-ն է, հետևաբար կարող ենք ասել, որ շոշափողի անկյունային գործակիցը հավասար է ֆունկցիայի ածանցյալին՝ տվյալ կետում. $k = f'(x_0)$:

Ուսուցանելով տվյալ նյութը, պետք է փորձենք բարձրացնել հետաքրքրությունը ածանցյալի վերաբերյալ, զարգացնել տեսողական և ճանաչողական հմտություններ: Համադրելով մեր ունեցած փաստերը, կարելի է եզրակացնել, որ ածանցյալի գաղափարը սովորողին հնարավորություն կտա որոշելու ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած կետում տարված շոշափողի և OX-ի կազմած անկյունը, ինչպես նաև կազմելու շոշափողի հավասարումը գրաֆիկի որևէ կետում:

Օրինակ.

Խնդիր: Գտնել $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկին $x_0 = \frac{1}{4}$ կետում տարված շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունը:

Լուծում: Հաշվենք ածանցյալը. $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$: Օգտվենք. $tg\,\alpha = f'(x_0)$ բանաձևից: $tg\,\alpha = f'\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - 2 = -1$, հետևաբար $\alpha = 135^{\circ}$:

6. Ածանցյալի կիրառումը ֆիզիկայում

Մաթեմատիկայի դասերին միջառարկայական կապերի կիրառումը հանդիսանում է մաթեմատիկայի ուսուցման կիրառական ուղղվածությանը հասնելու կարևոր միջոց: Մաթեմատիկայի օբյեկտը ողջ աշխարհն է, և այն ուսումնասիրում են մյուս բոլոր գիտությունները: Միջառարկայական կապերը պետք է դիտարկել ոչ միայն որպես «կամրջակներ» տարբեր ուսումնական առարկաների միջև, այլև որպես ուսուցման ամբողջական համակարգի կառուցում՝ գիտական իմացության մեթոդների և գիտելիքների բովանդակության ընդհանրության հիման վրա: Աշխատանքային փորձը ցույց է տալիս, որ տարբեր ուսումնական առարկաներում գիտելիքների և մեթոդների փոխադարձ կապերը ոչ միայն կիրառական ու պրակտիկ նշանակություն ունեն, այլև արտացոլում են գիտության զարգացման ժամանակակից միտումները, նպաստավոր պայմաններ են ստեղծում գիտական աշխարհայացքի ձևավորման համար: Միջառարկայական կապերի ներգրավումը բարձրացնում է ուսուցման գիտականությունը, մատչելիությունը, տեսությունը հագենում է պրակտիկ բովանդակությամբ: Մաթեմատիկայի ուսուցման մեջ միջառարկայական կապերի իրականացումը կապված է տարբեր ուսումնական բնագավառներում նույնանուն հասկացությունների մեկնաբանության ու նրանց ուսումնասիրության ժամանակի համաձայնեցման հետ: [2,36]

Այս թեման քննարկելիս սովորողները պետք է առանձնացնեն և ներկայացնեն այնպիսի ֆիզիկական մեծություններ, որոնք փոփոխվում են ժամանակի ընթացքում: Ի՞նչ գիտեն, արդյոք ֆիզիկայից՝ այս թեմային առնչվող: Փորձեն վերհիշել այն ֆիզիկական մեծությունները, որոնք բնութագրում են սկզբնական մեծության փոփոխությունը, այլ կերպ ասած՝ գտնեն ածանցյալ-ֆունկցիան: Արժե խոսել հետևյալ ֆիզիկական մեծությունների մասին:

Օրինակ: Եթե նյութական կետը կատարում է հավասարաչափ կամ ոչ հավասարաչափ շարժում, ապա պարզ է, որ նրա անցած ճանապարհը ֆունկցիա է ժամանակից՝ $S(t)$: Ըստ 3-րդ բաժնում ձևակերպված դատողությունների՝ կարելի է համոզվել, որ շարժման ակնթարթային արագությունը ժամանակի որևէ t_0 պահին որոշվում է այսպես.

$$V\left(t_0\right) = S'\left(t_0\right):$$

Նման դատողություններով ստացվում են հետևյալ փաստերը.

- շարժման արագությունը տեղափոխության ածանցյալն է.

$$V = S'(t)$$

- արագացումը արագության ածանցյալն է.

$$a = V'(t)$$

- հոսանքի ուժը հավասար է լայնական հատույթով անցնող լիցքի ածանցյալին.

$$I = q'(t)$$

- անկյունային արագությունը հավասար է շառավիղ-վեկտորի գծած անկյան ածանցյալին.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \omega'(t)$$

- հզորությունը հավասար է տվյալ մեխանիզմի կատարած աշխատանքի ածանցյալին.

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} = A'(t)$$ [5,6]

7. Ածանցյալի կիրառությունները

Մանկավարժական մտքի առաջնային հարցերից մեկը դպրոցականների ճանաչողական գործունեության ակտիվացման խնդիրն է: Առկա է այն ամենալուրջ թերությունը, որ աշակերտից պահանջվում է առավելապես վերարտադրող մտածողություն: Ավելի հաճախ ուսուցիչն աշակերտին պետք է հաղորդի ոչ թե յուրացման ենթակա պատրաստի գիտելիքներ, այլ նրան հասցնի համապատասխան առաջադրանքներն ու կանոնները, եզրահանգումները ինքնուրույն հայտնագործելու վիճակի, փորձի ակտիվացնել նրանց ճանաչողական հմտությունները, ստեղծի պրոբլեմային իրավիճակներ, ապահովվի ուսումնական ինֆորմացիայի գրավիչ մուտքը:[3,4]

Մաթեմատիկական անալիզի տարրերի, մասնավորապես ածանցյալի հասկացության և նրա կիրառությունների ուսումնասիրությունները մշտապես հիմնվում են հանրահաշվում ուսուցանվող հասկացությունների և փաստերի վրա։ Նկատենք, որ մաթեմատիկական անալիզի տարրերն օգնում են հանրահաշվական խնդիրների լուծմանը, հատկապես ածանցյալի կիրառմամբ կատարվում են նույնական ձևափոխություններ, ապացուցվում են նույնություններ, լուծվում են որոշ հավասարումներ, անհավասարումներ և դրանց համակարգեր, համեմատվում են որոշ արտահայտություններ և այլն։ Սակայն դպրոցական մաթեմատիկայի ժամանակակից դասընթացում ածանցյալի հանրահաշվական կիրառությունները գրեթե չեն դիտարկվում։ Մինչդեռ ածանցյալի կիրառմամբ հանրահաշվական խնդիրների լուծումներն ամրապնդում են անալիզի հիմունքների և հանրահաշվի միջև եղած միջառարկայական կապերը, նպաստում են տվյալ թեմաների ուսումնասիրմանը հատկացված դասերի աշխուժացմանը, խթանում են ածանցյալի ուսումնասիրման ընթացքում ձեռք բերված գիտելիքները և կարողությունները միավորելու սովորողների մաթեմատիկական գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների ընդհանուր համակարգին, ծառայում են հանրահաշվի դասընթացում յուրացրած նյութերի ամրապնդմանը, ապահովում են կրկնողության կազմակերպումը և գիտելիքների խորացումը։ Այս ամենը հնարավորություն է տալիս ուժեղացնելու դպրոցական մաթեմատիկական կրթության կիրառական ուղղվածությունը, արդիականացնել «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» դասընթացի ներառարկայական կապերը։

Այստեղ կդիտարկվեն ածանցյալի կիրառմամբ լուծվող հանրահաշվական խնդիրներ, որոնք կարելի է ուսուցանել ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացի սահմաններում։ Այդ խնդիրների մի մասը դժվարությամբ է լուծվում կամ բոլորովին չի լուծվում ավանդական մեթոդներով, սակայն ածանցյալի կիրառմամբ դրանք հեշտությամբ են լուծվում։[4,3]

Նախքան խնդիրներին անցնելը, ձեակերպենք հետևյալ պնդումները.

1. Եթե որևէ միջակայքի վրա $f'(x) = 0$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան հաստատուն է այդ միջակայքի վրա։
2. Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները միջակայքի վրա ածանցելի են, ապա $f'(x) = g'(x)$ պայմանից հետևում է, որ $f(x) - g(x) = c$։

Օրինակ 1: Պարզեցնել արտահայտությունը.

$$arc\sin x + 3arc\cos x + arc\sin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \text{ երբ } -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}:$$

Լուծում: Դիտարկենք $f(x) = arc\sin x + 3arc\cos x + arc\sin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ ֆունկցիան: Հաշվենք ածանցյալը.

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\left(1-2x^2\right)}{\left|1-2x^2\right|\sqrt{1-x^2}} :$$

Նկատենք, որ եթե $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, ապա $f'(x) = 0$: Ըստ առաջին պնդման՝ այդ միջակայքում ֆունկցիան հաստատուն է: Այդ հաստատունը գտնելու համար x –ին տանք որևէ արժեք, ենթադրենք $x = 0$, հաշվենք $f(0) = \frac{3}{2}\pi$: Այսինքն տրված արտահայտության արժեքը հավասար է $\frac{3}{2}\pi$:

Պատ. $\frac{3}{2}\pi$

Օրինակ 2: Քանի՞ իրական արմատներ ունի հավասարումը. $x^5 + x^3 + 1 = 0$:

Լուծում: Դիտարկենք $f(x) = x^5 + x^3 + 1$, ֆունկցիան: Հաշվենք ածանցյալը.

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$, նկատենք, որ $f'(x) \geq 0$, հետևաբար ֆունկցիան աճող է, դա նշանակում է, որ նրա գրաֆիկը աբսցիսների առանցքը կարող է հատել միայն մեկ կետում: Հաշվենք $f(0) = 1$, $f(-1) = -1$, քանի որ այն ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա [-1,0] միջակայքի ինչ-որ կետում $f(x) = 0$:

Պատ. ունի մեկ լուծում

Օրինակ 3: Լուծել հավասարումը. $\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x - 2} = 2$:

Լուծում: Դիտարկենք $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x - 2}$ ֆունկցիան: Որոշման տիրույթն է. $[2, \infty]$: Հաշվենք ածանցյալը. $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$, քանի որ $x \geq 2$, ապա $f'(x) > 0$, հետևաբար ֆունկցիան աճող է: Հետևաբար $f(x) \geq f(2)$:

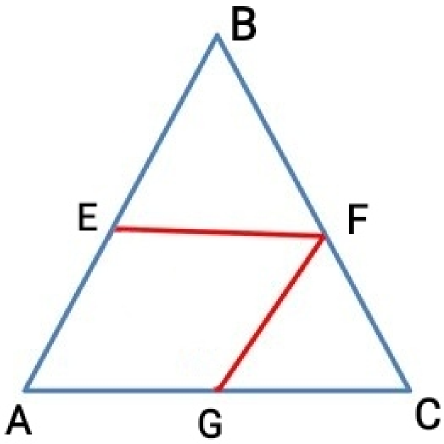
Հաշվենք $f(2) = 3$, այսինքն $f(x) \geq 3$:

Պատ. լուծում չունի

Օրինակ 4: Տրված է a հիմքով և h բարձրությամբ ABC հավասարասրուն եռանկյունը: Ապացուցել, որ նրան ներգծված զուգահեռագծերից մեծագույն մակերես ունի այն զուգահեռագիծը, որի հիմքը հավասար է $\frac{a}{2}$:

Ապացույց:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.



զուգահեռագծի հիմքը նշանակենք`$x$ $(x \in (0, a))$ այդ հիմքին տարված բարձրությունը` h_x ,

գրենք զուգահեռագծի մակերեսի բանաձևը, որը ֆունկցիա է x-ից կախված.

$$S(x) = x \cdot h_x :$$

Փորձենք h_x-ը արտահայտել x-ով: Նկատենք, որ $\triangle BEF$ նման է $\triangle ABC$, հետևաբար կազմենք համեմատություն.

$$\frac{x}{a} = \frac{h_{BEF}}{h_{ABC}}, \quad \frac{x}{a} = \frac{h-h_x}{h}, \quad \frac{x}{a} = 1 - \frac{h_x}{h}$$

$$\frac{h_x}{h} = 1 - \frac{x}{a}, \quad h_x = h \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) :$$

Ստացված արտահայտությունը տեղադրենք զուգահեռագծի մակերեսի բանաձևի մեջ.

$$S(x) = h \cdot \left(x - \frac{x^2}{a}\right),$$

ածանցենք և գտնենք կրիտիկական կետը.

$$S'(x) = h \cdot \left(1 - \frac{2x}{a}\right)$$

$$S'(x) = 0, \quad x = \frac{a}{2} :$$

Քանի որ ֆունկցիայի ածանցյալը $x = \frac{a}{2}$ կետում փոխում է իր նշանը դրականից բացասականի, ապա այդ կետը max-ի կետ է: Այսինքն այդ կետում զուգահեռագծի մակերեսը ընդունում է մեծագույն արժեք:

Եզրակացություն

Բնագիտական բոլոր առարկաների ուսումնասիրությունը փոխադարձաբար կապված է մաթեմատիկայի հետ: Մաթեմատիկան սովորողներին տալիս է գիտելիքների ու կարողությունների համակարգ, որոնք անհրաժեշտ են առօրյա կյանքում և մարդու աշխատանքային գործունեությունում, ինչպես նաև կարևոր են կից առարկաների ուսումնասիրման համար (ֆիզիկա, քիմիա, աշխարհագրություն և այլն): Այսպիսով, սկսելով ուսումնասիրել նոր ուսումնական առարկա, աշակերտներն արդեն ունեն անհրաժեշտ մաթեմատիկական ապարատ՝ կից առարկաներից խնդիրներ լուծելու համար: Մաթեմատիկայից ունեցած գիտելիքների հիման վրա սովորողների մոտ ձևավորվում են ընդհանուր առարկայական, հաշվարկային-չափողական կարողություններ: Գոյություն ունի նաև հակադարձ կապ: Կից առարկաներն ուսումնասիրելիս դրսևորվում է սովորողների ստացած մաթեմատիկական գիտելիքների ու կարողությունների պրակտիկ կիրառումը, ինչը նպաստում է սովորողների մոտ գիտական աշխարհայացքի, մաթեմատիկական մոդելավորման մասին պատկերացումների ձևավորմանը՝ որպես աշխարհի ճանաչման ընդհանրացված մեթոդի:

Բնագիտամաթեմատիկական ուսումնական առարկաների հիմնական կառուցվածքային տարրերը՝ գիտական փաստերը, հասկացությունները, օրենքները, տեսությունները, հետազոտական մեթոդները, կիրառական հարցերը փոխկապակցված են: Օրենքներն արտահայտում են հասկացությունների միջև կապերն ու հարաբերությունները: Ամեն մի տեսություն իրենից ներկայացնում է հասկացությունների որոշակի համակարգ: Օրենքների ու տեսությունների յուրացումը հնարավորություն է տալիս վերացական մտածողության միջոցով կատարել ընդհանրացումներ: Բնագիտամաթեմատիկական հասկացությունները յուրացնելու, դրանք կիրառելու, բնության երևույթների մասին կարծիք հայտնելու, իր կարծիքը փաստերով հիմնավորելու կարողությունների ձևավորման արդյունավետ միջոց է միջառարկայական կապերի իրականացումը:

Բնագիտամաթեմատիկական առարկաների ուսուցման գործընթացում միջառարկայական կապերն իրականացվում են տարբեր եղանակներով: Դրանցից առաջինը ուսուցման գործընթացում անդրադարձ ներառարկայական կապերի օգտագործումն է: Այն, ինչ սովորողներն ուսումնասիրել են նախորդ դասերին, պետք է կրկնվի, ամրապնդվի, դառնա կարողություն, հիմք, որի հիման վրա կառուցվի նոր նյութի յուրացումը:

Միջառարկայական կապերի իրականացման մյուս կարևոր եղանակը ձեռք բերված գիտելիքների, կարողությունների, հմտություններ փոխանցումն է: Յուրաքանչյուր գիտություն իր մեջ ներառում է այլ գիտություններից վերցրած հասկացություններ: Օրինակ, ֆիզիկական շատ երևույթների հատկություններ սովորողները հասկանում և յուրացնում են մաթեմատիկական վերլուծություններ անելուց հետո: Ֆիզիկական երևույթները նկարագրող հասկացությունների ֆունկցիոնալ կախվածություններն արտահայտվում են գրաֆիկական մեթոդով: Օրինակ, ուղղագիծ հավասարաչափ արագացող շարժման դեպքում արագության պրոյեկցիայի՝ ժամանակից կախման բանաձևն է. $V = V_0 + at$, որը որոշող գրաֆիկը նման է $y = kx + b$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկին: Կարելի է կառուցել այդ գրաֆիկները, համեմատել իրար հետ և անել համապատասխան եզրակացություններ:

Ուսումնառության ընթացքում սովորողների մոտ ձևավորվում են մտային գործունեության համընդհանուր մեթոդներ ու հնարներ՝ վերլուծում, համադրում, ընդհանրացում և այլն: Իսկ ուսումնական գործունեության ամեն մի հնար իր վրա կրում է հարակից առարկաների հարաբերությունների համակարգը, տարբեր հասկացությունների հիման վրա մշակվում են միջառարկայական հասկացությունները:

Ներկայումս արդիական է գիտությունների ինտեգրացիան, աշխարհի ընդհանուր պատկերի մասին առավել ճշգրիտ պատկերացում ստանալու ձգտումը: Այդ գաղափարներն արտացոլում են գտնում ժամանակակից դպրոցական կրթության հայեցակետում: Բայց անկարելի է մեկ ուսումնական առարկայի շրջանակներում լուծել այդպիսի խնդիր: Հետևաբար ուսուցման տեսությունում և պրակտիկայում օգտագործում են միջառարկայական ընդհանրացումներ: Մաթեմատիկայի՝ այլ առարկաների հետ ինտեգրված դասերն ունենում են վառ արտահայտված կիրառական ուղղվածություն, թույլ են տալիս սովորողներին ցուցադրել մաթեմատիկայի կիրառման տարբեր բնագավառները, դրանով բարձրացնել այս առարկան ուսումնասիրելիս նրանց մոտիվացիան: Միջառարկայականության օգտագործումը նպաստում է սովորողների մտածողության, ինքնուրույնության, ճանաչողական և ստեղծագործական ակտիվության զարգացմանը:

Սույն աշխատանքը նվիրված էր ֆունկցիայի ածանցյալին, որը շատ պատվավոր ու ծանրակշիռ տեղ է զբաղեցնում մաթեմատիկայում: Ածանցյալի հասկացության ըմբռնումը հիմք է նախապատրաստում հետագայում մի նոր ու կարևոր գաղափարի՝ ինտեգրալի ուսուցման համար:

Պետք է նպաստել, որ ածանցյալի կիրառմամբ հանրահաշվական խնդիրների լուծումների ընթացքում զարգանան սովորողների հաշվողական ունակությունները, ուժեղանա մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ֆունկցիոնալ և ալգորիթմական ուղղվածությունը: Նկատենք, որ այդ խնդիրների լուծման ժամանակ հաշվումները հանդես են գալիս որպես լուծման եղանակներ, իսկ ֆունկցիոնալ և ալգորիթմական ուղղվածության ուժեղացումը դրսևորվում է նրանում, որ ածանցյալի օգնությամբ հանրահաշվական խնդիրների լուծումների ընթացքում անհրաժեշտաբար պահանջվում են կազմել լուծվող խնդիրների ֆունկցիոնալ մոդելներ: Պետք է օժանդակել, որ այդ խնդիրների լուծումների ժամանակ սովորողները կրկնեն ֆունկցիաների որոշ հատկությունները, ամրապնդեն ածանցյալի օգնությամբ ուսումնասիրվող ֆունկցիաների կառուցման ալգորիթմական կարողությունները, այսինքն՝ ածանցման տեխնիկան:

Նկատի ունենալով այդ ծանրակշիռ հանգամանքները, առաջարկվում է դասագրքում ներմուծել խնդիրներ, որոնց օգնությամբ սովորողները կծանոթանան ածանցյալի հանրահաշվական կիրառություններին, հմտորեն կկարողանան կառուցել ֆունկցիաների գրաֆիկներ:

Գրականության ցանկ

1. «Մաթեմատիկան դպրոցում», գիտամեթոդական ամսագիր: Թիվ 3, Երևան: 2007:
2. «Մաթեմատիկան դպրոցում», գիտամեթոդական ամսագիր: Թիվ 3, Երևան: 2015:
3. «Մաթեմատիկան դպրոցում», գիտամեթոդական ամսագիր: Թիվ 1, Երևան: 2003:
4. «Մաթեմատիկան և ֆիզիկան դպրոցում», մանկավարժական-մեթոդական ամսագիր: N2, Երևան: 1989:
5. Ա. Ծատուրյան, Ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացի կրկնության կազմակերպման ուսումնամեթոդական ձեռնարկ: Վանաձոր: 2012: