«ԻՆՏԵՐԱԿՏԻՎ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ
ԶԱՐԳԱՑՈՒՄ»
ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2022

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

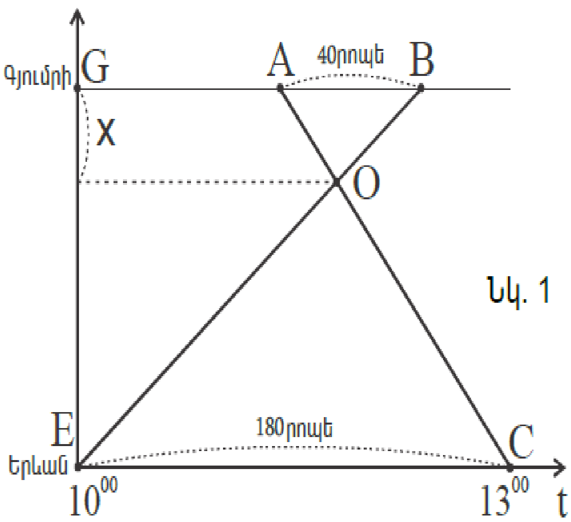
ԹԵՄԱ	Կինեմատիկական խնդիրների լուծման գրաֆիկական եղանակները
ԱՌԱՐԿԱ	Ֆիզիկա
ՀԵՂԻՆԱԿ	Ս. Մկրտչյան
ՄԱՐԶ	Արմավիր
ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ	Վաղարշապատի Խ. Աբովյանի անվան թիվ 4 հ/դպրոց

Բովանդակություն

Կինեմատիկական խնդիրների լուծման գրաֆիկական եղանակները

Մեխանիկական շարժման վերաբերյալ կինեմատիկական խնդիրները հանրահաշվորեն լուծվում են հավասարումների և համակարգերի միջոցով, որոնք շատ հաճախ ընդգրկում են մեծ քանակությամբ հավասարումներ և պահանջում են երկարատև, բազմաչարչար հաշվարկներ: Ուստի շատ խնդիրներ հեշտությամբ են լուծվում, երբ կիրառվում են գրաֆիկական և երկրաչափական մեկնաբանություններ: Նման մոտեցման դեպքում խնդիրների լուծումները դառնում են ավելի թափանցիկ, պատկերավոր ու մատչելի ընկալելու և իմաստավորելու համար: Կան մի շարք խնդիրներ, որոնք հանրահաշվորեն լուծելն այնքան էլ հեշտ չէ, բայց դրանք գրաֆիկական եղանակով լուծվում են բավական դյուրին: Նման բազմատեսակ խնդիրներից ընտրվել են մի շարք իրարից տարբեր խնդիրներ, որոնց ինքնատիպ լուծումները մեթոդական տեսանկյունից կարող են հանդիսանալ ուսուցանող աշակերտների և նման պրոբլեմներով զբաղվող անհատների համար: Ուստի կներկայացնենք խնդիրներ, որոնք առաջադրվել են հանրապետական օլիմպիադաներում, «Քվանտ» ֆիզիկո-մաթեմատիկական ամսագրերում և կազմվել են հեղինակների կողմից:

Խնդիր 1. Ժամը 10^{00}-ին Երևանից Գյումրի մեկնեց ավտոբուսը հաստատուն արագությամբ, իսկ որոշ ժամանակ անց Գյումրիից մեկնեց ավտոմեքենան, կրկին հաստատուն արագությամբ, և ժամանեց Երևան ժամը 13^{00}-ին: Ավտոբուսը ժամանեց Գյումրի ավտոմեքենայի մեկնումից 40 րոպե անց: Հանդիպման պահին ավտոմեքենան ամբողջ ճանապարհի ո՞ր մասն էր անցել:



Լուծում: Ավտոբուսի և ավտոմեքենայի անցած ճանապարհների ժամանակից կախվածության գրաֆիկները ներկայացված են նկ.1-ում: $AB = 40$ րոպե և $EC = 180$ րոպե: $\triangle EOC \sim \triangle AOB$, որից էլ հետևում է, որ

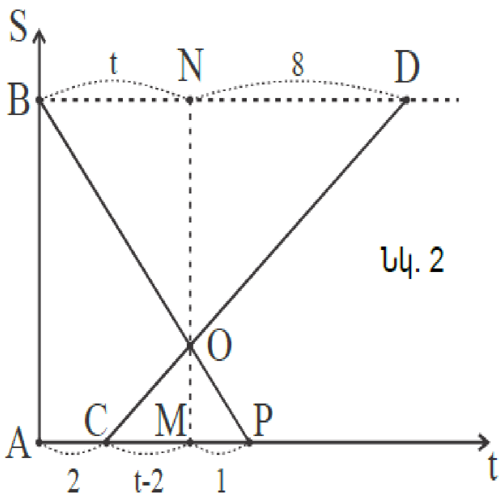
$$\frac{AB}{EC} = \frac{X}{EG - X}, \quad \text{այսինքն,} \quad \frac{40}{180} = \frac{X}{EG - X}, \quad \Rightarrow$$

$$X = \frac{2}{11} EG:$$

Որտեղ X-ը Գյումրիից մինչև հանդիպման կետը եղած հեռավորությունն է, իսկ EG-ն՝ Երևանից Գյումրի հեռավորությունը: Ակնհայտ է, որ խնդիրը թելադրում է գրաֆիկական լուծում:

Խնդիր 2. B կետից գետի հոսանքին հակառակ հաստատուն արագությամբ շարժվում է շոգենավը, իսկ A կետից 2 ժամ անց՝ լաստը: Հանդիպման պահից մեկ ժամ անց շոգենավը հասնում է A կետ, իսկ լաստը՝ 8 ժամ անց B: Քանի՞ ժամում AB-ն անցան լաստն ու շոգենավը: Շոգենավի սեփական արագությունը քանի՞ անգամ է մեծ լաստի արագությունից:

Լուծում: Լաստի և շոգենավի շարժման գրաֆիկները պատկերված են նկ.2-ում, որտեղ BP-ն շոգենավի և CD-ն լաստի անցած ճանապարհների ժամանակից կախվածության գրաֆիկներն են: Դիցուք շոգենավի դուրս գալուց t ժամ անց շոգենավը և լաստը հանդիպել են O կետում, իսկ այդ ժամանակ լաստը շարժման մեջ կլինի $(t-2)$ ժամ: $\triangle COM \sim \triangle OND$ և $\triangle BON \sim \triangle MOP$, ուստի կարող ենք ստանալ, որ $8/(t-2)=t/1$, որտեղից $t^2-2t-8=0$ և ստացվում է $t=4$ ժամ: Այսպիսով շոգենավը BA-ն կանցնի $t_1=5$ ժամում, իսկ լաստը AB-ն կանցնի $t_2=10$ ժամում:

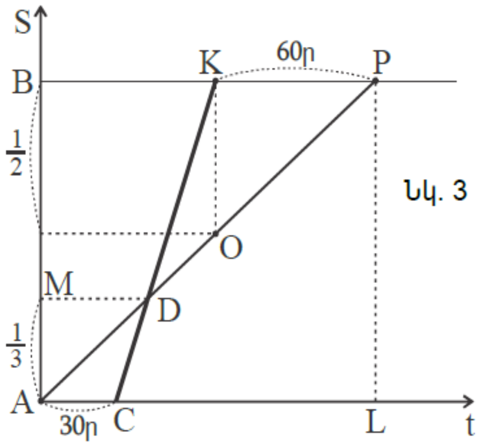


Նկ. 2

Շոգենավի սեփական արագությունը նշանակենք V, իսկ լաստինը՝ U: Այդ շոգենավի հոսանքին հակառակ շարժման արագությունը կլինի՝ $V-U$, որն էլ U-ին կհարաբերի $(V-U)/U=2$, որտեղից էլ՝ $V=3U$: Կարծում ենք, որ այս և հաջորդ խնդրի դեպքում էլ նախընտրելի է գրաֆիկական եղանակը:

Խնդիր 3. A կետից դեպի B կետ հաստատուն արագությամբ սկսեց շարժվել հետիոտնը: 30 րոպե անց A կետից նույն ուղղությամբ և հաստատուն արագությամբ շարժվեց հեծանվորդը: Հեծանվորդը վազանցեց հետիոտնին ճանապարհի մեկ երրորդն անցնելու պահին և ժամանեց B այն պահին, երբ հետիոտնը գտնվում էր ճանապարհի մեջտեղում: Ի՞նչ ժամանակներում AB-ն անցան հետիոտն ու հեծանվորդը:

Լուծում: Նկ.3-ում կառուցված են հետիոտնի և հեծանվորդի ճանապարհների ժամանակից կախվածության գրաֆիկները: CK-ն հեծանվորդի, իսկ AP-ն հետիոտնի գրաֆիկներն են, որտեղ D-ն նրանց հանդիպման կետն է: Համաձայն խնդրի պայմանի AD-ն երկու անգամ փոքր է DP-ից: Ուստի $\triangle ACD$-ի և $\triangle DKP$-ի նմանությունից կհետևի, որ $KP=2AC=60$ րոպե: Իսկ քանի որ KO-ն հանդիսանում է $\triangle ABP$-ի միջին գիծ, ապա $BP=2KP=120$ րոպե $=2$ ժամ: Հետիոտը AB-ն կանցնի 2 ժամում, իսկ հեծանվորդը՝ 30 րոպեում:

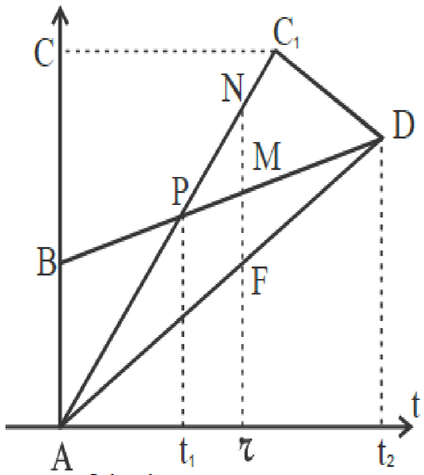


Նկ. 3

Հաջորդիվ ներկայացվող երկու խնդիրները դժվար է պատկերացնել, թե ինչպես կարելի է լուծել, եթե չդիմենք գրաֆիկական եղանակին:

Խնդիր 4. A կետից գետի հոսանքի ուղղությամբ միաժամանակ սկսում են շարժումը մոտորանավակը և նավակը, իսկ գետի հոսանքի ուղղությամբ ավելի ներքև գտնվող B կետից նույն պահին սկսում է շարժումը լաստը: Մոտորանավակը t_1 ժամանակ անց հանդիպում է լաստին, ապա շարունակելով հասնում C կետ, և անմիջապես շրջվելով շարժվում է գետի հոսանքին հակառակ դեպի A: Շարժման սկզբից t_2 ժամանակ անց բոլոր տրանսպորտային միջոցները հանդիպում են D կետում: Շարժման սկզբից հաշված որքա՞ն ժամանակ անց լաստը մոտորանավակից և նավակից կգտնվի հավասար հեռավորությունների վրա:

Լուծում: Կառուցենք տրանսպորտային միջոցների ճանապարհի ժամանակից կախվածության գրաֆիկները: Դիցուք մոտորանավակը լաստին հանդիպում է t_1 պահին P կետում, իսկ բոլորը միասին հանդիպում են D կետում t_2 պահին (նկ.4): Ընդունենք, որ երբ լաստը τ պահին գտնվում է M կետում, ապա նա հավասարահեռ է նավակից և մոտորանավակից, այսինքն, $NM = MF$: Լաստի արագությունը նշանակենք u, ապա $BD = ut_2$, $BP = ut_1$, $MD = u(t_2 - \tau)$ և $PM = (\tau - t_1)u$:



Նկ. 4

$\triangle ABD \sim \triangle MFD$, ուստի $\dfrac{AB}{MF} = \dfrac{BD}{MD} = \dfrac{t_2}{t_2 - \tau}$: $\triangle ABP \sim \triangle PMN$, հետևում է $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BP}{PM} = \dfrac{t_1}{\tau - t_1}$: Քանի որ $NM = MF$, ապա հետևում է $\dfrac{t_2}{t_2 - \tau} = \dfrac{t_1}{\tau - t_1}$, որտեղից ստանում ենք՝ $\tau = \dfrac{2t_1t_2}{t_1 + t_2}$:

Խնդիր 5. Մոտորանավակն անընդհատ շարժվում է գետի A և B նավահանգիստների միջև: A-ից մոտորանավակի դուրս գալու պահին դրա հետ միաժամանակ դուրս է գալիս լաստը B-ի ուղղությամբ: A-ից դուրս գալուց 3 ժամ հետո B-ից վերադարձող մոտորանավակը հանդիպում է լաստին, հասնում է A, և անմիջապես գնալով դեպի B, վազանցում է լաստին առաջին հանդիպումից 1 ժ հետո:

ա) Ե՞րբ տեղի կունենա մոտորանավակի և լաստի հաջորդ հանդիպումը:

բ) Քանի՞ անգամ կհանդիպեն մոտորանավակը և լաստը մինչև լաստի B հասնելը:

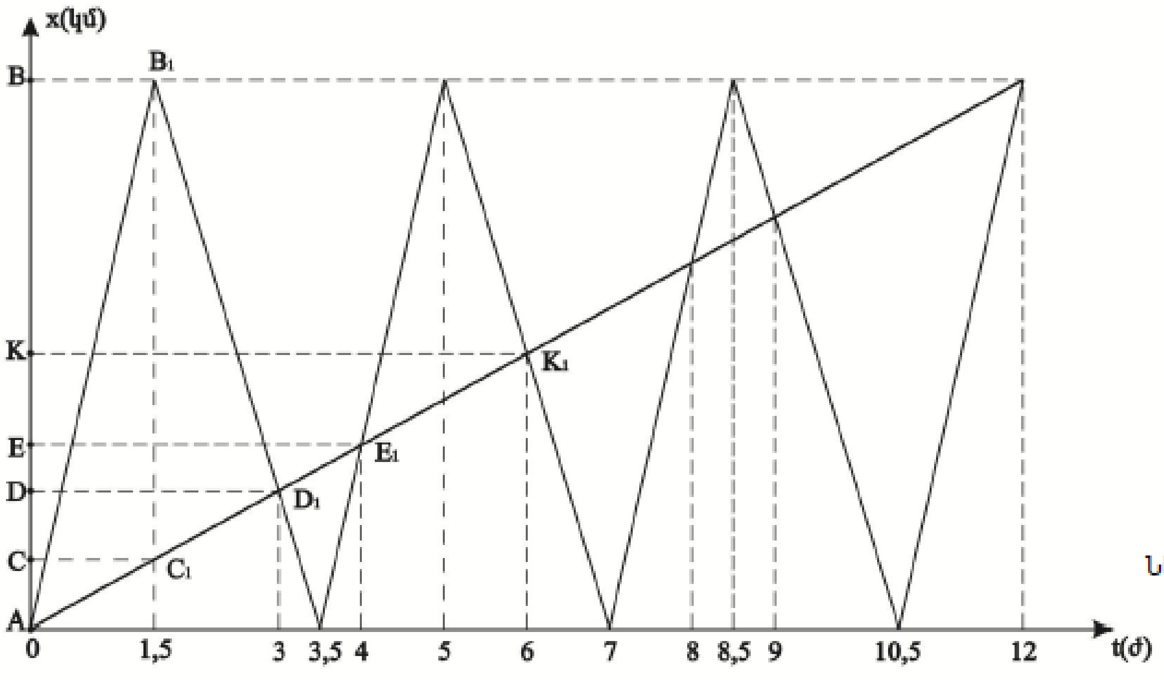
գ) Որքա՞ն ժամանակում լաստը կհասնի A-ից B:

Լուծում: Մոտորանավակի սեփական արագությունը նշանակենք V, իսկ լաստի արագությունը` $U$։ Մոտորանավակի արագությունը գետի հոսանքի ուղղությամբ կլինի $V+U$, իսկ հոսանքին հակառակ` $V-U$։ Ենթադրենք t_1 ժամանակամիջոցում մոտորանավակը հասել է B, իսկ t_1-ում լաստը` C կետ, մոտորանավակի և լաստի հարաբերական հեռավորությունը տվյալ պահին կլինի CB-ն, իսկ մոտորանավակի հարաբերական արագությունը լաստի նկատմամբ կլինի V, ուստի $t_1=CB/V$։ Երբ մոտորանավակը շրջվում է, և շարժվում դեպի լաստը, ապա նրա հարաբերական արագությունը լաստի նկատմամբ $V_h=V-U+U=V$, ուստի D կետում լաստը և մոտորանավակը կհանդիպեն $t_1'=CB/V$ ժամանակից։ Այսպիսով ստացվում է, որ $t_D=t_1+t_1'=2t_1=3$ ժամ $\Rightarrow$ $t_1=t_D/2=1{,}5$ ժամ։

Ենթադրենք երկրորդ հանդիպումը տեղի է ունեցել E կետում, ապա լաստը 3 ժամում հասնում է D կետ և $AD=3U$, իսկ 4 ժամում հասնում է E կետ և $AE=4U$։ Մոտորանավակը DA-ն կանցնի $3U/(V-U)$ ժամում, իսկ AE-ն` $4U/(V+U)$ ժամում։ Հետևում է`

$$\frac{3U}{V-U}+\frac{4U}{V+U}=1 \;\Rightarrow\; V=7U;$$

$AB=1{,}5(V+U)=1{,}5\cdot 8U=12U$; $t_{AB}=AB/U=12U/U=12$ ժամ։ AB-ն լաստը կանցնի 12 ժամում։ AD-ն մոտորանավակն անցնում է $3U/(V-U)=3U/6U=0{,}5$ ժամում։ Ուստի մոտորանավակը A-ից B գնում է 1,5 ժամում, վերադառնում` 2 ժամում, այսինքն A-ից B և B-ից A անցնում է 3,5 ժամում։



Նկ. 5

Հետևաբար մոտորանավակը 3 անգամ կգնա B և կվերադառնա A, իսկ չորրորդ փորձից հետո` մնացած $12-10{,}5=1{,}5$ ժամում կհասնի B։ Ուստի ողջ շարժման ընթացքում լաստը և մոտորանավակը կհանդիպեն 6 անգամ (նկ.5)։ Մոտորանավակը երկրորդ անգամ B կետում կլինի $3{,}5+1{,}5=5$ ժամ հետո, ուստի EB-ն մոտորանավակը կանցնի $5-4=1$ ժամում, ուստի հետևելով առաջին հանդիպման դատողություններին, մոտորանավակի և լաստի երրորդ հանդիպումը K

կետում տեղի կունենա մոտորանավակի B-ից մեկնելուց 1ժամ հետո: Ստացվեց, որ երրորդ հանդիպումը տեղի է ունենում շարժումը սկսելուց 6 ժամ հետո:

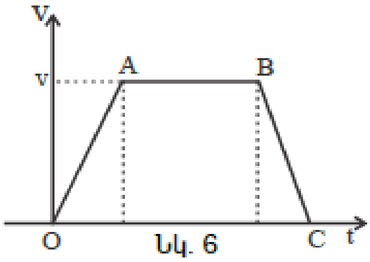
Պատ.՝ ա) Երրորդ հանդիպումը շարժման սկզբից 6 ժամ հետո:

բ) Կհանդիպեն 6 անգամ:

գ) AB-ն լաստը կանցնի 12ժամում:

Քննարկենք ևս մի խնդիր, որը շատ հայտնի է և մշտապես նմանատիպ խնդիր առաջադրվել է դիմորդներին: Խնդիրը լուծելու համար անհրաժեշտ է գրել մի շարք հավասարումներ և երկարատև հաշվարկներ կատարել, իսկ գրաֆիկական եղանակով ստացվում է մեկ քայլով:

Խնդիր 6. Երկու հարևան կայարանների միջև հեռավորությունը $S=6$կմ է և գնացքն այն անցնում է $t=8$րոպեում: Կայարանից գնացքը սկսում է շարժումը հավասարաչափ արագացմամբ, ապա շարժվում է հաստատուն արագությամբ և հաջորդ կայարան ժամանում հավասարաչափ դանդաղող: Թափավազքի և արգելակման վրա գնացքը ծախսում է $t_1=160$վայրկյան: Գտնել գնացքի հաստատուն արագությամբ շարժման արժեքը:



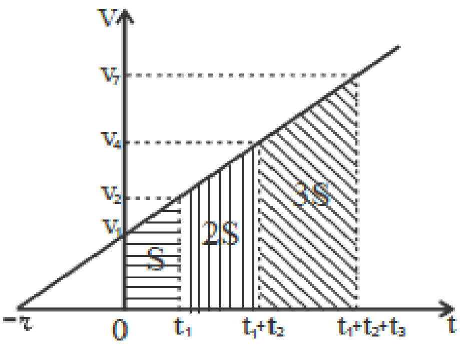
Նկ. 6

Լուծում: Կառուցենք գնացքի արագության ժամանակից կախվածության գրաֆիկը (նկ.6): $OABC$ սեղանի մակերեսը համաձայն ճանապարհի երկրաչափական մեկնաբանության կհամապատասխանի գնացքի անցած ճանապարհին: $OC=t=480$վ: $AB=t-t_1=480-160=320$վ:

Ուստի՝ $S=\dfrac{OC+AB}{2}\cdot v$, որտեղից՝ $v=\dfrac{2S}{OC+AB}=\dfrac{2\cdot 6000}{480+320}=15$մ/վ:

Խնդիր 7. Մրցասպարեզում իրար ետևից հավասար հեռավորությունների վրա տեղաբաշխված են դրոշակներ: Ուղղագիծ հավասարաչափ արագացմամբ շարժվող մրցարշավորդն առաջին և երկրորդ դրոշակների միջև հեռավորությունն անցնում է $t_1=5$վ ժամանակում, իսկ երկրորդ և չորրորդ դրոշակների միջև՝ $t_2=8$վ ժամանակում: Որքա՞ն ժամանակում մրցարշավորդը կանցնի չորրորդ և յոթերորդ դրոշակների միջև հեռավորությունը:

Լուծում: Խնդիրն անալիտիկ եղանակով լուծելիս շարժման հավասարումները գրելուց հետո կպահանջվեն բավականին բարդ մաթեմատիկական ձևափոխություններ: Ուստի պատկերենք մրցարշավորդի արագության ժամանակից կախվածության գրաֆիկը: Ենթադրենք մրցարշավորդը շարժումը սկսել է առաջին դրոշակի մոտով անցնելու պահից τ ժամանակ առաջ և շարժվել է a հաստատուն արագացմամբ (նկ.7): Ապա առաջին դրոշակի մոտ նրա արագությունը կլինի $v_1=a\tau$, իսկ երկրորդ դրոշակի մոտ՝ $v_2=a(\tau+t_1)$, չորրորդ դրոշակի մոտ՝ $v_4=a(\tau+t_1+t_2)$ և վերջապես յոթերորդի մոտ՝ $v_7=a(\tau+t_1+t_2+t_3)$: Համաձայն երկրաչափական մեկնաբանության գրաֆիկի տակ գտնվող մակերեսները կհամապատասխանեն մրցարշավորդի անցած ճանապարհներին, ուստի՝



Նկ. 7

$$S=\frac{v_1+v_2}{2}t_1=\frac{a\tau+a(\tau+t_1)}{2}t_1:$$

$$2S=\frac{v_2+v_4}{2}t_2=\frac{a(\tau+t_1)+a(\tau+t_1+t_2)}{2}t_2:$$

$$3S=\frac{v_4+v_7}{2}t_3=\frac{a\left(\tau+t_1+t_2\right)+a\left(\tau+t_1+t_2+t_3\right)}{2}t_3:$$

Տեղադրելով t_1-ի և t_2-ի արժեքները կստանանք՝

$$\begin{cases} 2S = 5a(2\tau+5) \\ 2S = 4a(2\tau+18) \\ 6S = a(2\tau+26+t_3)t_3 \end{cases}$$

Առաջին երկու հավասարումներից կստանանք՝ $\tau = 47/2$, և տեղադրելով երրորդի մեջ, կատարելով ձևափոխություններ, կստանանք՝

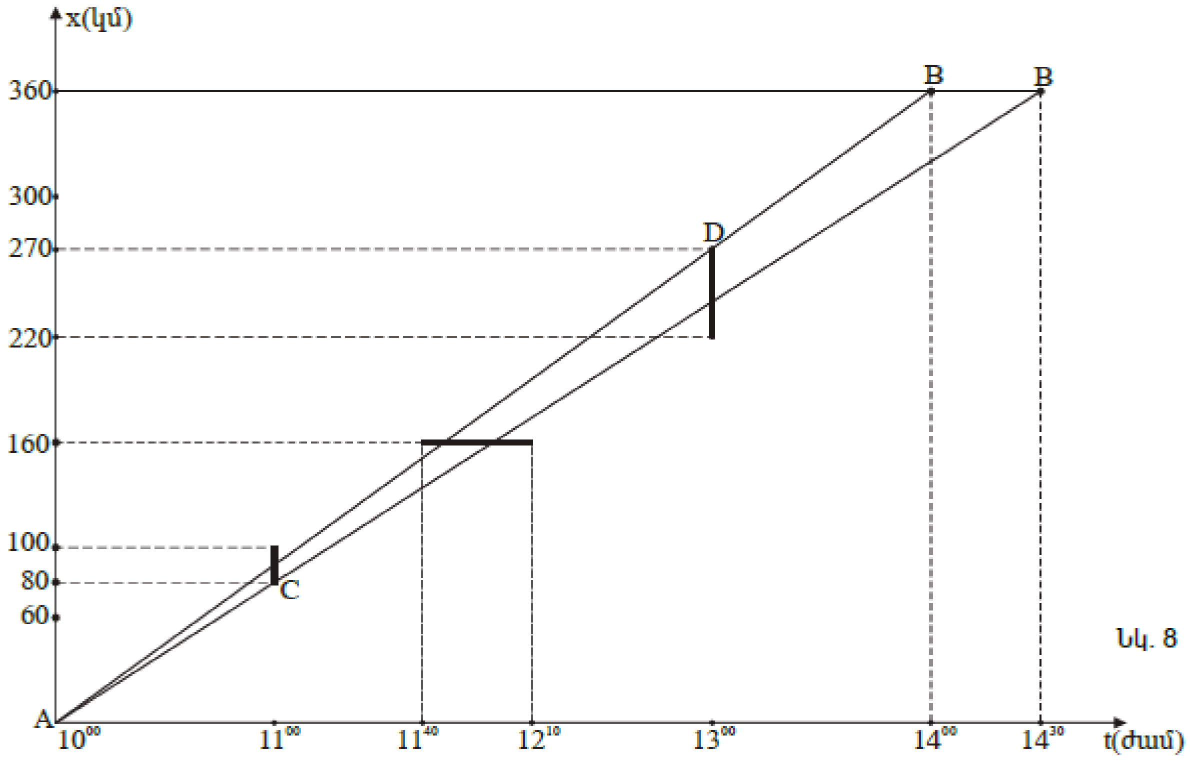
$t_3^2+73t_3-780=0$, որտեղից էլ՝ $t_3 \approx \dfrac{-73+92}{2} \approx 7,5$ վ:

Խնդիր 8. A քաղաքից Արեգը ժամը 10^{00}-ին դուրս եկավ ավտոմեքենայով և հաստատուն արագությամբ շարժվեց դեպի B քաղաքը, որը A-ից 360 կմ հեռավորության վրա է: B քաղաքի ընկերը բջջային հեռախոսով տեղեկացվեց, որ 11^{00}-ին Արեգը գտնվում էր A-ից $80-100$ կմ հեռավորության վրա, 160 կմ նշակետում հայտնվել է $11^{40}-12^{10}$ ժամանակահատվածում, իսկ 13^{00}-ին գտնվում էր A-ից $220-270$ կմ հեռավորության վրա: Այս տվյալների հիման վրա B քաղաքի ընկերը գնաց Արեգին դիմավորելու: Գտնել դիմավորելու հնարավոր ժամանակահատվածը: Գտնել Արեգի ավտոմեքենայի արագության հնարավոր արժեքների տիրույթը:

Լուծում: Խնդիրը կարելի է լուծել միայն գրաֆիկական եղանակով: Փորձենք կառուցել x կոորդինատի ժամանակից կախվածության գրաֆիկը (նկ.8): Քանի որ շարժման ընթացքում Արեգի արագությունը հաստատուն է, ապա շարժման արագության գրաֆիկները կլինեն ուղիղ գծեր: Խնդրում տրված պայմանները անցկացնենք 6 նկարում պատկերված կոորդինատային հարթության վրա: A և C կետերով տարված արագության գրաֆիկը կհամապատասխանի նվազագույն արագությանը, իսկ A և D կետերով տարված արագության գրաֆիկն՝ առավելագույն արագությանը: Ուստի կառուցումներից պարզ երևում է, որ B քաղաքի ընկերն Արեգին պետք է դիմավորի $14^{00}-14^{30}$ ժամանակահատվածում, իսկ ավտոմեքենայի արագության հնարավոր արժեքների տիրույթը կլինի՝

$$\frac{360}{4,5} \le v \le \frac{360}{4}, \text{ այսինքն, } \quad 80 \text{ կմ/ժ} \le v \le 90 \text{ կմ/ժ} :$$

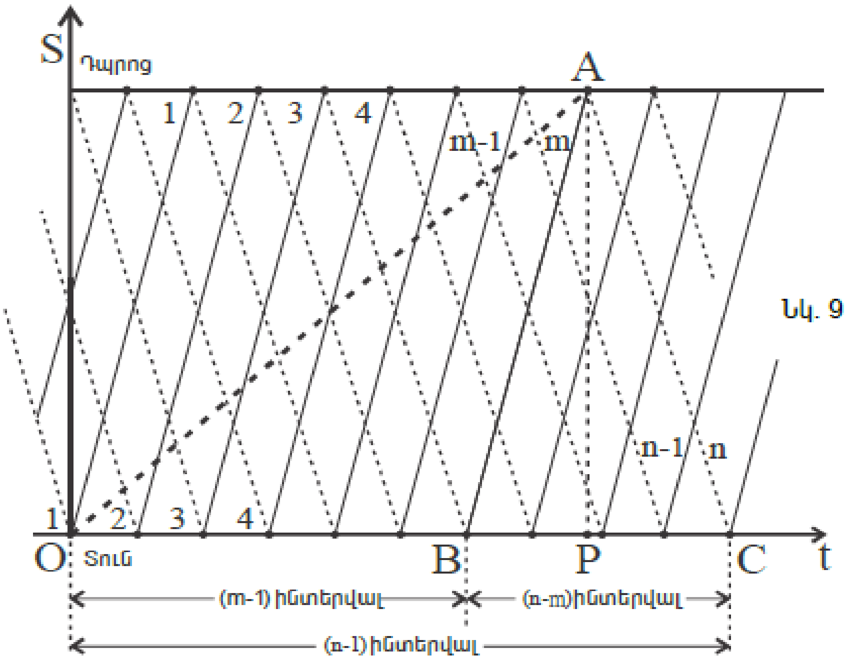
Ընկերը պետք է դիմավորի Արեգին $14^{00}-14^{30}$ ժամանակահատվածում: 80 կմ/ժ $\le v \le 90$ կմ/ժ :



Նկ. 8

Խնդիր 9. Աշակերտը տնից դպրոց գնալու համար բավականին ժամանակ ուներ, ուստի որոշեց ոտքով գնալ, շարժվելով հաստատուն արագությամբ: Տանից դուրս գալու պահին, համընթաց ուղղությամբ շարժումը սկսեց ավտոբուսը և տան կանգառ ժամանեց տրոլեյբուսը: Ճանապարհին նա սկսեց հաշվել համընթաց շարժվող ավտոբուսների և հանդիպակաց տրոլեյբուսների քանակը: Դպրոց հասնելու պահին այդ կանգառ ժամանեց m-րդ ավտոբուսը և կանգառից սկսեց շարժվել n-րդ տրոլեյբուսը: Տրոլեյբուսները և ավտոբուսները շարժվում են միևնույն հաստատուն արագություններով: Միմյանց հաջորդող ավտոբուսների և տրոլեյբուսների մեկնման ինտերվալները նույնպես իրար հավասար են: Քանի՞ անգամ է ավտոբուսի արագությունը գերազանցում աշակերտի արագությանը:

Լուծում: Կառուցենք աշակերտի, ավտոբուսների և տրոլեյբուսների շարժման գրաֆիկները (նկ.9): Աշակերտը O կետից (տուն) շարժումը սկսելով հասնում է A կետ (դպրոց) և նրա շարժման գրաֆիկը OA կետագիծն է: Համընթաց շարժվող ավտոբուսների շարժման գրաֆիկներն իրարից հավասարահեռ և միմյանց զուգահեռ 1, 2, 3 ...., $m-1$, m համարակալված հոծ գծերն են, իսկ հանդիպակաց շարժվող տրոլեյբուսների նույնպես իրարից հավասարահեռ ու զուգահեռ գրաֆիկները՝ 1, 2, 3 ...., $n-1$, n համարակալված կետագծերն են:



Նկ. 9

Աշակերտի OA շարժման գրաֆիկը հատում են m համընթաց շարժվող ավտոբուսներ և հանդիպակաց շարժվող n տրոլեյբուսներ: Եթե հաշվարկը կատարենք հաջորդող տրանսպորտային միջոցների ժամանակային ինտերվալների օգնությամբ, ապա $OB=m-1$ ինտերվալ, իսկ $OC=n-1$ ինտերվալ:

Հետևաբար $BC=OC-OB=n-1-(m-1)=n-m$: Քանի որ ABC եռանկյունը հավասարասրուն է, ապա $BP=\frac{BC}{2}=\frac{n-m}{2}$: Այսպիսով՝

$$OP=OB+BP=m-1+\frac{n-m}{2}=\frac{n+m-2}{2}:$$

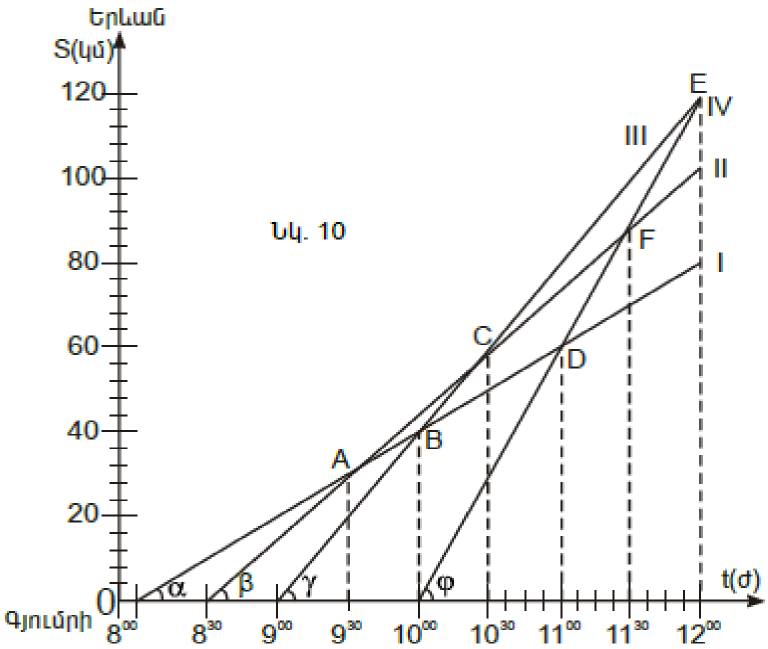
Ավտոբուսի և աշակերտի արագությունների հարաբերությունը կորոշվի՝

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{2S}{n-m}:\frac{2S}{n+m-2}=\frac{n+m-2}{n-m},$$

քանի որ անցնում են նույն S ճանապարհը:

Խնդիր 10. Գյումրի քաղաքից դեպի Երևան միևնույն ճանապարհով տարբեր ժամերի մեկնեցին հեծանվորդը, բեռնատարը, ավտոբուսը և մարդատար ավտոմեքենան: Բոլորը շարժվում են հաստատուն արագություններով, որոնք միմյանցից տարբեր են (դասավորված են աճման կարգով): Մարդատարը հանդիպեց հեծանվորդին ժամը 11^{00}-ին, իսկ ավտոբուսին՝ ժամը 12^{00}-ին: Ավտոբուսը հանդիպեց հեծանվորդին ժամը 10^{00}-ին, իսկ բեռնատարին՝ 10^{30}-ին: Բեռնատարը հանդիպեց հեծանվորդին ժամը 9^{30}-ին: Ժամը քանիսի՞ն հանդիպեցին մարդատարը և բեռնատարը:

Լուծում: Փորձենք խնդիրը լուծել գրաֆիկորեն, կառուցելով բոլոր տրանսպորտային միջոցների ճանապարհների ժամանակային կախվածության գրաֆիկները (նկ.10): Ժամը $t_A=9^{30}$-ին վերցնենք A կետը, որը կլինի հեծանվորդի և բեռնատարի հանդիպման կետը: Ժամը $t_B=10^{00}$-ին A-ից մի փոքր վերև վերցնենք B կետը, որն էլ կլինի հեծանվորդի և ավտոբուսի հանդիպման կետը: A և B կետերն ուղիղ գծով միացնելով և շարունակելով, կստանանք հեծանվորդի շարժման գրաֆիկը: AB ուղղի D կետը, ժամը $t_B=11^{00}$-ին, մարդատարի և հեծանվորդի հանդիպման կետն է: Ժամը $t_E=12^{00}$-ին, Երևան քաղաքի մոտ, վերցնենք E կետը, որտեղ հանդիպում են ավտոբուսը և մարդատարը, ապա ED ուղիղը կհանդիսանա մարդատարի շարժման գրաֆիկը, իսկ EB-ն՝ ավտոբուսինը: EB գրաֆիկի վրա $t_c=10^{30}$-ին կունենանք C կետը, որն էլ կհանդիսանա բեռնատարի և ավտոբուսի հանդիպման կետը: Ուստի միացնելով A և C կետերը կստանանք բեռնատարի շարժման գրաֆիկը, որն էլ $t_F=t$ պահին ED-ն կհատի F կետում, որն էլ կհանդիսանա բեռնատարի և մարդատարի հանդիպման կետը: Հեծանվորդի արագությունը նշանակենք V_1, բեռնատարինը՝ V_2, ավտոբուսինը՝ V_3 և մարդատարինը՝ V_4: Մարդատարի և բեռնատարի հանդիպման պահը որոշելու համար, կազմենք բոլոր հնարավոր հավասարումները:



Նկ. 10

$AC=AB+BC$ (1), որից հետևում է՝ $(t_c-t_A)V_2=(t_B-t_A)V_1+(t_C-t_B)V_3$:

$BE=BD+DE$ (2), $\Rightarrow$ $(t_E-t_B)V_3=(t_D-t_B)V_1+(t_E-t_D)V_4$:

$AF=AD+DF$ (3), $\Rightarrow$ $(t-t_A)V_2=(t_D-t_A)V_1+(t-t_D)V_4$:

$CE=CF+FE$ (4), $\Rightarrow$ $(t_E-t_C)V_3=(t-t_C)V_2+(t_E-t)V_4$:

$BC+CF=BD+DF$ (5), $\Rightarrow$ $(t_C-t_B)V_3+(t-t_c)V_2=$

$=(t_D-t_B)V_1+(t-t_D)V_4$:

Ստացվում է հինգ անհայտով հինգ հավասարումների համակարգ, որը լուծելով կարող ենք ստանալ մեզ հետաքրքրող հանդիպման ժամանակը: Մեր խնդիրը լուծելու համար համակարգից ընտրենք (1), (2) և (4) հավասարումները՝

$$\begin{cases} V_2=0,5V_1+0,5V_3 \\ V_1+V_4=2V_3 \\ 1,5V_3=(t-10,5)V+(12-t)V_4 \end{cases}$$

$V_1=2V_2-V_3=2V_3-V_4$, որտեղից $V_4=3V_3-2V_2$ և տեղադրենք (4) հավասարման մեջ:

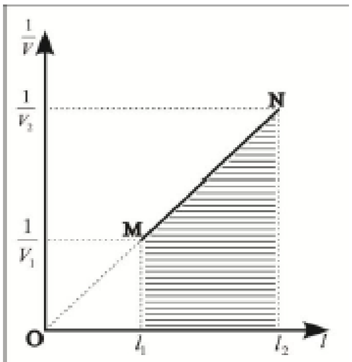
$1,5V_3=V_2t-10,5V_2+(12-t)(3V_3-2V_2)$ ձևափոխելով կստանանք՝

$$t=\frac{34,5(V_2-V_3)}{3(V_2-V_3)}=11,5:$$

Այսպիսով, ստացանք, որ բեռնատարը և մարդատարը կհանդիպեն ժամը 11^{30}-ին:

Խնդիր 11. Մրջյունը մրջնանոցից հեռանում է ուղիղ գծով այնպես, որ նրա արագությունը հակադարձ համեմատական է մրջնանոցի կենտրոնից եղած հեռավորությանը: Այն պահին, երբ մրջյունը գտնվում է A կետում` մրջնանոցի կենտրոնից $l_1 = 1$ մ հեռավորության վրա, նրա արագությունը $V_1 = 2$ սմ/վ է: Որքա՞ն ժամանակամիջոցում մրջյունը A կետից կհասնի B կետ, որը մրջնանոցի կենտրոնից գտնվում է $l_2 = 2$ մ հեռավորության վրա:

Լուծում: Մրջյունի արագությունը ժամանակից կախված փոփոխվում է ոչ գծային օրենքով, ուստի հետագծի տարբեր տեղամասերում մրջյունի միջին արագությունը տարբեր է և չենք կարող օգտվել միջին արագության հայտնի բանաձևերից:



Նկ.11

A-ից B կետ շարժվելիս մրջյունի անցած ճանապարհը բաժանենք շատ փոքր այնպիսի տեղամասերի, որոնցից յուրաքանչյուրը մրջյունն անցնում է միևնույն Δt փոքր ժամանակամիջոցներում: Ապա $\Delta t = \Delta l / (V'(\Delta l))$, որտեղ $V'(\Delta l)$-ն` տվյալ Δl փոքր տեղամասում միջին արագությունն է: Գրաֆիկորեն պատկերենք $1/V'(\Delta l)$ մեծության կախվածությունը l-ից, որն էլ հանդիսանում է A և B կետերի միջև հեռավորությունը (նկ.11): Կախվածության գրաֆիկը ուղիղ գիծ է, և նկ.11-ում MN գծի տակ ստվերագծված պատկերի մակերեսը թվապես հավասար կլինի A-ից B մրջյունի անցնելու ժամանակամիջոցին: Յաշվենք այն`

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)(l_2 - l_1) = \left(\frac{1}{2V_1} + \frac{1}{2V_1}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right)(l_2 - l_1) = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2V_1 l_1}:$$

Տեղադրենք $\frac{1}{V_2} = \frac{1}{V_1}\cdot\frac{l_2}{l_1}$, քանի որ, եթե $V_1 = \frac{k}{l_1}$ և $V_2 = \frac{k}{l_2}$, ապա $\frac{V_1}{V_2} = \frac{l_2}{l_1}$

(որտեղ k-ն ինչ-որ հաստատուն է):

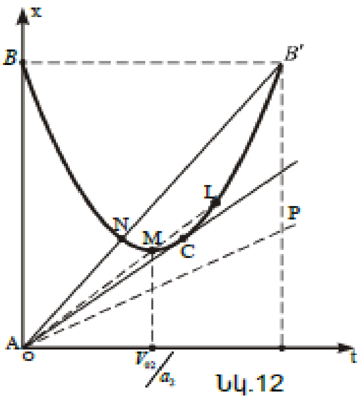
Այսպիսով ստացվում է, որ մրջյունը A-ից B կանցնի

$$T = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2V_1 l_1} = \frac{4-1}{2\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 1} = 75 \text{ վ}$$

ժամանակամիջոցում:

Խնդիր 12. A և B կետերի միջև հեռավորությունը $L = 1500$ մ է: A կետից առաջին մարմինը հաստատուն արագությամբ շարժվում է դեպի B կետ, միաժամանակ B կետից երկրորդ մարմինը սկսում է շարժումը $v_{02} = 24$ մ/վ սկզբնական արագությամբ և $a_2 = 0{,}3$ մ/վ^2 արագացմամբ դեպի B: Ընդ որում երկրորդ մարմնի արագացումը միշտ ուղղված է առաջին մարմնի արագության ուղղությամբ: Շարժման ընթացքում մարմինները երկու անգամ միմյանց վազանցում են: Ի՞նչ հնարավոր արժեքներ կարող է ընդունել առաջին մարմնի արագությունը:

Լուծում: Առաջին մարմինը կատարում է ուղղագիծ հավասարաչափ շարժում, ուստի նրա շարժման գրաֆիկը կլինի ուղիղ գիծ, իսկ երկրորդ մարմինը` հավասարաչափ արագացող շարժում, ուստի նրա շարժման գրաֆիկը կլինի պարաբոլ (նկ.12): Երկրորդ մարմինը սկզբից կատարում է հավասարաչափ դանդաղող շարժում, $t = v_{02}/a_2$ պահին մի պահ կանգ է առնում M կետում, այնուհետև նորից շարժվում է դեպի B, կատարելով հավասարաչափ արագացող շարժում: Առաջին մարմնի փոքր արագությունների դեպքում (գրաֆիկում AP-ն) այն չի հանդիպի երկրորդին: Իսկ հնարավոր ամենամեծ արագության դեպքում (ANB'-ը) երկու անգամ կհանդիպի երկրորդ մարմնին, բայց վազանց կկատարի միայն B կետում (B'): Ուստի երկու վազանց հնարավոր կլինի $t = v_{02}/a_2$ պահից հետո, երբ մարմինները երկուսն էլ կշարժվեն նույն ուղղությամբ: Առաջին մարմինը հնարավոր փոքր արագությունը կունենա, երբ նրա գրաֆիկը շոշափի պարաբոլը, իսկ առավելագույն արագությունը կունենա AML գրաֆիկի դեպքում, երբ երկրորդ մարմնին կհանդիպի պարաբոլի գագաթին համապատասխանող M կետում: Այժմ գրենք երկու մարմինների շարժման կոորդինատային հավասարումները:



Նկ.12

$$x_1 = v_1 t \quad \text{և} \quad x_2 = L - v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2}:$$

Հետևում է՝ $v_1 t = L - v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2}$; $a_2 t^2 - 2(v_1 + v_{02})t + 2L = 0$:

Մարմինները կհանդիպեն մեկ անգամ C կետում, երբ $4(v_1 + v_{02})^2 - 8a_2 L = 0$, որտեղից $v_1 = \sqrt{2a_2 L} - v_{02} = 6$ մ/վ, և այն կլինի հնարավոր նվազագույն արագությունը: Իսկ առավելագույն արագությունը կունենա M կետում հանդիպելիս, երբ $t = v_{02} / a_2$, և տեղադրելով քառակուսային հավասարման մեջ կստանանք՝

$$v_1 = \frac{a_2 L}{v_{02}} - \frac{v_{02}}{2} = 6,75 \text{ մ/վ}:$$

Ստացվեց՝ 6 մ/վ $< v_1 < 6,75$ մ/վ:

Միմյանցից խստորեն տարբերվող վերջին չորս խնդիրները լուծելիս գրաֆիկական եղանակի կիրառումը հրաշալիորեն ապացուցում է նման մոտեցման արդյունավետությունը: Գրաֆիկական եղանակը հաջողությամբ կարելի է կիրառել նաև ֆիզիկայի մյուս բաժինների խնդիրները լուծելիս:

Գրականություն:

1. Գ. Վ. Գրիգորյան, Բ. Ա. Փախչանյան: «Ֆիզիկայի հանրապետական օլիմպիադաներ», 1983-2003: Էդիթ Պրինտ: Երևան: 2003թ.:
2. Ռ. Ե. Ավանեսյան: «Ֆիզիկայի օլիմպիական խնդիրների ընտրանի» Կինեմատիկա մաս 1-ին: Կռունկ: Երևան: 2013թ.:
3. "Квант": Научно-популярные физико-математические журналы. 2011-01, 2014-01.