



**«ԻՆՏԵՐԱԿՏԻՎ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ  
ԶԱՐԳԱՑՈՒՄ»  
ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ**



**ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ  
ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ  
ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2022**

**ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ**

**ԹԵՄԱ** Պարամետր պարունակող հավասարումների և  
անհավասարումների գրաֆիկական եղանակ

**ԱՌԱՐԿԱ** Մաթեմատիկա

**ՀԵՂԻՆԱԿ** Արմենուհի Հայրումյան

**ՄԱՐԶ** Արմավիր

**ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ** Ակնալճի Ա. Հարությունյանի միջնակարգ  
դպրոց

## Բովանդակություն

Ներածություն .....	3
Գլուխ 1 Պարամետր պարունակող հավասարումներ .....	4
Գլուխ 2 Պարամետր պարունակող անհավասարումներ.....	12
Եզրակացություն.....	16
Գրականության ցանկ .....	17

## Ներածություն

Դպրոցական դասընթացի ընթացքում հաճախ աշակերտների մոտ խնդիր է առաջանում պարամետր պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ լուծելիս պարամետրի թույլատրելի բոլոր արժեքների քննարկումը:

Պարամետր պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծման գրաֆիկական եղանակը լուծում է այդ խնդիրը: Գրաֆիկական եղանակը տեսանելի է դարձնում լուծումների բազմությունը պարամետրի բոլոր հնարավոր արժեքների դեպքում:

Նման եղանակի կիրառումը հնարավորություն է տալիս նաև ամրապնդել «Ֆունկցիա» թեման և զարգացնել աշակերտների մոտ գրաֆիկներ կառուցելու կարողությունները:

Գրաֆիկները կառուցելիս կարելի է օգտագործել նաև էլեկտրոնային կայքերի հնարավորությունները, որն ավելի արդիական է և բարձրացնում է թեմայի յուրացման արդյունավետությունը:

Հետազոտական աշխատանքի առաջին գլխում ներկայացվում է քառակուսային, մոդուլով, երկու անհայտով հավասարումների համակարգի, իռացիոնալ, լոգարիթմական, ցուցային, ռացիոնալ պարամետրով հավասարումների լուծման օրինակներ:

Երկրորդ գլխում ներկայացվում է մոդուլով, իռացիոնալ, ցուցային պարամետրով անհավասարումների լուծումների օրինակներ:

Քննարկված օրինակները հնարավորություն են տալիս ամրապնդել նաև քառակուսային, երկքառակուսային, մոդուլով, ռացիոնալ, իռացիոնալ, ցուցային, լոգարիթմական հավասարումներ և անհավասարումներ թեմաները:

# Գլուխ 1 Պարամետր պարունակող հավասարումներ

Դիցուք ունենք  $f(a,b,\dots,k,x)=g(a,b,\dots,k,x)$  հավասարումը, որտեղ  $a,b,\dots,k,x$ -ն փոփոխականներ են:

Եթե  $a$ -ի,  $b$ -ի  $\dots k$ -ի թույլատրելի արժեքների բազմություններից համապատասխանաբար վերցնենք  $a_0, b_0, \dots, k_0$  թվեր և տեղադրենք տրված հավասարման մեջ, կստանանք

$f(a_0, b_0, \dots, k_0, x) = g(a_0, b_0, \dots, k_0, x)$  հավասարումը, այսինքն կստանանք  $x$ -ի նկատմամբ հավասարում:

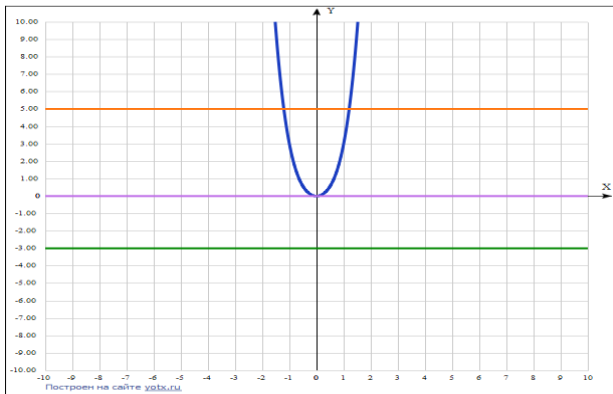
Եթե հավասարումը լուծելիս  $a, b, \dots, k$  փոփոխականները համարում ենք հաստատուններ, ապա  $a, b, \dots, k$  կոչվում են պարամետրեր, իսկ հավասարումը՝ պարամետր պարունակող հավասարում:

Լուծել հավասարումը, նշանակում է գտնել պարամետրերի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումը ունի արմատներ և գտնել դրանք:

Քննարկենք քառակուսային, մոդուլով, երկու անհայտով հավասարումների համակարգի, իռացիոնալ, լոգարիթմական, ցուցային, ռացիոնալ պարամետրով հավասարումների լուծման օրինակներ

**Օրինակ 1.**  $x^4 + 2x^2 + a = 0$        $x^4 + 2x^2 = -a$

Կառուցենք  $f(x) = x^4 + 2x^2$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:



ա) Գտնենք արսցիսների առանցքի հետ ֆունկցիայի գրաֆիկի հարմար կետի կոորդինատները

$x^4 + 2x^2 = 0$ ,  $x^2(x^2 + 2) = 0$ ,  $x^2 = 0, x = 0$ ,  $x^2 + 2 \neq 0$

2) Գտնենք կրիտիկական կետերը

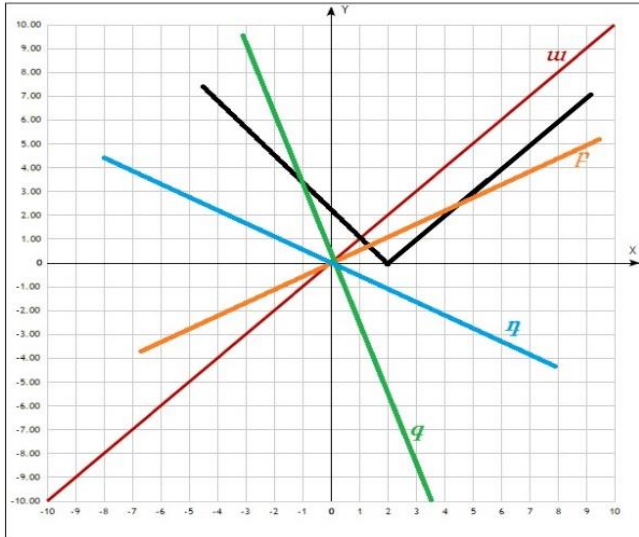
$f'(x) = 4x^3 + 4x = 0$        $4x(x^2 + 1) = 0$        $4x=0, x=0$        $x^2 + 1 = 0$ , լուծում չունի

3) Աճման և նվազման միջակայքերը

$f(x) = p \uparrow$  է երբ  $x \in (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$

1.  $a=0$  ` ունի 2 արմատ
2.  $a > 0$  ` արմատ չունի
3.  $a < 0$  ` ունի 2 արմատ

### Օրինակ 2 $|x-2|=ax$



Կառուցենք  $f(x)=|x-2|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը

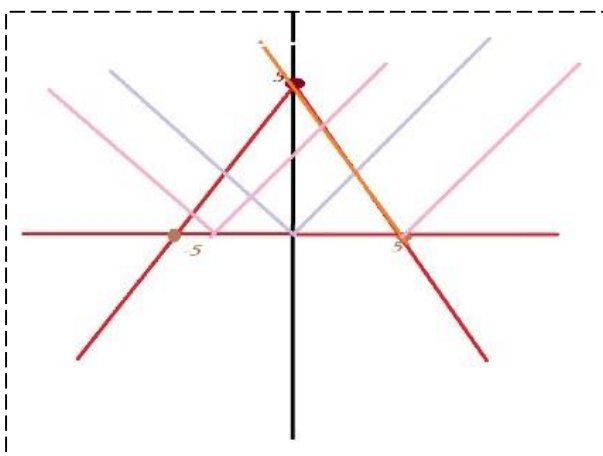
ա) Կառուցենք  $y=ax$  ֆունկցիայի գրաֆիկը,  $a \geq 1$ ,  $y=ax$  ունի 1 արմատ

բ)  $0 < a < 1$   $y=ax$  ունի 2 արմատ  $a=0$   $y=0$  համընկնում է  $x$ -երի առանցքի հետ ` ունի 1 արմատ

գ)  $a < -1$  ունի 1 արմատ

դ)  $-1 \leq a < 0$  արմատ չունի

### Օրինակ 3 $|x|+|x-a|=5, |x-a|=5-|x|$



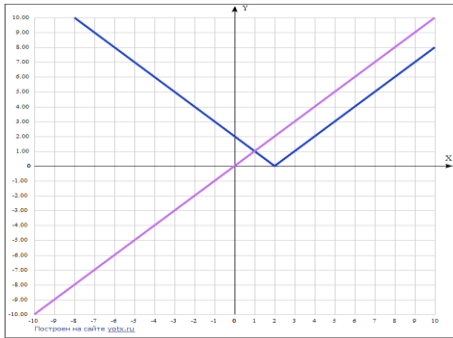
Կառուցենք  $f(x)=5-|x|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

$g=|x-a|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը

1)  $a=0$  ունի 2 արմատ  $\begin{cases} a > -5 \\ a < 5 \end{cases}$  ունի 2 արմատ

2)  $a=\pm 5$  ունի անթիվ բազմությամբ արմատներ  $a > 5$ ,  $a < -5$  արմատ չունի

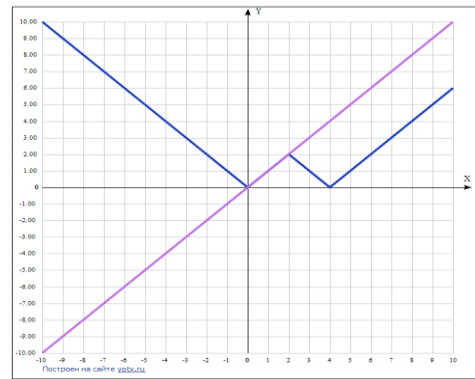
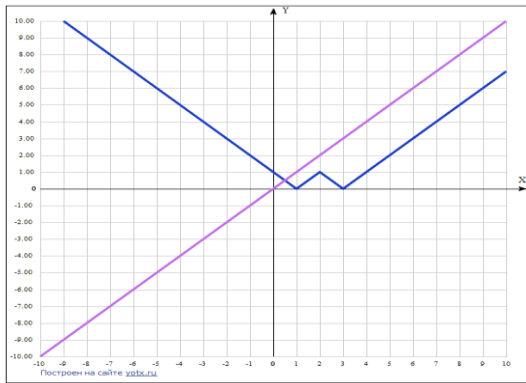
**Օրինակ 4**  $||x-2|-a^2|=x$  ա)  $a=0$



ա)  $|x-2|=x$  ունի 1 արմատ  $a=\pm 1$ ,

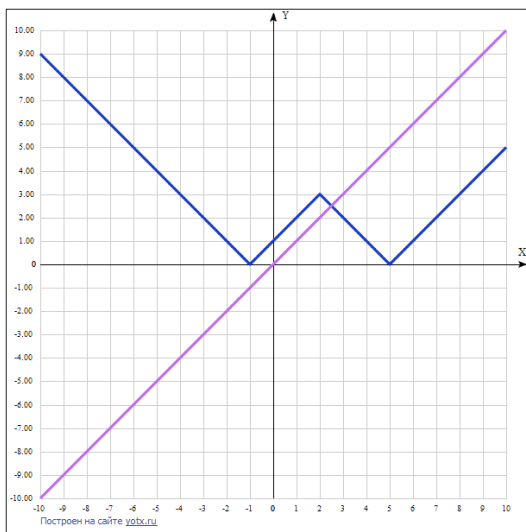
բ)  $a=\pm\sqrt{2}$

$||x-2|-1|=x$  ունի 1 արմատ



գ)  $f(x)=||x-2|-2|=x$  ունի անթիվ բազմությամբ արմատներ  $|a|>\sqrt{2}$ ,  $a=\pm\sqrt{3}$

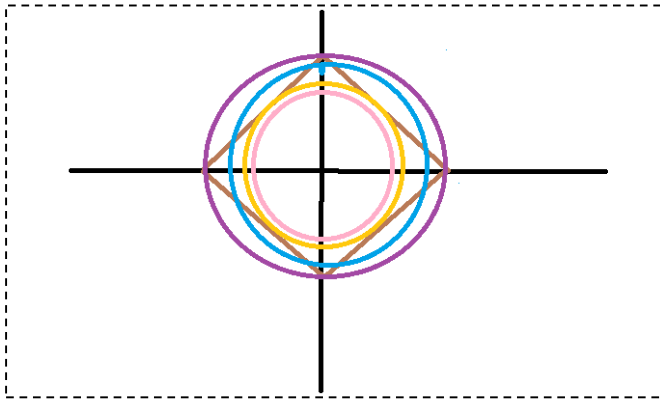
$||x-2|-3|=x$  ունի 1 արմատ



**Օրինակ 5**  $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

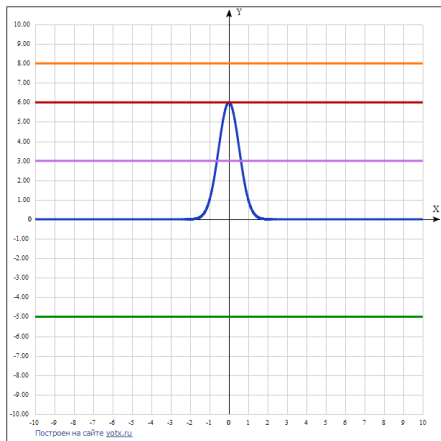
Կառուցենք  $|x| + |y| = 1$  ֆունկցիայի գրաֆիկը

- 1)  $a=0$  արմատ չունի
- 2)  $a=1$  և  $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$  դեպքում ունի 4 արմատ
- 3)  $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$  ունի 8 լուծում



**Օրինակ 6**  $6^{1-x^2} = a^2 + a$  :

Կառուցենք  $f(x) = 6^{1-x^2}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը



Կառուցենք  $y=a^2 + a$  գրաֆիկը

- 1) Հավասարում լուծում ունի այն և միայն այն դեպքում երբ՝

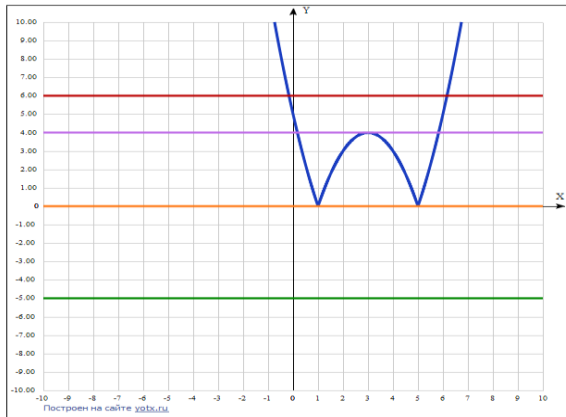
$$0 < a^2 + a \leq 6 \quad \begin{cases} a^2 + a > 0 \\ a^2 + a - 6 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a(a+1) > 0 \\ a \in [-3; 2] \end{cases}$$

- 2)  $a=-3$  կամ  $a=2$  հավասարումն ունի մեկ լուծում
- 3)  $a \in (-3, -1) \cup (0, 2)$  անհավասարումն ունի 2 արմատ

**Օրինակ 7**  $\log_3(31 - |x^2 - 6x + 5|) = a$ ,

Կատարենք համարժեք ձևափոխություն  $31 - |x^2 - 6x + 5| = 3^a$

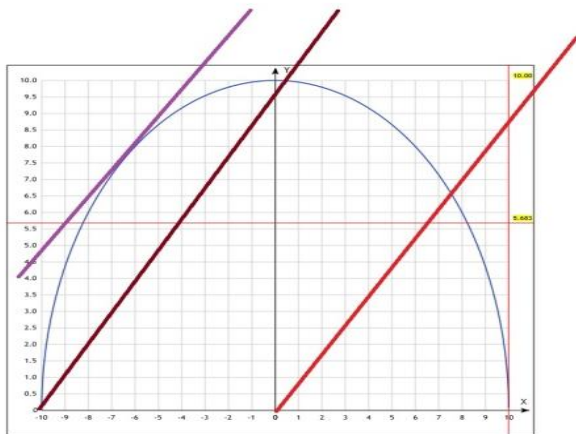
Կառուցենք  $F(x) = |x^2 - 6x + 5|$  : Կառուցենք  $y = 31 - 3^a$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $a$ -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում:



1.  $31 - 3^a < 0$ ,  $a > \log_3 31$ , հավասարումը արմատ չունի:
2. հավասարումը արմատ ունի միայն այն դեպքում, երբ  $31 - 3^a \geq 0$ ,  $a \leq \log_3 31$
3.  $a = 3$ ,  $31 - 3^a = 4$ , հավասարումը ունի 3 լուծում:
4.  $3 < a < \log_3 31$ , հավասարումը ունի 4 լուծում:
5.  $31 - 3^a > 4$ ,  $a < \log_3 27$ , հավասարումը ունի 2 լուծում
6. հավասարումը ունի 2 լուծում  $a = \log_3 31$  հավասարումը ունի 2 լուծում

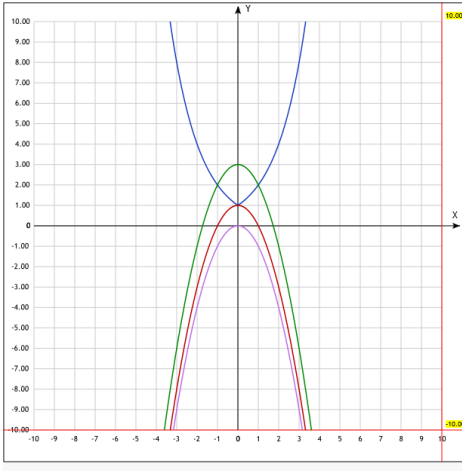
**Օրինակ 8**  $\sqrt{100 - x^2} = x - a$

1. Կառուցենք  $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$  գրաֆիկը:
2. Կառուցենք  $y = x - a$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $a$ -ի բոլոր հնարավոր արժեքների համար:
  - ա)  $a = 0$ , հավասարումն ունի մեկ լուծում:
  - բ)  $a > 10$ , հավասարումը լուծում չունի:
  - գ)  $-10 < a \leq -10$  և  $a = -10\sqrt{2}$ , հավասարումն ունի մեկ լուծում:
  - դ)  $-10\sqrt{2} < a < 10$ , անհավասարումն ունի երկու լուծում:





### Օրինակ 9 $2^{|x|} + x^2 = a$



1. Կառուցենք  $f(x)=2^{|x|}$

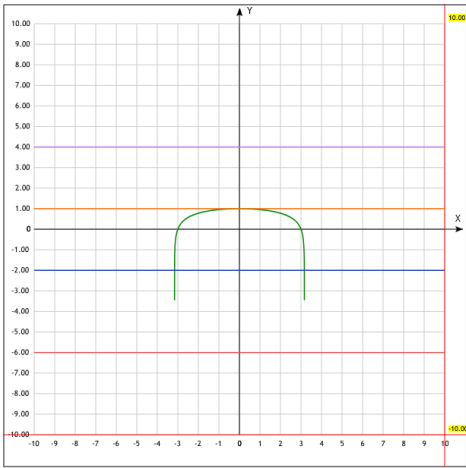
2. Կառուցենք  $y=\alpha-x^2$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $\alpha$ -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում:

ա)  $\alpha < 1$ ,  $y=-x^2$  հավասարումը լուծում չունի:

բ)  $\alpha = 1$ ,  $y=1-x^2$  հավասարումն ունի մեկ լուծում:

գ)  $\alpha > 1$ , հավասարումն ունի երկու լուծում:

### Օրինակ 10 $lg(10 - x^2) = \frac{\alpha - 4}{\alpha - 8}$



$\alpha$  պարամետրի ինչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի արմատ:

1. Կառուցենք  $f(x)=lg(10-x^2)$  ֆունկցիայի

գրաֆիկը: Կատարենք ֆունկցիայի հետազոտում:

2. Գտնենք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

$$x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$$

3. Գտնենք ֆունկցիայի զրոները:

$$lg(10-x^2)=0 \quad 10-x^2=1 \quad x^2=9 \quad x=\pm 3$$

$$(-3,0) \quad (3,0) \quad (0,1)$$

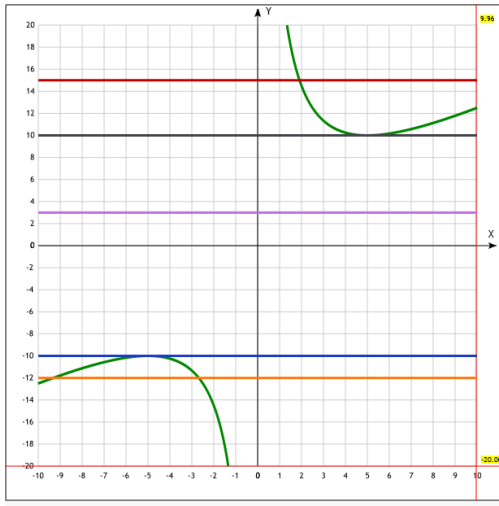
4. Գտնենք կրիտիկական կետերը:

$$f'(x) = \frac{-12x}{10-x^2} = 0 \quad x=0$$

Հավասարումը լուծում ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ  $\frac{\alpha-4}{\alpha-8} \leq 1$

$$\frac{\alpha-4}{\alpha-8} \leq 1 \quad \frac{\alpha-4}{\alpha-8} - 1 \leq 0 \quad \frac{\alpha-4-\alpha+8}{\alpha-8} \leq 0 \quad \frac{4}{\alpha-8} \leq 0 \quad \alpha \in (-\infty, 8)$$

### Օրինակ 11. $x + \frac{25}{x} = \alpha$



Կառուցենք  $f(x) = x + \frac{25}{x}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

1. Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. Գտնենք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը:

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} \quad x = \pm 5$$

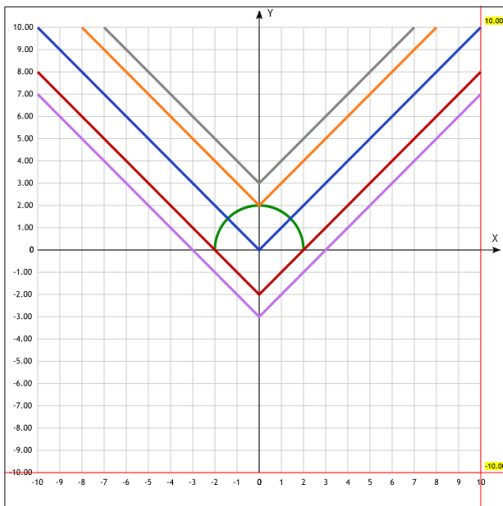
Կառուցենք  $y = \alpha$  ուղիղը  $\alpha$ -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում:

ա)  $\alpha = \pm 10$ , հավասարումն ունի միակ լուծում:

բ)  $\alpha > 10, \alpha < -10$  անհավասարումն ունի երկու լուծում

գ)  $-10 < \alpha < 10$  հավասարումը լուծում չունի:

### Օրինակ 12. $\sqrt{4 - x^2} = |x| - \alpha$



Կառուցենք  $y = \sqrt{4 - x^2}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

1. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը  $x \in [-2; 2]$

2. Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետը  $x_{max} = 0, y_{max} = 2$

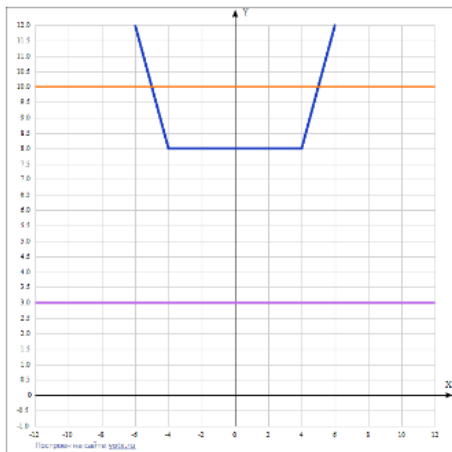
Կառուցենք  $f(x) = |x| - \alpha$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $\alpha$ -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում:

ա)  $\alpha = 0$ , հավասարումն ունի երկու լուծում

բ)  $\alpha = -2$ , հավասարումն ունի միակ լուծում

գ)  $\alpha < -2, \alpha > 2$  հավասարումը լուծում չունի

### Օրինակ 13 $|x-4| + |x+4| = b$



Կառուցենք  $y = |x-4| + |x+4|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Կառուցենք  $f(x) = b$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $b$ -ի հնարավոր արժեքների համար:

$b = 8$  հավասարումն ունի անթիվ բազմություններ լուծումներ:

$b > 8$  հավասարումն ունի 2 լուծում:  $b < 8$

հավասարումն լուծում չունի:

**Օրինակ 14**  $(a - 1)4^{-|x|} - 10 \cdot 2^{-|x|} + 1 = 0$

1. Գտնել  $a$  ի այն արժեքների քանակը, որոնց դեպքում հավասարումը ունի ճիշտ երկու արմատ
2. Գտնել  $a$  ի այն արժեքների քանակը, որոնց դեպքում հավասարումը ունի ճիշտ երեք արմատ
3. Գտնել  $a$  ի այն արժեքների քանակը, որոնց դեպքում հավասարումը ունի ճիշտ չորս արմատ.

Կատարենք համարժեք ձևափոխություն

$$\frac{a - 1}{4^{|x|}} - \frac{10}{a^{|x|}} + 1 = 0$$

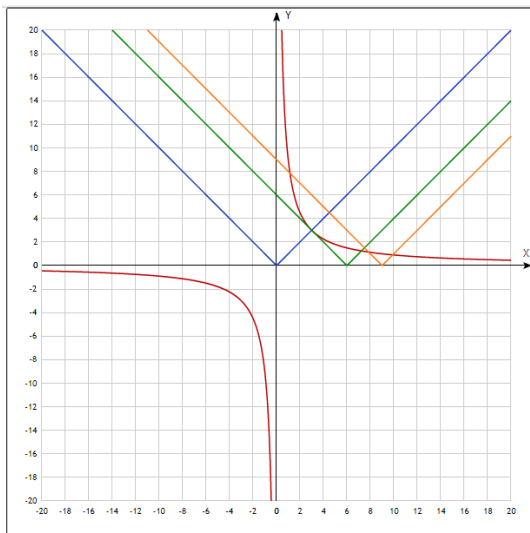
$$\frac{a - 1 - 10 \cdot 2^{|x|} + 4^{|x|}}{4^{|x|}}$$

Կառուցենք  $y = 4^{|x|} - 10 \cdot 2^{-|x|}$  և  $y = 1 - a$

ֆունկցիայի գրաֆիկները  $a$ -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում

- 1)  $a=26, a<9$  պայմանների դեպքում հավասարումն ունի երկու լուծում
- 2)  $10 < a < 26$  հավասարումն ունի չորս լուծում,
- 3)  $a=10$  հավասարումն ունի երեք լուծում

**Օրինակ 15**  $x|x - 2\sqrt{a - 7}| = 9$



Կատարենք համարժեք ձևափոխություն

$$|x - 2\sqrt{a - 7}| = \frac{9}{x}$$

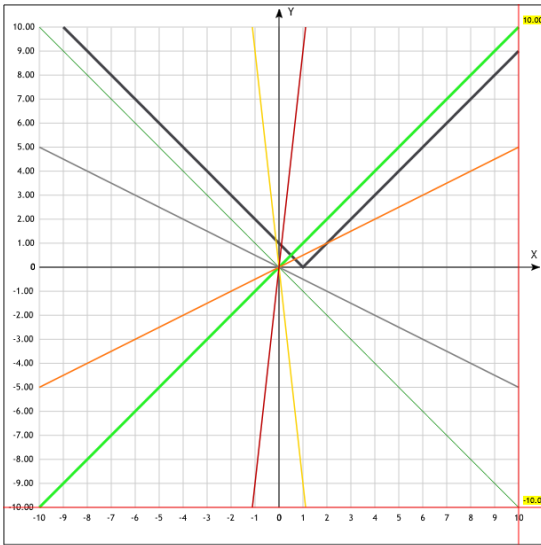
Կառուցենք  $y = \frac{9}{x}$  և  $y = |x - 2\sqrt{a - 7}|$

ֆունկցիաների գրաֆիկների  $a$ -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում

- 1)  $7 \leq a < 16$  հավասարումն ունի մեկ լուծում
- 2)  $a = 16$  հավասարումն ունի երկու լուծում
- 3)  $a > 16$  հավասարումն ունի երեք լուծում

## Գլուխ 2 Պարամետր պարունակող անհավասարումներ

### Օրինակ 1 $|x-1| \leq bx$



1. Կառուցենք  $f(x)=|x-1|$  և  $y=b(x)$  ֆունկցիաների գրաֆիկները  $b$ -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում:

ա)  $b=0$ , անհավասարումն ունի միակ լուծում:

բ)  $b \geq 1$ ,  $x \in [\frac{1}{b+1}; +\infty)$

գ)  $0 < b < 1$ ,  $x \in [\frac{1}{b+1}; \frac{1}{1-b}]$

դ)  $b < -1$ ,  $x \in (-\infty; \frac{1}{b+1}]$

ե)  $-1 < b < 0$ , լուծում չունի

### Օրինակ 2 $\sqrt{32-x^2} \leq x-b$



Կառուցենք  $f(x)=\sqrt{32-x^2}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Կառուցենք  $y=x-b$  ֆունկցիայի գրաֆիկը,  $b$ -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում:

ա)  $b > 4\sqrt{2}$ , անհավասարումը լուծում չունի:

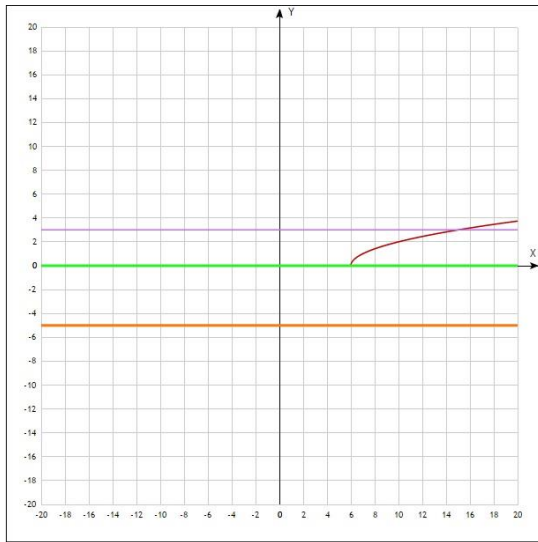
բ)  $-8 < b < 4\sqrt{2}$ , անհավասարումն ունի լուծումների միջակայք:

գ)  $b = -8$ , ունի միակ լուծում:

դ)  $b \leq -8$ , անհավասարման լուծումների բազմությունն համընկնում է անհավասարման

ԹԱԲ-ին:

### Օրինակ 3 $\sqrt{x-6} \leq 13-p$



Լուծել անհավասարումը:

Կառուցենք  $f(x)=\sqrt{x-6}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

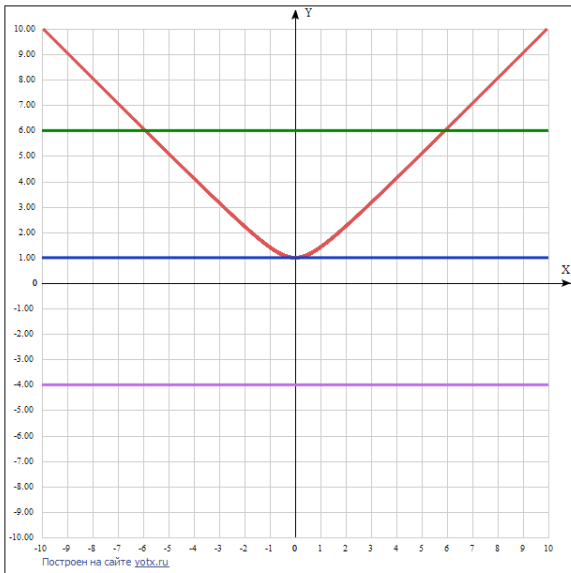
Կառուցենք  $y= 13-p$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $p$ -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում

ա)  $13-p = 0$  անհավասարումը ունի միակ լուծում:

բ)  $13-p > 0$  անհավասարումը ունի մեկից ավելի լուծումներ:

գ)  $13-p < 0$  անհավասարումը լուծում չունի:

### Օրինակ 4 $\sqrt{x^2 + 1} \geq a$



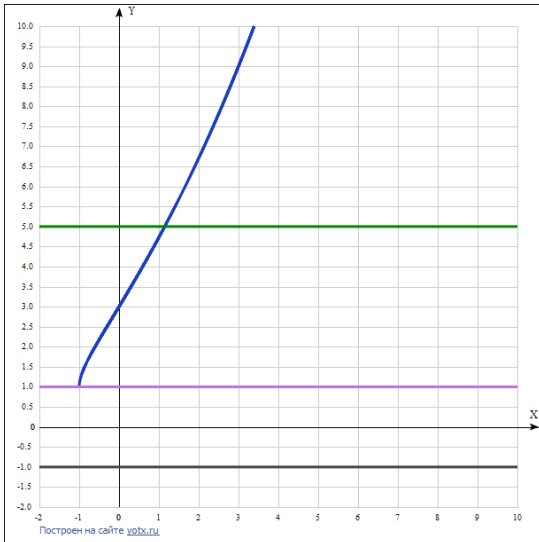
1 Կառուցենք  $f(x)=\sqrt{x^2 + 1}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

2.  $y=a$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $a$  -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում:

ա)  $a \leq 1, x \in \mathbb{R}$

բ)  $a \geq 1, x \in (-\infty; -\sqrt{a^2 - 1}] \cup [\sqrt{a^2 - 1}; \infty)$

**Օրինակ 5** Լուծել անհավասարումը:  $3^{\sqrt{x+1}} \leq b$



Կառուցենք  $f(x) = 3^{\sqrt{x+1}}$

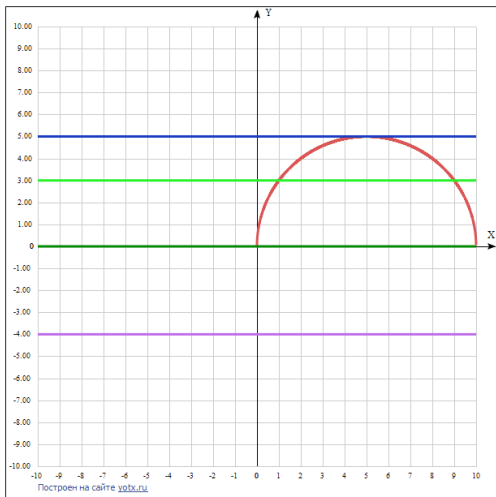
Ֆունկցիայի գրաֆիկը:

ա)  $b=1$  անհավասարումը ունի միակ լուծում:

բ)  $b > 1$ ,  $x \in [-1; \log^2_3 b - 1]$

գ)  $b < 1$  անհավասարումը լուծում չունի:

**Օրինակ 6**  $\sqrt{10x - x^2} \geq a$



1. Կառուցենք

$f(x) = \sqrt{10x - x^2}$

Ֆունկցիայի գրաֆիկը:

2. Կառուցենք  $y=a$

Ֆունկցիայի գրաֆիկը  $a$ -ի բոլոր հնարավոր արժեքների դեպքում:

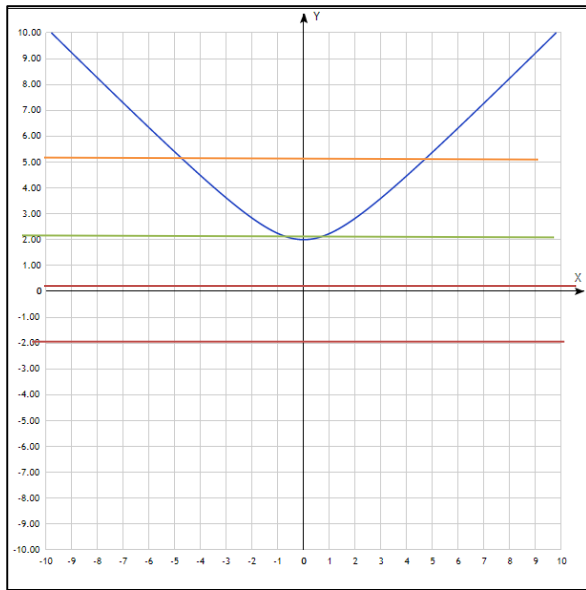
ա)  $a \leq 0$ , անհավասարման լուծումների բազմությունը համկնում է անհավասարման ԹԱԲ-ի հետ  $x \in [0; 10]$ :

բ)  $0 < a < 5$ , անհավասարումն ունի լուծումների միջակայք

$x \in [5 - \sqrt{25 - a^2}; 5 + \sqrt{25 - a^2}]$

գ)  $a=5$ , անհավասարումն ունի միակ լուծում  $x=5$  դ)  $a > 5$

## Օրինակ 7 $\sqrt{x^2 + 4} \leq a$



Կառուցենք  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Կառուցենք  $y=a$  ուղիղը,  $a$ -ի հնարավոր բոլոր արժեքների դեպքում:

- 1)  $a < 2, x \in \emptyset$
- 2)  $a = 2, x = 0$
- 3)  $a > 2, x \in [x_1, x_2]$

## Եզրակացություն

Պարամետրով հավասարումների և անհավասարումների լուծման գրաֆիկական մեթոդի լուծման արդյունքում սովորողների մոտ կամրապնդվեն քառակուսային, երկքառակուսային, լոգարիթմական, ռացիոնալ, իռացիոնալ ցուցային հավասարումների և անհավասարումների լուծման ալգորիթմները: Սովորողները կտիրապետեն պարամետրով հավասարումների և անհավասարումների լուծման գրաֆիկական եղանակին, քննարկելով պարամետրի հնարավոր բոլոր արժեքները տալով լուծման միջակայքերը:

Կառուցելով տրված ֆունկցիաների գրաֆիկները, սովորողների մոտ ամրապնդվում է նաև ֆունկցիա թեման և զարգացնում գրաֆիկներ կառուցելու կարողությունները և ձեռք են բերում հմտություններ:

Ծանոթանում են գրաֆիկներ կառուցելու էլեկտրոնային հարթակներին /GeoGebra, Yotx.ru և այլն/ և տիրապետում հիմնական գործիքներին:



## Գրականության ցանկ

1. «Հանրահաշվի և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» 12-րդ դասարանի դասագիրք, Հեղինակներ՝ Գ. Գևորգյան, Ա. Սահակյան :2005թ.
2. Մաթեմատիկայի շտեմարաններ մաս 1,2 2015թ.