



«ԻՆՏԵՐԱԿՏԻՎ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄ»
ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ



ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ
ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ
ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2022

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Քառակուսային ֆունկցիայի
գրաֆիկի կառուցման առանձնահատկությունները

ԹԵՄԱ

ԱՌԱՐԿԱ

ՀԵՂԻՆԱԿ

ՄԱՐԶ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ Զորավար Անդրանիկի անվան №12 հիմնական դպրոց

մաթեմատիկա

Մաթենիկ ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Արմավիր

Բովանդակություն

1. Ներածություն
2. $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը
3. $y = a(x + p)^2 + q$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը՝ օգտվելով $y = a^2$ գրաֆիկի տեղաշարժից՝ առանցքների ուղղությամբ.
 - $y = ax^2$ Ֆունկցիայի գրաֆիկի տեղաշարժը Oy առանցքով
 - $y = ax^2$ Ֆունկցիայի գրաֆիկի տեղաշարժը Ox առանցքով
 - $y = ax^2$ Ֆունկցիայի գրաֆիկի տեղաշարժը Ox և Oy առանցքներով
4. $y = a(x + p)^2 + q$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը այլ եղանակով
5. $y = ax^2 + bx + c$ Ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը
 - Լրիվ քառակուսու առանձնացումը
 - Բանաձևի օգնությամբ պարաբոլի գագաթի աբսցիսի որոշումը
 - Պարաբոլի կառուցումը այն կետում, որի օրդինատը հավասար է քառակուսային եռանդամի ազատ անդամին
 - Պարաբոլի կառուցումը քառակուսային եռանդամի արմատներով
6. $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը նոր կոորդինատային համակարգում
7. Վերջաբան
8. Գրականության ցանկ

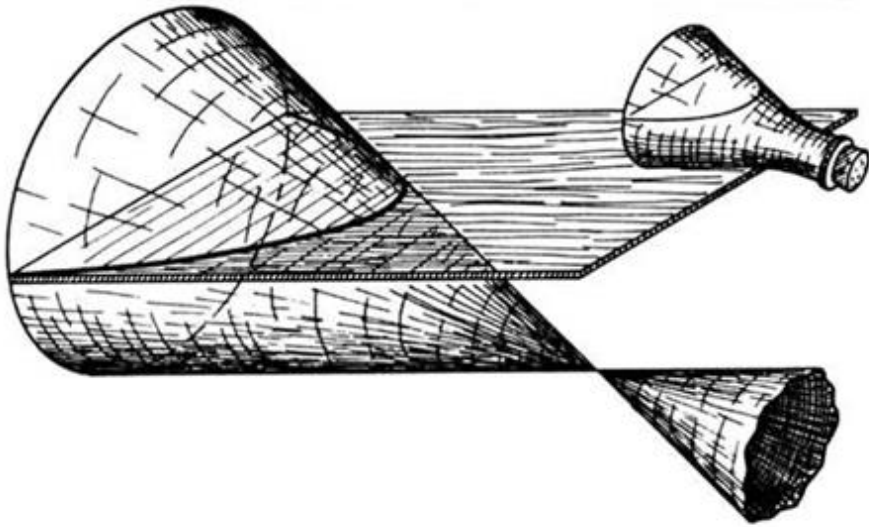
1. Ներածություն

Քառակուսային ֆունկցիա կոչվում է այն ֆունկցիան, որը տրվում է $y = ax^2 + bx + c$ տեսքով, որտեղ a , b և c – որոշակի թվեր են, ընդ որում $a \neq 0$:

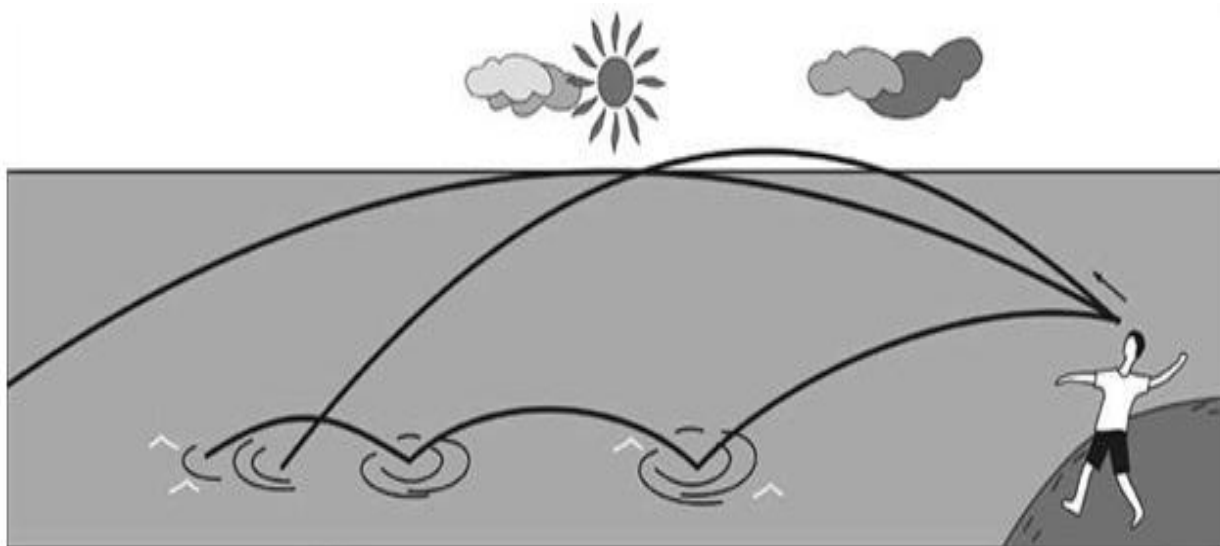
Քառակուսային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը հանդիսանում է իրական թվերի բազմությունը:

Ցանկացած քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը պարաբոլ է: Եթե $a > 0$, ապա պարաբոլի ճյուղերը ուղղված են դեպի վեր, եթե $a < 0$, ապա պարաբոլի ճյուղերը ուղղված են դեպի ներքև: Յուրաքանչյուր պարաբոլ ունի համաչափության առանցք և գագաթ: Համաչափության առանցքը ուղիղ է, որը զուգահեռ է y -ների առանցքին կամ հանդիսանում է հենց y առանցքը: Գագաթը այն կետն է, որով անցնում է համաչափության առանցքը: Գագաթը պարաբոլի ամենացածր կամ ամենաբարձր կետն է կախված ճյուղերի ուղղվածությունից:

Պարաբոլի հասկացությունը բացահայտվել է Հին Հունաստանի մաթեմատիկոսների կողմից, երբ ուսումնասիրել են կոնի հատումը որևէ հարթությամբ: Այդ հատումից առաջացած կորը անվանել են պարաբոլ:



Քարը, եթե բաց տարածքում նետենք հորիզոնի ուղղությամբ, ապա նրա հետագիծը կլինի պարաբոլ:



2. $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկ

Դիցուք՝ ունենք $y = ax^2$ ֆունկցիան, որտեղ $a \neq 0$.

Այս ֆունկցիան գույգ է, որովհետև ցանկացած x -ի համար, տեղի ունի $a(-x)^2 = ax^2$ հավասարությունը: Դա ցույց է տալիս, որ Oy առանցքը պարաբոլի համաչափության առանցքն է: $y = ax^2$ պարաբոլի և իր համաչափության առանցքի հատման կետն անվանում են պարաբոլի գագաթ, իսկ պարաբոլի համաչափության առանցքը՝ պարաբոլի առանցք:

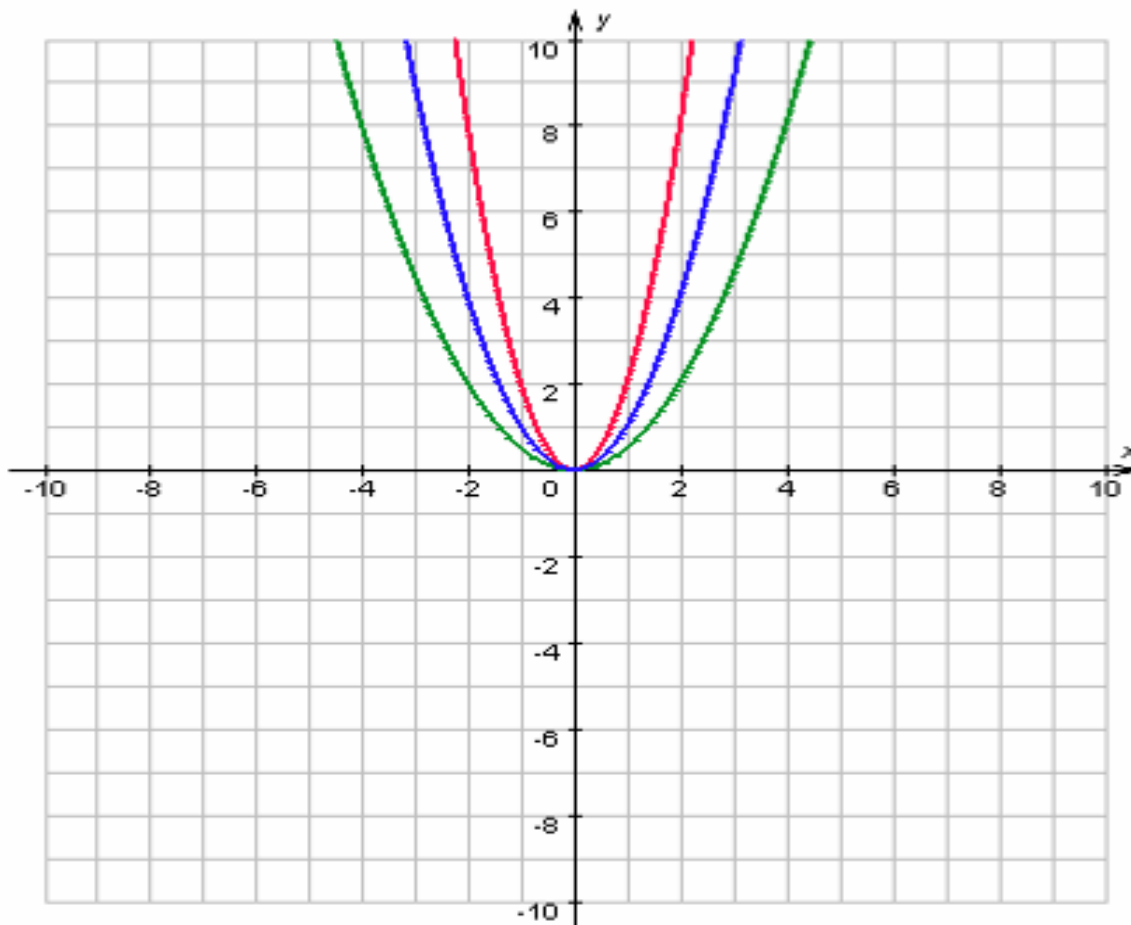
Օրինակ N° 1

Կառուցենք $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որտեղ $a > 0$:

ա) $y = x^2$ (գրաֆիկը նշված է կապույտ գույնով);

բ) $y = 2x^2$ (գրաֆիկը տրված է կարմիր գույնով);

բ) $y = \frac{1}{2}x^2$ (գրաֆիկը տրված է կանաչ գույնով).



Պարաբոլի գագաթն է $(0,0)$, $x=0$ համաչափության առանցքն է, ճյուղերն ուղված են դեպի վեր: Որքան մեծանում է a -ն, այնքան ճյուղերը սեղմվում են դեպի Oy առանցքը:

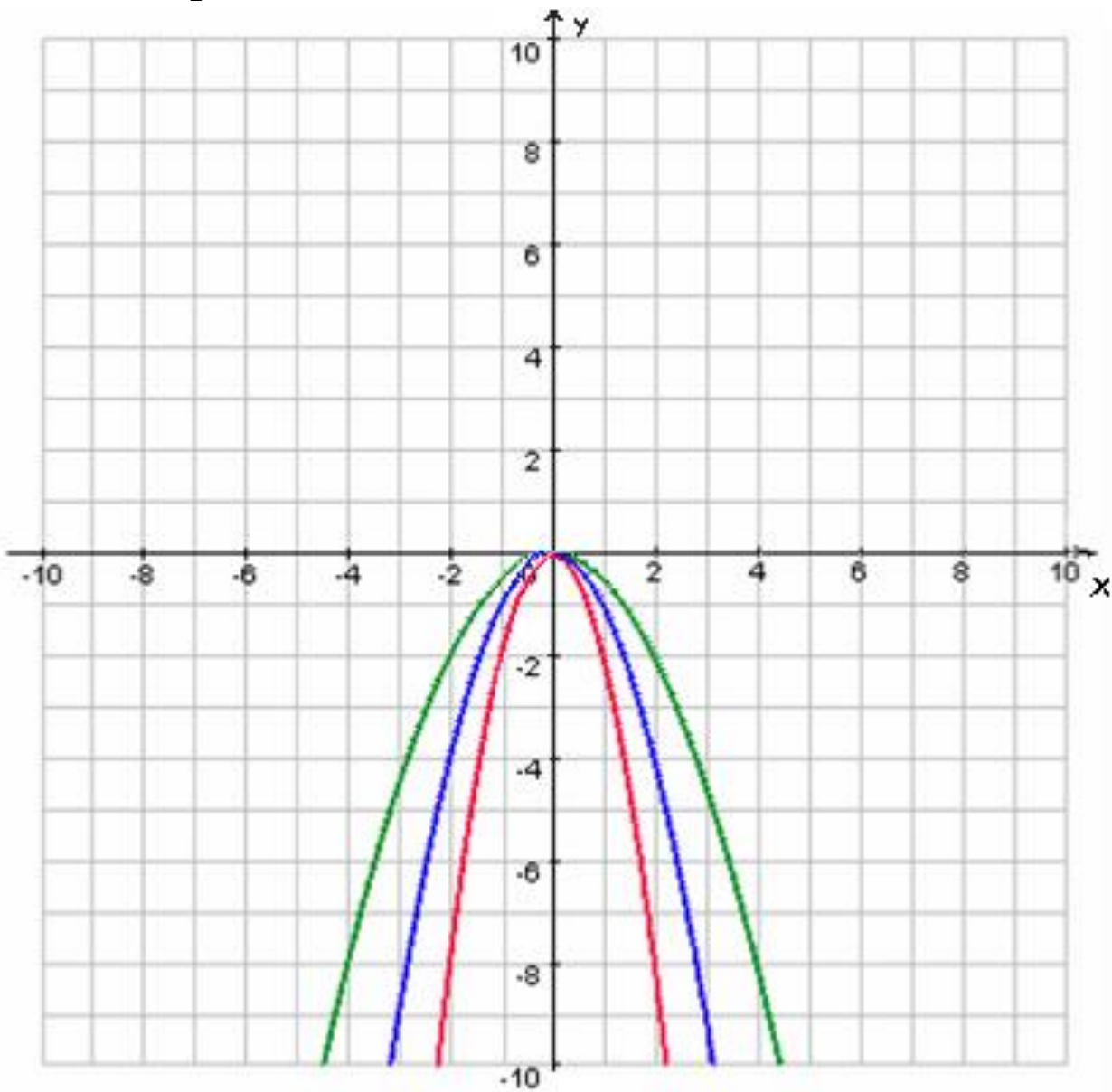
Օրինակ №2

Կառուցենք $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որտեղ $a < 0$:

ա) $y = -x^2$ (գրաֆիկը տրված է կապույտ գույնով);

բ) $y = -2x^2$ (գրաֆիկը տրված է կարմիր գույնով);

գ) $y = -\frac{1}{2}x^2$ (գրաֆիկը տրված է կանաչ գույնով).



Պարաբոլի գագաթն է $(0,0)$; համաչափության առանցքը՝ $x = 0$, իսկ պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են ներքև:

$y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի տեղաշարժը կոորդինատային առանցքներով

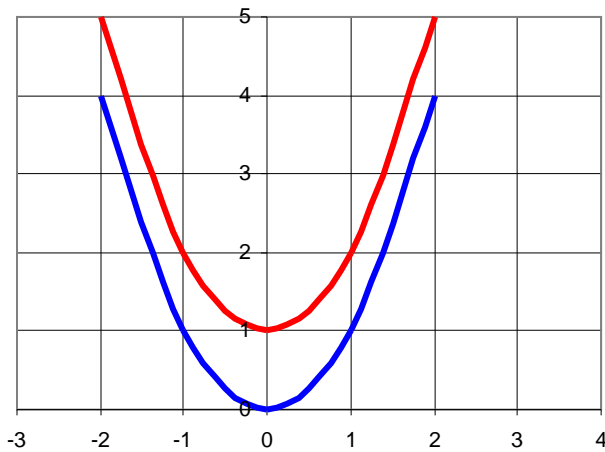
- $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի տեղաշարժը Oy առանցքով.

Որպեսզի կառուցենք $y = ax^2 + q$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, պետք է $y = ax^2$ պարաբոլը տեղաշարժել y -ների առանցքով q միավոր վերև, եթե $q > 0$, կամ $|q|$ միավոր ներքև, եթե $q < 0$. $y = ax^2 + q$ պարաբոլի գագաթն ունի $(0; q)$ կոորդինատները; իսկ $x = 0$ համաչափության առանցքը:

Օրինակ № 3

Կառուցենք $y = x^2 + 1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

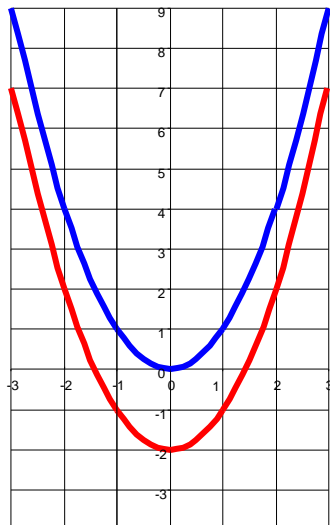
1. Կառուցենք $y = x^2$ պարաբոլը:
2. Տեղաշարժենք այն 1 միավոր դեպի վերև, արդյունքում կստանանք $y = x^2 + 1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Օրինակ № 4.

Կառուցենք $y = x^2 - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

1. Կառուցենք $y = x^2$ պարաբոլը:
2. Տեղաշարժենք այն 2 միավոր դեպի ներքև, արդյունքում կստանանք $y = x^2 - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:



- $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի տեղաշարժը Ox առանցքով

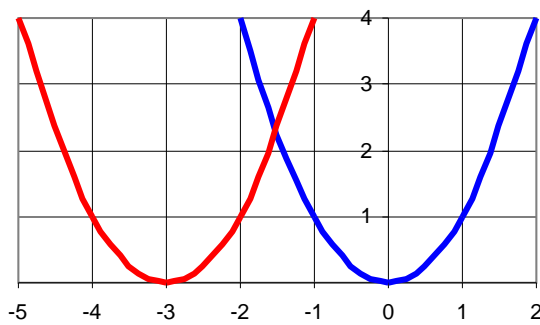
Որպեսզի կառուցենք $y = a(x + p)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, պետք է $y = ax^2$ պարաբոլը տեղաշարժել դեպի ձախ, եթե $p > 0$, կամ, եթե $p < 0$ դեպի աջ: Այս դեպքում պարաբոլի գագաթը կունենա $(-p; 0)$ կոորդինատները:

Օրինակ N°5

Կառուցենք $y = (x + 3)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

1. Կառուցենք $y = x^2$ պարաբոլը

2 Տեղաշարժենք այն դեպի ձախ 3 միավոր, կստանանք $y = (x + 3)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

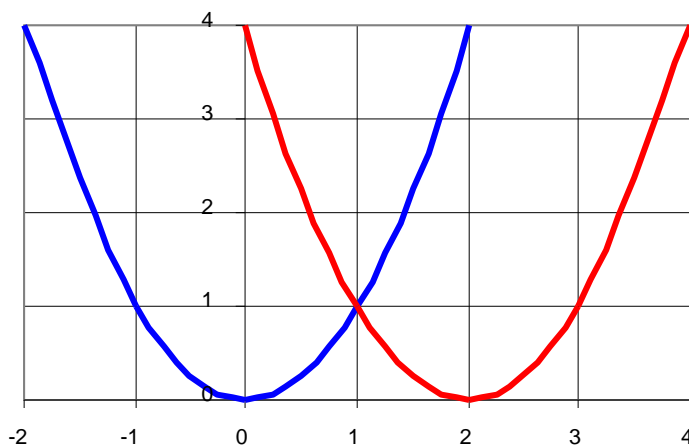


Օրինակ N°6

Կառուցենք $y = (x - 2)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

1. Կառուցենք $y = x^2$ պարաբոլը:

2. Տեղաշարժենք այն դեպի աջ 2 միավոր, կստանանք $y = (x - 2)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

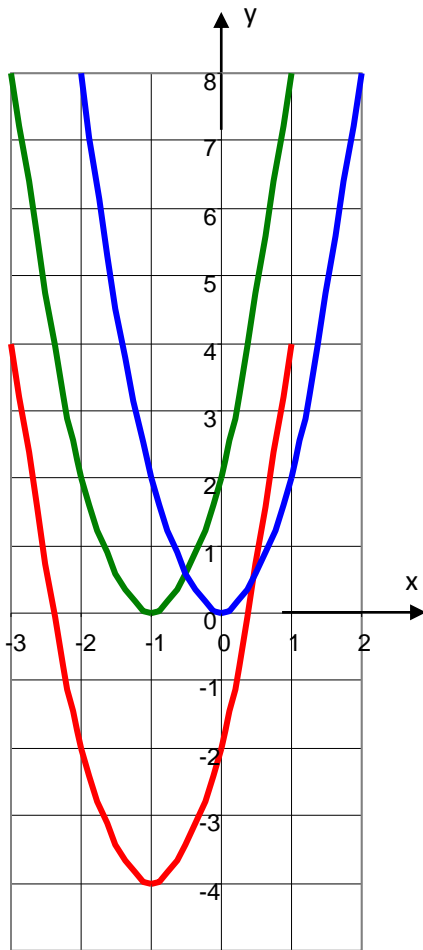


- $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի տեղաշարժը Ox և Oy առանցքներով:

Օրինակ №7

Կառուցենք $y = 2(x+1)^2 - 4$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

1. Կառուցենք $y = 2x^2$ պարաբոլը:
2. Տեղաշարժենք դեպի ձախ 1 միավոր, կստանանք $y = 2(x+1)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը
3. Կառուցված ֆունկցիայի գրաֆիկը տեղաշարժենք 4 միավոր դեպի ներքև, կստանանք $y = 2(x+1)^2 - 4$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Գործողությունները, որոնք կատարեցինք ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման ընթացքում, կարելի է պատկերել այսպես.

ձախ		ներքև
1 միավոր	8	4 միավոր

$$y = 2x^2 \longrightarrow y = 2(x+1)^2 \longrightarrow y = 2(x+1)^2 - 4.$$

Ջուգահեռ տեղաշարժը կարելի է կատարել նաև այսպես. $y = 2x^2$ պարաբոլը տեղաշարժենք դեպի ներքև 4 միավոր, ապա 1 միավոր դեպի ձախ, կստանանք $y = 2(x+1)^2 - 4$, այսինքն

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{Ներս} \\ 4 \text{ միավոր} \end{array} & & \begin{array}{c} \text{ձախ} \\ 1 \text{ միավոր} \end{array} \\
 y = 2x^2 \longrightarrow & y = 2x^2 - 4 & \longrightarrow y = 2(x+1)^2 - 4.
 \end{array}$$

$y = a(x+p)^2 + q$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցումը

Պարաբոլի գագաթը $(-p; q)$ կետն է:

$y = a(x+p)^2 + q$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ինչպես տեսանք կարելի է ստանալ $y = ax^2$ ֆունկցիան՝ զուգահեռ տեղաշարժելով կոորդինատների առանցքով, այլև մի քանի կետերի կոորդինատներով: Համաչափության առանցքն է՝ $x = -p$

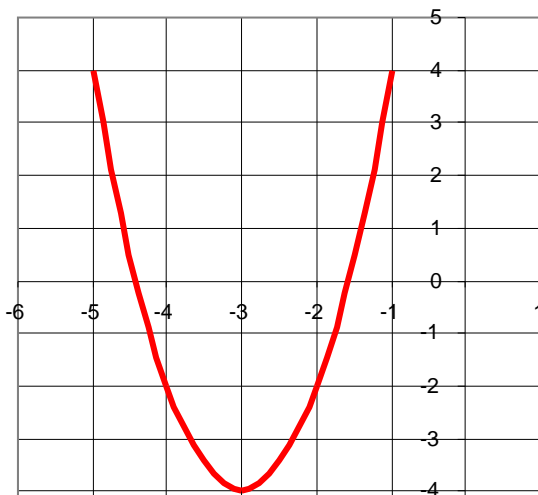
Օրինակ N°8

Այժմ կառուցենք $y = 2(x+3)^2 - 4$ ֆունկցիան:

Պարաբոլի գագաթի կոորդինատներն են $(-3; -4)$. Գտնենք ևս մի քանի կետերի կոորդինատներ, որոնք համաչափ են $x = -3$ ուղղին:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	14	4	-2	-4	-2	4	14

Կառուցենք այս կետերով անցնող պարաբոլը:



$y = ax^2 + bx + c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

- *Լրիվ քառակուսու առանձնացումով*

$y = ax^2 + bx + c$ քառակուսային ֆունկցիան լրիվ քառակուսու առանձնացումով կարելի է բերել այս տեսքի՝ $y = a(x + p)^2 + q$ ∴

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

$$\text{Որտեղից } p = -\frac{b}{2a}, \quad q = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Կառուցենք $y = a(x + p)^2 + q$ պարաբոլ ,որի գագաթի կոորդինատն է $(-p; q)$,իսկ համաչափության առանցքը՝ $x = -p$

Օրինակ №9

Կառուցենք հետևյալ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ $y = 2x^2 + 12x + 14$:

Ձևափոխենք $2x^2 + 12x + 14$ քառակուսային եռանդամը, առանձնացնելով լրիվ քառակուսին՝
 $2x^2 + 12x + 14 = 2(x^2 + 6x) + 14 = 2(x^2 + 6x + 9 - 9) + 14 = 2(x + 3)^2 - 18 + 14 = 2(x + 3)^2 - 4$.

Կառուցենք $y = 2(x + 3)^2 - 4$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի է ստանալ $y = 2x^2$ ֆունկցիան տեղաշարժելով նախ 3 միավոր դեպի ձախ, ապա 4 միավոր դեպի ներքև: Պարաբոլը կարելի է կառուցել՝ նաև մի քանի կետերի կոորդինատները գտնելով:

- *Պարաբոլի գագաթի կոորդինատների որոնումը.*

Քառակուսային եռանդամը ձևափոխելով, ստացանք բանաձև $a(x + p)^2 + q$

Պարաբոլի գագաթի արագիսը որոշվում է $x_0 = -\frac{b}{2a}$ բանաձևով: Այդ կետով անցնում է

նաև համաչափության առանցքը:

Նույն գրաֆիկը կարելի է ստանալ՝ հաշվելով պարաբոլի մի քանի կետերի կոորդինատները:

Օրինակ N°10

Կառուցենք $y = -x^2 - x + 4$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Նախ գտնենք պարաբոլի գագաթի աբսցիսը $x_0 = -\frac{b}{2a}$ բանաձևից: Ունենք $a = -1$, $b = -1$. Այդ

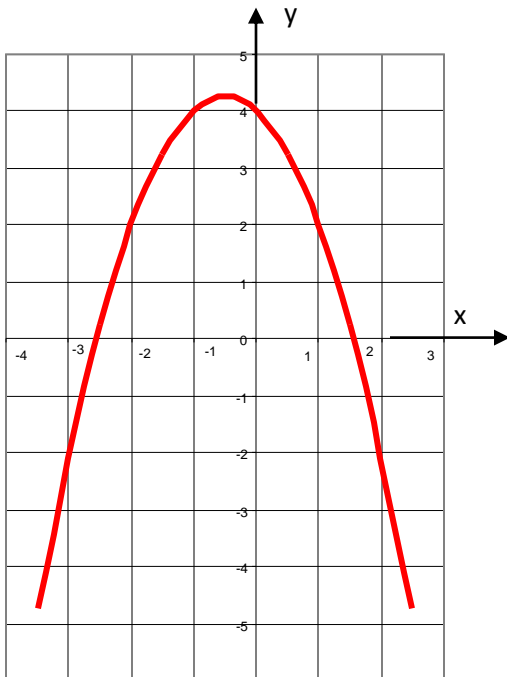
դեպքում $x_0 = -\frac{-1}{2 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2}$. Գտնենք պարաբոլի գագաթի

օրդինատը՝ $y = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4 = 4\frac{1}{4}$. Գտնենք մի քանի կետերի կոորդինատներ

համաչափ $x = -\frac{1}{2}$ առանցքին:

X	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
Y	-2	2	4	$4\frac{1}{4}$	4	2	-2

Կառուցենք այդ կետերով անցնող պարաբոլը:



- *Կառուցենք պարաբոլ՝ անցնող այն կետով, որի օրդինատը հավասար է $ax^2 + bx + c$*

Եռանդամի ազատ անդամին:

Դիտարկենք $y = ax^2 + bx + c$. քառակուսային ֆունկցիան:

Դիցուք $y = c$. Այդ դեպքում $ax^2 + bx + c = c$.

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ կամ } ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Լուծելով ստացված հավասարումը, ստացանք պարաբոլի երկու կետ $A(0; c)$,

$B(-\frac{b}{a}; c)$. որոնք համաչափ են պարաբոլի համաչափության առանցքի նկատմամբ: Հետևաբար

պարաբոլի համաչափության առանցքը հանդիսանում է AB հատվածի միջնուղղահայաց: Եվ AB հատվածի միջնակետն էլ հանդիսանում է պարաբոլի գագաթի օրդինատը: Պարաբոլի առավել ճշգրիտ կառուցման համար կարելի է դիտարկել մի քանի կետ ևս:

Օրինակ №11. Կառուցել $y = x^2 - 4x + 5$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Դիցուք $y = 5$.

Լուծենք հետևյալ հավասարումը.

$$x^2 - 4x + 5 = 5$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ կամ } x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

Կստանաք պարաբոլի երկու կետ. $A(0; 5)$, $B(4; 5)$:

AB հատվածի միջնակետի կոորդինատը կլինի պարաբոլի գագաթի աբսցիսը:

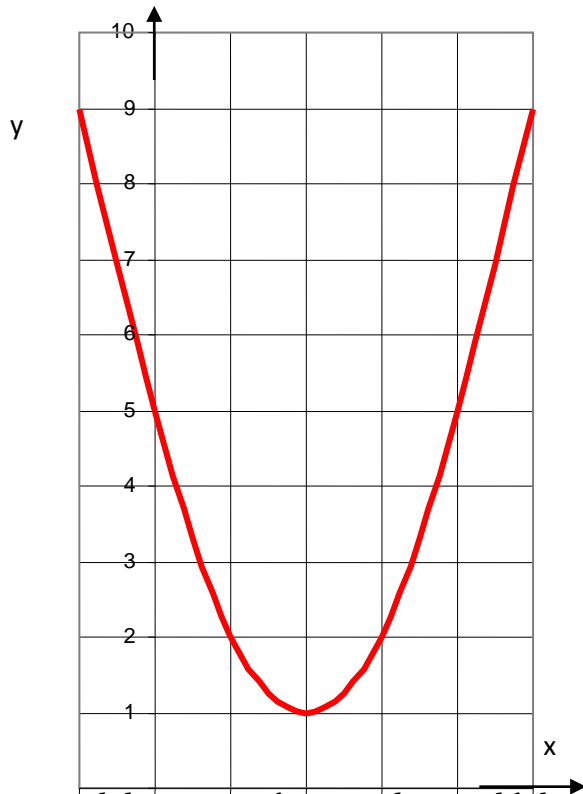
$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2$, տեղադրենք $x = 2$ բանաձևի՝ $y = x^2 - 4x + 5$ մեջ, կստանանք $y = 4 - 8 + 5 = 1$. Ստացանք

պարաբոլի գագաթի կոորդինատները՝ $(2; 1)$:

Հաշվենք մի քանի կետերի կոորդինատներ, որոնք համաչափ են պարաբոլի համաչափության $x = 2$ առանցքին;

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	9	5	2	1	2	5	9

Կառուցենք այդ կետերով անցնող պարաբոլը:



- Պարաբոլի կառուցումը քառակուսային եռանդամի արմատներով:

Դիցուք x_1 և x_2 -ն $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի արմատներն են: Այդ դեպքում $y = ax^2 + bx + c$ պարաբոլը կհատի աբսցիսների առանցքը $A(x_1; 0)$ և $B(x_2; 0)$ կետերում, իսկ համաչափության առանցքը կանցնի AB հատվածի միջնակետով: C կետը կհանդիսանա պարաբոլի գագաթի աբսցիսը, իսկ օրդինատը կգտնենք $y = ax^2 + bx + c$ բանաձևից:

Օրինակ N°12

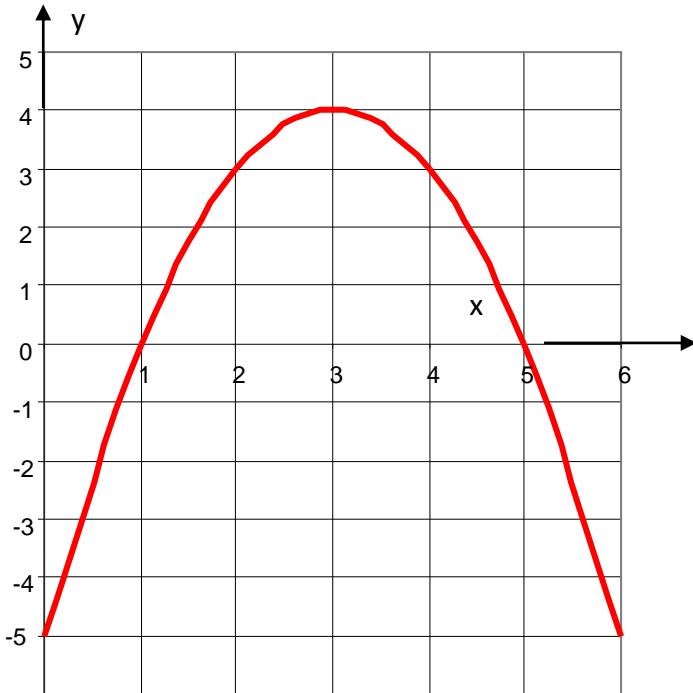
Կառուցենք $y = -x^2 + 6x - 5$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

$-x^2 + 6x - 5 = 0$ հավասարումից՝ $x_1 = 1$, $x_2 = 5$: Այժմ մենք գիտենք անհայտ պարաբոլի երկու կետեր, համաչափության առանցքը: $x = \frac{1+5}{2}$, $x = 3$. Տեղադրելով $X=3$ $y = -x^2 + 6x - 5$ բանաձևի մեջ, կստանանք $y = 4$, այսինքն՝ $C(3; 4)$, որն էլ հանդիսանում է պարաբոլի գագաթի կոորդինատը:

Այժմ գտնենք պարաբոլի ևս մի քաի կետ, որոնք կլինեն համաչափ $x=3$ համաչափության առանցքի նկատմամբ :

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	-5	0	5	4	5	0	-5

Կառուցենք այդ կետերով անցնող պարաբոլը.



- Կառուցենք $y = ax^2$ պարաբոլը նոր կոորդինատային համակարգում

Այսպիսով ստացվեց քառակուսային ֆունկցիայի կառուցման առավել հարմար մոտեցումնորված $y = a(x + p)^2 + q$ բանաձևով կամ $y = ax^2 + bx + c$ բանաձևով:

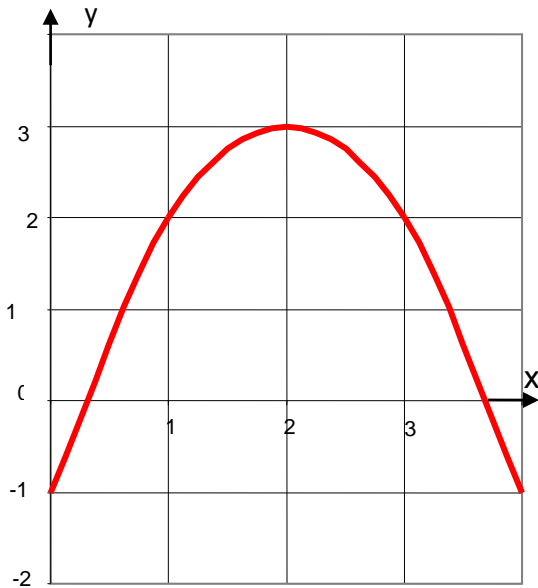
Իվերջոն քառակուսային $y = a(x + p)^2 + q$ ֆունկցիայի գրաֆիկը հանդիսանում է նույն պարաբոլը, ինչ որ $y = ax^2$ ֆունկցիայի պարաբոլը, միայն պարաբոլի գագաթի կոորդինատները կոորդինատների սկզբնակետից տեղափոխվում են $(-p; q)$. Այդ պատճառով կարելի է դիտարկել նոր կոորդինատային համակարգը $(-p; q)$ սկզբակետով: Դրա համար պետք է կառուցել $x = -p$ և $y = q$. ուղղիղները: В этой вспомогательной системе координат Еվ այդ կոորդինատային համակարգում կառուցել $y = ax^2$ պարաբոլը:

Նույն ձևով կարելի է կառուցել $y = ax^2 + bx + c$. ֆունկցիայի պարաբոլը նոր կոորդինատային համակարգում: Որոշելով պարաբոլի գագաթի կոորդինատները կատարված մեթոդներից որևէ

մեկով, կարելի է կառուցել $y = ax^2$ ֆունկցիայի պարաբոլը, մեկ այլ սկզբակետով : Արդյունքում կստանաք $y = ax^2 + bx + c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Օրինակ № 13.

Կառուցենք $y = -(x-2)^2 + 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

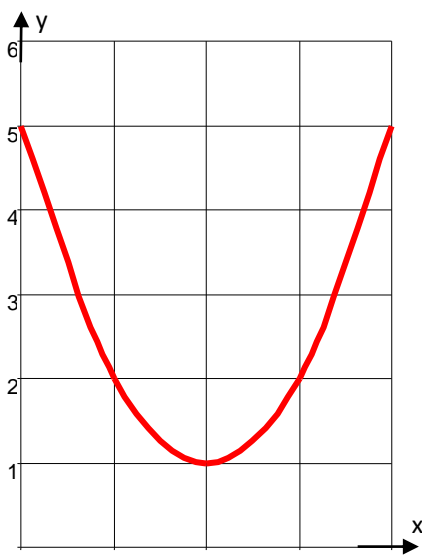


Օրինակ № 14.

Կառուցենք $y = x^2 - 4x + 5$. Ֆունկցիայի գրաֆիկը.

Գտնենք պարաբոլի գագաթի կոորդինատները: $x = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$, $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$.

Դիտարկենք պարաբոլ, որի գագաթի կոորդինատներն են (2;1): Դրա համար կառուցենք զծիկներով $x=2$ և $y=1$ ողիղները: Եվ այդ օժանդակ կոորդինատային համակարգում կառուցենք $y = x^2$ պարաբոլը:



ՎԵՐՁԱԲԱՆ

Պարաբոլի, այսպես ասած, հնարավոր կառուցումը նոր կոորդինատային համակարգում, բավականին հեշտացնում է քառակուսային ֆունկցիայի կառուցումը, երբ գագաթի կոորդինատները ամբողջ թվեր են:

Օրինակ $y = x^2 + 2x - 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար կլինի որոշել պարաբոլի գագաթի կոորդինատները, լրիվ քառակուսի առանձնացնելով

$y = x^2 + 2x + 1 - 4$, $y = (x + 1)^2 - 4$, և կառուցել $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $(-1; -4)$. սկզբնակետով նոր կոորդինատային համակարգում:

Պարաբոլի կառուցման մեթոդը որոշվում է, կախված քառակուսային ֆունկցիայի տրման բանաձևից, ինչպես նաև պարաբոլի կառուցման համար տրված պայմաններից: Կառուցել պարաբոլը առավել հարմար մեթոդով, կախված է նրանից, թե որ մեթոդն է սիրում, թե՛ որը հասկանալի:

Գրականության ցանկ

1. Հանրահաշիվ, 9-րդ դասարանի դասագիրք/թարգմանիչ և խմբագիրք Ռուբեն Ավետիսյան: Երևան «Անտարես» հրատարակչություն 2013:
- 2.

Գրականության ցանկ

Բ.Նահապետյան, Ա.Աբրահամյան «Մաթեմատիկա 6» դասագիրք,

Ս.Ս.Նիկոլսկի, Մ.Կ.Պոտապով « Հանրահաշիվ 7-րդ դասարանի դասագիրք» ,

Ս.Ս.Նիկոլսկի, Մ.Կ.Պոտապով « Հանրահաշիվ 8-րդ դասարանի դասագիրք»

- Алгебра. 8кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г.Мордкович – 3-е изд., доработ. – М.: Мнемозина, 2001.
- Математика: алгебра. Функции. Анализ данных: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б.Суворова, Е.А. Бунимович и др.; под ред. Г.В.Дорофеева. – М.: Просвещение, 2005.