«ԻՆՏԵՐԱԿՏԻՎ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄ»

ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2022

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ	Պարամետր պարունակող խնդիրները հանրահաշվի դասընթացում
ԱՌԱՐԿԱ	Հանրահաշիվ
ՀԵՂԻՆԱԿ	Արմեն Թորոսյան
ՂԵԿԱՎԱՐ	Գագիկ Էմինյան
ՄԱՐԶ	Լոռի
ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ	ՀՀ ԿԳՄՍՆ «Ալավերդու Ստ. Շահումյանի անվ. թիվ 5 ավագ դպրոց» ՊՈԱԿ

ԱԼԱՎԵՐԴԻ 2022թ.

Բովանդակություն

Ներածություն

Թեմայի արդիականությունը: Հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի հավասարումների և անհավասա- րումների բովանդակային գծում առանձնահատուկ ուշադրության են արժանի պարամետր պարունակող հավասարումները և անհավասարումները: Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ուսուցանվող թեմաներից համեմատաբար բարդ է համարվում պարամետր պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծումը: Դրանց լուծումը պահանջում է մտավոր տրամաբանելու կարողություն, որը անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր պահ պատկերացնել, թե ի՞նչ է արված, ի՞նչ պետք է անել, ի՞նչ են նշանակում արդեն ստացած արդյունքները:Այդ իսկ պատճառով որոշեցի հետազոտել այս թեման:

Պարամետր պարունակող խնդիրները համարվում են աշակերտների ստեղծագործական կարողությունների , ինչպես նաև կարողունակությունների (կոմպետենցիաների) զարգացման միջոց: Կրթությանը ներկայացվող արդի պահանջները ենթադրում են ոչ միայնաշակերտներին անհրաժեշտ տեղեկատվության և գիտելիքների հաղորդում, այլև այդ գիտելիքները ստեղծագործաբար կիրառելու կարողությունների զարգացում:

Մի շարք պարամետրական հավասարումներ և անհավասարումներ շատ հետաքրքիր են լուծվում, եթե դրանց լուծման ժամանակ օգտագործում ենք համապատասխան գրաֆիկներ: Գրաֆիկական մոտեցումը աշակերտին հնարավորություն է տալիս ակնառու դարձնելու առաջադրված խնդրի լուծման հետագա քայլերը: Կան մի քանի լուծման եղանակներ պարամետր պարունակող հավասարումների , անհավասարումների և համակարգերի՝ հանրահաշվական , անալիտիկ և ֆունկցիոնալ- գրաֆիկական:

Պարամեր պարունակող խնդիրները բարձրացնում են աշակերտների մաթեմատիկական գիտելիքները որակապես մի նոր աստիճանի. նպաստում են ինքնուրույն բացահայտել լուծման նոր ուղիներ, այսինքն՝ ստեղծագործել:

Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում առկա են պարամետրով հավասարումներ, որոնց լուծման մեջ գերիշխում է ալգորիթմական մոտեցումը:

Ավագ դպրոցում համակարգվում, խորացվում և ընդլայնվում են միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում ձեռք բերած հանրահաշվական գիտելիքները, ձևավորվում և զարգանում են վերլուծելու ու հետազոտելու կարողությունները:

«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» ուսումնական առարկայի չափորոշիչում նշված է.«… պարամետր պարունակող հավասարումների, անհավասարումների հետազոտման միջոցով ամրապնդել դեպքեր քննարկելու, դրանք սպառելու և վերլուծելու կարողություններ

Շտեմարանի «Պնդումների փունջ» բաժինը լուծելիս աշակերտը պետք է խոր և կայուն գիտելիք ունենա, առավել ևս, եթե հաշվի առնենք նաև այն հանգամանքը, որ ամբողջ աշխատանքի կատարմանը տրամադրվող ժամանակը այնքան էլ շատ չէ: Ուստի աշակերտը պետք է մտածի հակիրճ, տրամաբանորեն և հիմնավորված, ընտրի ամենառացիոնալ լուծման եղանակը:

Փորձը ցույց է տալիս, որ պարամետր պարունակող անհավասարումների լուծումն ավագ դպրոցում ոչ բոլոր աշակերտներին է հասանելի: Պատճառները տարբեր են:

Իմ կարծիքով, կարելի է վկայակոչել հետևյալ նկատառումները, որոնք խոչընդոտում են քննարկվող թեմայի յուրացմանը.

- աշակերտների կողմից ֆունկցիաների հատկությունների մեխանիկական սերտումը,
- «պարամետր» հասկացության ոչ ճիշտ ըմբռնումը,
- անհավասարման մեջ պարունակվող պարամետրի ոչ բոլոր արժեքների քննարկումը,
- առաջադրանքի պահանջի ոչ ճիշտ ըմբռնումը:

Հետազոտության նպատակը. դիտարկել մի քանի պարամետր պարունակող որոշ տիպական խնդիրներև լուսաբանել նրանց լուծման արդյունավետ մեթոդները:

Հետազոտության խնդիրները. տիպական առաջադրանքների լուծման միջոցով վեր հանել որոշ հնարներ, որոնք կվերաբերվեն պարամետր պարունակող հավասարումներին և անհավասարումներին:

Պարամետր պարունակող հավասարումներ

Երբեմն հավասարումը, բացի անհայտից , պարունակում է նաև այլ տառեր, որոնք կոչվում են պարամետրեր: Տվյալ դեպքում գործ ունենք անվերջ թվով հավասարումների հետ, քանիոր պարամետրի յուրաքանչյուր թույլատրելի արժեքի դեպքում ստանում ենք մեկ հավասարում: Պարամետրերի որոշ արժեքների դեպքում այն կարող է ունենալ մեկ կամ մի քանի արմատ, իսկ որոշ արժեքների դեպքում կարող է ընդհանրապես արմատ չունենալ:

Լուծել պարամետր պարունակող հավասարումը (անհավասարումը) ՝ նշանակում է լուծելայն պարամետրի բոլոր թույլատրելի արժեքների դեպքում: Այսինքն՝ նախ պետք է գտնել պարամետրի թույլատրելի արժեքները, այնուհետև պարզել, թե այդ արժեքներից որո՞նց դեպքում հավասարումն ունի արմատ և գտնել այդ արմատները:

Դիցուք տրված է x և a փոփոխականներ պարունակող հավասարությունը՝

$F(x, a)=0$ (1)

a փոփոխականի յուրաքանչյուր սևեռված(ֆիքսված) արժեքի դեպքում (1) հավասարությունը կարելի է դիտարկել որպես հավասարում x փոփոխականի (անհայտի) նկատմամբ և ընդհակառակը, x-ի յուրաքանչյուր սևեռված արժեքի դեպքում այն կարելի էդիտարկել իբրև հավասարում a փոփոխականի նկատմամբ: Ընդհանրապես, (1) հավասարությունը կարելի է դիտարկել նաև որպես երկու՝ x և a փոփոխականներով հավասարում:

Եթե պահանջվում է թվային որևէ A բազմության յուրաքանչյուր a տարրի համար լուծել

(1) հավասարումը x փոփոխականի նկատմամբ, ապա (1) հավասարումն անվանում ենմեկ՝ x փոփոխականով (անհայտով) և մեկ՝ a պարամետրով հավասարում: A բազմությունը կոչվում է պարամետրի փոփոխման տիրույթ:

Անհայտի ընտրությունը պայմանական է: Պայմանավորվեմ, որ այստեղ դիտարկվող (1)տեսքի հավասարումներն ընդունել որպես x փոփոխականով և a պարամետրով հավասարումներ (անհայտները կամ փոփոխականները սովորաբար նշանակում են x, y, z, ... տառերով, իսկ պարամետրերը՝ a, b, c, ... տառերով):

(1) հավասարումը, ըստ էության, հավասարումների մի ամբողջ բազմության (կամ՝ դասի)

հակիրճ գրառումն է, որոնցից յուրաքանչյուրը ստացվում է (1) հավասարու
մից՝ a-իկոնկրետ արժեքի դեպքում:

Լուծել (1) հավասարումը, նշանակում է՝ այն լուծել a պարամետրի բոլոր արժեքներիդեպքում:

Եթե (1) հավասարումը a պարամետրի թեկուզ մեկ արժեքի դեպքում չի քննարկվում, ապա այդ հավասարման լուծումն ավարտված չի համարվում:

Երկու և ավելի պարամետրերով և մեկ՝ x փոփոխականով հավասարումների հասկացությունները ներմուծվում են նույն ձևով: Օրինակ, մեկ՝ x փոփոխականով և երկու՝ aև b պարամետրերով հավասարման ընդհանուր տեսքն է՝

F(x, a, b)=0

Համանման ձևով ներմուծվում են նաև պարամետր պարունակող անհավասարումների(F(x, a)>0, F(x, a, b)>0 և այլն) հասկացությունները:

Օրինակ 1

Գտնել $f(x) = 3x + \frac{2}{x}$ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը:

Ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը այն a թվերի բազմությունն է, որոնց համար գոյություն ունի $f(x) = a$ թիվ:

Հետևաբար, պետք է գտնենք a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում $3x + \frac{2}{x} = a$ հավասարումը ունի արմատ: Կստանանք $3x^2 - ax + 2 = 0$ քառակուսային հավասարումը, որը կունենա արմատ, եթե $D \geq 0$

D = $a^2 - 24 \geq 0$

$a \in (-\infty; -2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6}; +\infty)$

Պատ՝. $E(f) = (-\infty; -2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6}; +\infty)$

Օրինակ 2

Լուծել $(a^2 - 4) = a - 2$ հավասարումը:

Դիտարկենք հետևյալ 2 դեպքերը

1) $a^2 - 4 = 0$ և 2) $a^2 - 4 \neq 0$

1) եթե $a^2 - 4 = 0$, կստացվի $a = 2$ կամ $a = -2$

▯) եթե $a = 2$, կստացվի $0 \times x = 0 => x \in (-\infty; +\infty)$

▯) եթե $a = -2$, կստացվի $0 \times x = -4 => x = \emptyset$

2) եթե $a^2 - 4 \neq 0 => x = \frac{a-2}{a^2-4} = \frac{1}{a+2}$

Պատ՝. R, եթե $a = 2$

$\emptyset$, եթե $a = -2$

$\frac{1}{a+2}$, եթե $a \neq \pm 2$

Օրինակ 3

Գտնել a և b պարամետրերի այն արժեքները, որոնց դեպքում $y = \sqrt{-2x^2 + (a+2b)x - a - b}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը համընկնում է $[3; 4]$ միջակայքի հետ:

Տրված ֆունկցիայի տիրույթը որոշվում է $-2x^2 + (a+2b)x - a - b \geq 0$ պայմանով: Քանի որ որոշման տիրույթը $[3; 4]$ միջակայքն է, ուստի անհավասարման լուծումների բազմությունը նույնպես պետք է լինի $[3; 4]$ միջակայքը, իսկ դա կնշանակի, որ $x_1 = 3$ $x_2 = 4$ թվերը վերջին անհավասարման ձախ մասի արմատներն են:

Ըստ Վիետի թեորեմի՝ $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a+2b}{2} = 7 \\ x_1 \times x_2 = \frac{a+b}{2} = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} a + 2b = 14 \\ a + b = 24 \end{cases} => b = -10$ $a = 34$

Պատ.՝ $a = 34,\ b = -10$

Այս վարժությունը քննարկելիս կարևոր է, որ աշակերտի ուշադրությունը հրավիրենք այն բանի վրա, թե ինչ է նշանակում, որ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը համընկնում է նշված միջակայքի հետ:

Օրինակ 4

Լուծել $\sqrt{5x - 3a + 11} + \sqrt{3x + 5a - 41}\ = 0$ հավասարումը;

Հավասարումը լուծում կունենա,եթե միաժամանակ $5x - 3a + 11 = 0$ և $3x + 5a - 41 = 0$:

Փաստորեն, պետք է լուծենք a պարամետրից կախված $\begin{cases} 5x - 3a + 11 = 0 \\ 3x + 5a - 41 = 0 \end{cases}$ համակարգը:

Կստացվի $x = 2$, երբ $a = 7$

Պատ.՝ 2, երբ $a = 7$

$\emptyset$, երբ $a \neq 7$

Օրինակ 5

a-ի ինչ արժեքների դեպքում է ֆունկցիան որոշված ամբողջ թվային առանցքի վրա:

$$y = \sqrt{x^2 + 6x + (a+2)^2} + \sqrt{x^2 - (a+1)x + 9}$$

Տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը պարամետր պարունակող հետևյալ համակարգի լուծումների բազմությունն է $\begin{cases} x^2 + 6x + (a+2)^2 \geq 0 \\ x^2 - (a+1)x + 9 \geq 0 \end{cases}$

Որպեսզի այս համակարգի լուծումների բազմությունը լինի ամբողջ թվային առանցքը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր անհավասարման լուծումների բազմությունը լինի ամբողջ թվային առանցքը: Այսինքն՝ յուրաքանչյուրի դիսկրիմինանտը պետք է լինի ոչ դրական: $\begin{cases} 9 - (a+2)^2 \leq 0 \\ (a+2)^2 - 36 \leq 0 \end{cases} <=> \begin{cases} a \in (-\infty: -5] \cup [1: +\infty) \\ a \in [-7: 5] \end{cases}$ Պատ.՝ $a \in [-7: -5]\ \cup\ [1: 5]$

Պարամետրեր պարունակող անհավասարումներ

Օրինակ 1

Լուծել $(a^2-4)x \leq a-1$ անհավասարումը:

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝

1) $a^2-4=0$

$a_1=-2$

$a_2=2$

$a=-2$ դեպքում ստանում ենք $0\times x \leq -3, x=\emptyset$

$a=2$ դեպքում ստանում ենք $0\times x \leq 1\,, x\in R$

2) եթե $a^2-4>0,$ ապա $x\leq \frac{a-1}{a^2-4}$

3) եթե $a^2-4<0,$ ապա $x\geq \frac{a-1}{a^2-4}$

Պատ.՝$\emptyset$, երբ $a=-2$

R, երբ $a=2$

$x\in \left(-;\frac{a-1}{a^2-4}\right]$, երբ $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

$x\in \left[\frac{a-1}{a^2-4};+\infty\right)$, երբ $a\in(2;2)$

Օրինակ 2

Տրված է $\sqrt{x^2-10x+25}<17-a^2$ հավասարումը:

1) Քանի ամբողջ թիվ է բավարարում անհավասարմանը $a=3$ արժեքի դեպքում:

2) Գտնել a-ի ամենամեծ ամբողջ արժեքը, որի դեպքում անհավասարումը լուծում ունի:

3) Քանի ամբողջ a-երի համար անհավասարումը լուծում ունի:

4) a-երի ինչ ոչ բացասական ամբողջ արժեքի դեպքում անհավասարումների լուծումների բազմությունը կպարունակի ամենաշատ քանակով ամբողջ թվեր:

Լուծումներ՝

Քանի որ $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$, ուստի տրված անհավասարումը կարելի է ներկայացնել՝

$|x-5| < 17 - a^2$ (1)

1) $a = 3$ դեպքում կլինի $|x-5| < 8$, որի լուծումը կլինի $x \in (-3;13)$, որին բավարարող ամբողջ թվերն են՝ $-2; -1; \ldots; 12$, որոնց քանակը 15 է:

□□□. □15

2) Տրված անհավասարումը լուծում ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $17 - a^2 > 0$: Այդ պայմանին բավարարող ամենամեծ ամբողջ թիվը 4-ն է:

Պատ.՝ 4

3) Լուծում ունի, երբ $17 - a^2 > 0$ $a \in \left(-\sqrt{17}; \sqrt{17}\right)$, որին բավարարող ամբողջ թվերն են $-4; -3; \ldots; 4$, որոնց քանակը 9-ն է:

Պատ.՝ 9

4) Անհավասարումը մեծագույն թվով ամբողջ լուծումներ կունենա այն դեպքում,երբ $17 - a^2$ մեծությունն ընդունի մեծագույն արժեք,այսինքն, $a = 0$ դեպքում:

Պատ.՝ 0 :

Պարամետր պարունակող հավասարումների (անհավասարումների) համակարգեր

Օրինակ 1

Տրված է $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$ համակարգը:

1) a-ի քանի արժեքի դեպքում համակարգը լուծում չունի:

2) Գտնել a-ի այն ամենափոքր բնական արժեքը, որի դեպքում համակարգն ունի միակ լուծում:

3) a-ի ինչ արժեքի դեպքում համակարգն ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ:

4) Գտնել a-ի այն ամենափոքր բնական արժեքը, որի դեպքում համակարգն լուծում ունի:

Լուծումներ՝

1) Համակարգը լուծում չունի, երբ $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} \neq \frac{a^2}{1}$

$\begin{cases} a = \pm 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$ $a = -1$

Պատ.՝ 1

2) Միակ լուծում կունենա, երբ $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}$ $a \neq \pm 1$,այսինքն ամենափոքր բնականը կլինի 2-ը

Պատ.՝ 2

3) Անվերջ բազմությամբ լուծումներ կունենա, երբ $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{a^2}{1}$, որին բավարարում է $a = 1$

Պատ.՝ 1

4) Քանի որ համակարգը լուծում չուներ, երբ $a = -1$, հետևաբար, ամենափոքր բնական արժեքը, որի դեպքում լուծում ունի $a = 1$-ն է:

Պատ.՝ 1

Օրինակ 2

a-ի ինչ արժեքների դեպքում համակարգը լուծում չունի:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0 \\ \quad 2x + 1 \geq a \end{cases}$$

Համակարգի հավասարման արմատներն են $x_1 = -2 \quad x_2 = -1$

Համակարգի անհավասարման լուծումը՝ $x \geq \frac{a-1}{2}$: Որպեսզի համակարգը լուծում չունենա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա $\frac{a-1}{2} > -1 \ \ a > -1$

Պատ.՝ $(-1;\ +\infty)$

Եզրակացություն

Այս թեման ուսումնասիրելուց հետո սովորողի մոտ մեկ անգամ ևս կարևորվում է մաթեմատիկայի կարևորությունը: Չէ որ ժամանակակից հասարակությունն ու մարդկային գործունեության ոլորտները, գիտությունն ու տեխնիկական առաջընթացն անհնար է պատկերացնել առանց մաթեմատիկայի: Հենց այս թեմայի շնորհիվ, դիտարկված օրինակների շնորհիվ աշակերտը ձեռք կբերի տրամաբանորեն մտածելու կարողություն, կարողունակություններ (կոմպետենցիաներ), հետևողականորեն կառուցելու, մտքերը ճշգրիտ և պարզ արտահայտելու ունակություններ, իրավիճակի քննադատաբար գնահատելու, վերլուծելու, կարևորն ու երկրորդականը զանազանելու, անջատ փաստերը համադրելու, ընդհանրացումներ անելու հմտություններ, ինչպես նաև ստեղծագործական ունակությունների զարգացում, քայլերի ճիշտ ընտրություն և դատողությունների տրամաբանական հաջորդականություն:

Տարբեր պահանջներով պարամետր պարունակող խնդիրները աշակերտին հնարավորություն տվեցին.

- վերլուծել խնդրի տվյալները, պայմանները, կապերն ու պահանջները,
- որոնել, մշակել, պլանավորել լուծման ուղիները,
- անդրադարձ կատարել տվյալների կոնկրետ արժեքներին,
- պարբերաբար և գիտակցաբար անդրադարձ անել իր կատարած դատողություններին, դրանով իսկ պարզել, թե որտեղ արդյունավետ չեն եղել կատարված քայլերը,
- գիտակցաբար որոշում կայացնել լուծման նոր ռազմավարություն ընտրելու, խնդիրըվերաիմաստավորելու, նոր տեղեկություններ փնտրելու վերաբերյալ,
- խնդիրների լուծման հմտություններն ավելի զարգացնել, երբ աշակերտը մտածում է առաջադրանքի կատարման այլ եղանակների մասին, նույնիսկ այն դեպքում, երբ նախնդրի լուծումը հաջողությամբ է ավարտել:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1. Առաքելյան Կ. Գ. «Պարամետր պարունակող առաջադրանքներ»
2. Գևորգյան Գ. Գ. , Սահակյան Ա.Ա. , «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր»
3. Պետական, ավարտական և միանսնական քննությունների առաջդրանքների Շտեմարան
4. «Մաթեմատիան դպրոցում» ամսագիր
5. «Մաթեմատիկա» առարկայի չափորոշիչ