«ԻՆՏԵՐԱԿՏԻՎ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄ»
ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2022

ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ	Հավանականությունների տեսության տարրերը
ԱՌԱՐԿԱ	Մաթեմատիկա
ՀԵՂԻՆԱԿ	Նազարյան Մարյամ Հակոբի
ՄԱՐԶ	Արմավիրի մարզ
ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ	գ. Խորոնքի միջնակարգ դպրոց
ՂԵԿԱՎԱՐ	Նարինե Սողոմոնյան

Բովանդակություն

Ներածություն 3

1. Հավանականության սահմանումը 4

2.Պատահույթի հավանականության հասկացությունը..5

3. Պատահույթների հավանականությունների հատկությունները...................................9

4. Հաճախականություն: Պայմանական հավանականություն: Պատահույթի հարաբերական հաճախականություն 12

5. Պայմանական հավավականություն: Անկախ պատահույթներ 13

Եզրակացություն..17

Օգտագործված գրականության ցանկ 18

Ներածություն

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի բովանդակային գծի նկատմամբ սովորողների մոտ հետաքրքրություն առաջացնելու տեսանկյունից՝ հավանականության հասկացության մեկնաբանումն, ինքնին, շատ գրավիչ է: Այն արդյունավետ միջոց է մաթեմատիկայի ներքին և արտաքին միջառարկայական կապերի ապահովման համար:

Մենք գտնում ենք, որ հավանականությունը մաթեմատիկայի դասագրքի գլխավոր բաժիններից մեկն է, որն ունի զարգացման մեծ ներուժ և լայն կիրառություն ուսուցման գործընթացում:

1. Հավանականության սահմանումը

Համաձայն հավանականության դասական սահմանման՝ A պատահույթի հավանականությունը հետևյալ հարաբերությունն է $P(A) = \frac{m}{n}$ որտեղ՝ n-ը փորձի բոլոր հավասարահնարավոր ելքերի թիվն է, m-ը՝ հավասարահնարավոր այն ելքերի թիվը, որոնք նպաստում են A պատահույթին: Այստեղ ենթադրվում է, որ հնարավոր n ելքերը վերջավոր են:

Սակայն շատ հաճախ, գործնական խնդիրներ լուծելիս, հնարավոր չէ նշել քննարկվող փորձի բոլոր հավասարահնարավոր ելքերը, իսկ կիրառական բնույթի խնդիրների մեծամասնությունում փորձի հնարավոր ելքերի թիվն անվերջ է: Հետևաբար, անհրաժեշտություն է առաջանում ընդհանրացնել և դիտարկել անվերջ թվով ելքերով տարրական պատահույթների տարածությունը՝ հիմքում դնելով հավանականության երկրաչափական մեկնաբանությունը, որն, ըստ էության, հնարավորություն է ստեղծում առանց նոր հասկացությունների և գիտելիքների ներմուծման քննարկել խնդիրների ծավալուն համակարգեր միաչափ, երկչափ և եռաչափ տարածություններում:

Փորձի հնարավոր ելքերի վերջավոր բազմությունից անվերջ բազմության անցումը սովորողների մոտ կարող է դժվարություններ առաջացնել: Շատ կարևոր է, որպեսզի սովորողները հասկանան, որ վերջինս ոչ թե հավանականության այլ սահմանում է, այլ հավանականության հաշվման մեկ այլ եղանակ: Այստեղ տարրական պատահույթը դիտվում է իբրև կետի պատահական ընտրություն մի որոշ տիրույթից:

Հետևելով Ա. Ն. Կոլմոգորովին՝[1] հավանականության դասական սահմանումը կարելի է վերաձևակերպել բազմությունների տեսության լեզվով: Տվյալ մոտեցման դեպքում դիտարկվում է X (դիսկրետ) պատահական մեծություն, որը կարող է ընդունել n հավասարահնարավոր, «հավասարահավանականե տարրական պատահույթների դիսկրետ շարքից (Ω տարրական պատահույթների բազմության տարրերից) մեկը:

[1] Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М. : ФАЗИС, 1998.

Դիցուք՝ դիտարկվող խնդրում նպաստող է A պատահույթը, այսինքն X պատահական մեծությունն ընդունում է m հավասարահնարավոր տարրական պատահույթներից (A⊂Ω բազմության տարրերից) ինչ-որ մեկը: Այդ դեպքում A պատահույթի հավանականությունը ստանում է այլ մեկնաբանություն, ինչը թույլ է տալիս հետագա ընդհանրացումներ կատարել: Ավելի ստույգ, A պատահույթի հավանականությունը հավասար է նպաստող պատահույթների (A⊂Ω բազմության տարրերի) բազմության ծավալի չափի հարաբերությանը, հնարավոր պատահույթների (Ω-ի տարրերի) ընդհանուր բազմության ծավալի չափին: Այն դեպքում, երբ հնարավոր ելքերի թիվն անվերջ է, այլ կերպ ասած, երբ X-ն անընդհատ պատահական մեծություն է, պահանջվում է մեկ այլ մոտեցում, որն այնքան էլ հեշտ չէ բացատրել սովորողներին՝ հիմնվելով միայն հավանականության դասական սահմանման վրա:

Կարևոր է սովորողներին օգնել տրամաբանական կամուրջ ստեղծել հավանականության հասկացության դասական և երկրաչափական մեկնաբանությունների միջև՝ լուծելով մոդելային խնդիրներ:

2. Պատահույթի հավանականության հասկացությունը

Այս կետում ներմուծված են հավասարահնարավոր պատահույթների, միակ հնարավոր պատահույթների, դեպքերի, հավաստի պատահույթների, անհնար պատահույթների, անհամատեղելի պատահույթների, պատահույթի հավանականության հասկացությունները:

Լուծումներ և մեկնաբանություններ

Խնդիր .... Նետում են խաղոսկր: Արդյո՞ք A (որ «6» միավոր կբացվի) և B (զույգ միավոր կբացվի) պատահույթները հավասարահնարավոր և միակ հնարավոր պատահույթներ են:

Լուծում. A և B պատահույթները հավասարահնարավոր չեն, քանի որ A պատահույթը հնարավոր է միայն մեկ դեպքում (որ «6» միավոր կբացվի), իսկ B պատահույթը ՝ երեք դեպքում (2, 4, 6 միավորների դեպքում): A և B պատահույթները նաև միակ հնարավորը չեն, քանի որ բացի A և B պատահույթներից կարող է տեղի ունենալ և երրորդ պատահույթը, օրինակ՝ կարող է բացվել «5» միավոր:

Խնդիր. Նետում են երկու մետաղադրամ: Դիտարկենք երկու պատահույթ. A - բացվել են երկու «զինանշան», B - բացվել է «գիր» (գոնե մեկ մետաղադրամի վրա): Արդյո՞ք A և B պատահույթները. ա) հավասարահնարավոր են, բ) անհամատեղելի են:

Լուծում. Ավելի պատկերավոր լինելու համար ենթադրենք, որ մետաղադրամները տարբեր են՝ մեծ և փոքր: Հնարավոր է չորս դեպք. 2 « զինանշան » է բացվում (Զզ), 2 « գիր » է բացվում՝ (Գգ), մեծ մետաղադրամի վրա « զինանշան» է բացվում, փոքրի վրա՝ « գիր » (Զգ), մեծ մետաղադրամի վրա « գիր » է բացվում, փոքրի վրա՝ « զինանշան » (Գզ):

ա) A և B պատահույթները հավասարահնարավոր չեն, քանի որ A պատահույթի համար նպաստավոր է միայն մի դեպք՝ (Զզ), իսկ B պատահույթի համար՝ 3 դեպք՝ (Գզ, Զգ, Գգ):

բ) A և B պատահույթներն անհամատեղելի են, քանի որ չեն կարող միաժամանակ տեղի ունենալ մեկ փորձի ընթացքում:

Խնդիր... Լոտոյի ընթացքում օգտագործվում են 1-ից մինչև 90 համարներով խաղաքարեր: Պատահականորեն հանում են մի խաղաքար: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ.

ա) A - «հանված խաղաքարի համարը բաժանվում է 10-ի»

բ) B - « հանված խաղաքարի համարը բաժանվում է 5-ի և 9-ի»

գ) C - «հանված խաղաքարի համարը փոքր է 100-ից»

դ) D - «հանված խաղաքարի համարը 77 է»:

Լուծում. ա) A պատահույթի համար նպաստավոր է 9 դեպք. եթե դուրս բերված խաղաքարը լինի 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 համարներից որևէ մեկը. $P(A) = 10 : 90 = 0{,}1$:

բ) B պատահույթի համար նպաստավոր է 2 դեպք. եթե դուրս բերված խաղաքարը 45, 90 համարներից մեկը լինի $P(B) = 2 : 90 = \frac{1}{45}$:

գ) C պատահույթի համար նպաստավոր է 90 դեպք. եթե դուրս բերվեն 1-ից մինչև 90 համարներով խաղաքարերը. $P(C) = 90 : 90 = 1$:

դ) D պատահույթի համար նպաստավոր է 1 դեպք. եթե հանեն 77 համարով խաղաքարը. $P(D) = 1 : 90 = \frac{1}{90}$:

Խնդիր… ա) Մտապահել են երկնիշ թիվ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ դուք միանգամից կկռահեք այդ թիվը:

բ) Մտապահել են տարբեր թվանշաններով երկնիշ թիվ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ դուք միանգամից կկռահեք այդ թիվը:

Լուծում. ա) Բոլոր երկնիշ թվերը՝ $99-9=90$: Հավանականությունը, որ դուք միանգամից կկռահեք այդ թիվը, հավասար է $\frac{1}{90}$ -ի:

բ) 90 երկնիշ թվերից $90-9=81$ հատը գրված են տարբեր թվանշաններով: Այդ թիվը միանգամից կռահելու հավանականությունը հավասար է $\frac{1}{81}$ -ի:

Խնդիր … Աշակերտը մտապահել է 100-ը չգերազանցող բնական թիվ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ այդ թիվը. ա) զույգ է, բ) բաժանվում է 4-ի, գ) բաժանվում է 10-ի, դ) 10-ի բաժանելիս ստացվում է 7 մնացորդ:

Լուծում. Առաջին 100 բնական թվերից 50 -ը զույգ թվեր են, 25 -ը բաժանվում են 4 –ի, 10 –ը բաժանվում են 10-ի և 10 –ը 10-ի բաժանելիս ստանում ենք 7 մնացորդ, դրա համար որոնելի հավանականությունը հավասար է. ա) $50:100=0,5$, բ) $25:100=2,5$, գ) $10:100=0,25$ դ) $10:100=0,1$:

Խնդիր … Օգտագործելով 1, 2, 3, 4, 5 թվերից որոշները, առանց կրկնության գրել են քառանիշ թիվ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ կարելի է միանգամից կռահել այդ թիվը:

Լուծում. Նման քառանիշ թվերի քանակը 120 է $(A_5^4=5\cdot4\cdot3\cdot2=120)$, հետևաբար՝ որոնելի հավանականությունը կլինի $1:120=\frac{1}{120}$:

Խնդիր … 1, 2, 3, 4, 5 թվանշաններից կազմել են քառանիշ թիվ (թվի թվանշանները կարող են համընկնել): Որքա՞ն է հավանականությունը, որ կարելի է միանգամից կռահել այդ թիվը:

Լուծում. Նման քառանիշ թվերի քանակը հավասար է՝ $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$, ուստի՝ որոնելի հավանականությունը հավասար է՝ $1:625=\frac{1}{625}$:

Խնդիր … Օգտագործելով 0 -ից տարբեր թվանշաններ, մի խաղացող կազմել է քառանիշ թիվ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ երկրորդ խաղացողը միանգամից կկռահի այդ թիվը:

Լուծում. Նման քառանիշ թվերի քանակը հավասար է. $A_9^4 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024$ -ի, ուստի որոնելի հավանականությունը հավասար է՝ $1:3024 = \frac{1}{3024}$:

Խնդիր ... Տուփի մեջ դրված են 6 սպիտակ և 8 սև գնդակներ: Դրանցից 2 սպիտակ և 3 սև գնդակները աստղիկներով նշագրված են: Տուփից պատահականորեն հանում են մի գնդակ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ դուրս է եկել աստղիկով սպիտակ գնդակ:

Լուծում. Հավանականությունը, որ դուրս կգա աստղիկներով երկու գնդակներից որևէ մեկը, հավասար է $2:(6+8) = \frac{1}{7}$ -ի:

Խնդիր ... K_1, K_2, K_3, K_4 ֆուտբոլային թիմերը աշխարհի առաջնությունում դուրս են եկել կիսաեզրափակիչ փուլ: Մասնագետները կարծում են, որ նրանց ուժերը գրեթե հավասար են: Որքա՞ն է պատահույթի հավանականությունը.

ա) A - «K_1 և K_2 թիմերը եզրափակիչ փուլ դուրս կգան»,

բ) B - «K_1 թիմը ձեռք կբերի «ոսկին», իսկ K_2 թիմը՝ «արծաթը»»

գ) C - «Թիմերը 1-ից 4-րդ տեղերը զբաղեցրել են K_4, K_1, K_3 հերթականությամբ»:

Լուծում. ա) Թիմերի ցանկացած զույգ կարող է դուրս գալ եզրափակիչ փուլ. 1) K_1 և K_2, 2) K_1 և K_3, 3) K_1 և K_4, 4) K_2 և K_3, 5) K_2 և K_4 , 6) K_3 և K_4: A պատահույթի համար նպաստավոր է այս 6 դեպքերից միայն 1 –ը, այսինքն՝ $P(A) = \frac{1}{6}$:

բ) Դիտարկված 6 դեպքերից յուրաքանչյուրում (նախորդ առաջադրանքում) «ոսկին» և «արծաթը» բաշխելու 2 դեպք է հնարավոր. B պատահույթի համար նպաստավոր են 12 դեպքերից միայն 1-ը, հետևաբար՝ $P(B) = \frac{1}{12}$:

գ) Քանի որ 1-ից 4-րդ տեղերը կարելի է բաշխել $P_4 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ եղանակներով, ապա C պատահույթի համար նպաստավոր է 24 հնարավորից 1 դեպք, այսինքն՝ $P(C) = \frac{1}{24}$:

3. Պատահույթների հավանականությունների հատկությունները

Սահմանենք A և B պատահույթների գումարը, A և B անհամատեղելի պատահույթների գումարը (միավորումը), A և B պատահույթների արտադրյալը (հատումը), ինչպես նաև ներմուծված են համապատասխան նշանակումները. $A \cup B$, $A+B$, $A \cap B$: Երկու պատահույթները անհամատեղելի են, եթե նրանք չեն կարող տեղի ունենալ միաժամանակ, այսինքն՝ գոյություն չունի պատահական փորձի ելք, որը միաժամանակ նպաստում է այդ պատահույթներին: Տանք նաև A պատահույթի հակադիր պատահույթի սահմանումը (որը նշանակվում է $\overline{A}$), ներմուծենք նաև $A \backslash B$ նշանակումը, ինչը նշանակում է, որ տեղի է ունենում A պատահույթը, բայց B պատահույթը՝ ոչ: Սահմանումը հետևյալն է. երկու պատահույթներ կոչվում են հակադիր, եթե պատահական փորձի յուրաքանչյուր ելք նպաստում է նրանցից մեկին և միայն մեկին:

Լուծումներ և մեկնաբանություններ.

Խնդիր... Նետում են խաղարկային խորանարդը: A պատահույթը կայանում է նրանում, որ կբացվի կամ 5, կամ 6 միավոր, իսկ B պատահույթը՝ կբացվի զույգ թվով միավոր: Ինչու՞մ են կայանում $A \backslash B$ և $B \backslash A$ պատահույթները: Հաշվե՛ք $P(A \backslash B)$ և $P(B \backslash A)$ հավանականությունները:

Լուծում. $A \backslash B$ պատահույթը կայանում է նրանում, որ 5 միավոր է բացվում. $P(A \backslash B) = \frac{1}{6}$: $B \backslash A$ պատահույթը կայանում է նրանում, որ բացվեն կամ 2 կամ 4 միավորները. $P(B \backslash A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$:

Խնդիր... Մի անգամ Գալիլեո Գալիլեյին մոտեցավ մի զինվոր և հարցրեց. «երեք խաղոսկր նետելիս ո՞ր գումարն է ավելի հաճախ հանդիպում՝ 9, թե՞ 10»: Գալիլեյն այս խնդիրը ճիշտ լուծեց: Ի՞նչ պատասխանեց Գալիլեյը:

Լուծում. Երեք խաղոսկր նետելիս հնարավոր են $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ դեպքեր, որոնցից յուրաքանչյուրին համապատասխանում է եռանիշ թիվ, որի առաջին, երկրորդ և երրորդ թվանշանները ցույց են տալիս առաջին, երկրորդ և երրորդ խաղոսկրերի վրա բացված միավորների քանակը.

$$111, 112, 113, 114, 115, 116, 211, \cdots, 665, 666:$$

Միավորների գումարը կլինի 9 միայն հետևյալ 25 դեպքերում.

126,	216,	315,	414,	513,	612,
135,	225,	324,	423,	522,	621,
144,	234,	333,	432,	531:	
153,	243,	342,	441,		
162,	252,	351,			
	261,				

Միավորների գումարը 10 կլինի հետևյալ 27 դեպքերում.

136,	226,	316,	415,	514,	613,
145,	235,	325,	424,	523,	622,
154,	244,	334,	433,	532,	631:
163,	253,	343,	442,	541,	
	262,	352,	451,		
		361,			

Հետևաբար, 9 միավորի հավանականությունը հավասար է $\frac{25}{216}$ -ի, իսկ 10 միավորի հավանականությունը՝ $\frac{27}{216}$: Ինչպես տեսնում ենք, ավելի հավանական է 10 միավորի դեպքը:

Խնդիր ... Ինչ-որ թագավորությունում, ինչ-որ երկրում ապրում են ճշմարտախոսներ, որ միշտ ճիշտն են ասում, և ստախոսներ, որոնք կամ ճշմարտությունն են ասում, կամ ստում են, բայց չեն սիրում դա խոստովանել: Որպեսզի ստախոսների թվի մասին հստակ ինֆորմացիա ունենան, կատարել են հետևյալ փորձը. փորձի յուրաքանչյուր մասնակցին հարցրել են. «Դուք ստախոս ե՞ք»: Մինչ պատասխանը մասնակիցը նետում էր մետաղադրամն այնպես, որ արդյունքը միայն իրեն տեսանելի լինի: Եթե զինանշան էր բացվում, ապա մասնակիցը պետք է ասեր «այո», անկախ այն հանգամանքից, թե նա իրականում ով է: Եթե մետաղադրամի վրա գիր էր լինում, ապա նա պետք է անկեղծ պատասխաներ հարցին (այս դեպքում հնարավոր չէ իմանալ, թե պատասխանողն իրականում ով է, քանի որ նրանք մետաղադրամի հետ կատարված փորձարկման արդյունքը): Փորձի արդյունքում պարզվել է, որ թագավորություն-հանրապետության քաղաքացիների

61% -ը պատասխանել են «այո», իսկ մնացածը՝ «ոչ»: Քաղաքացիների քանի՞ տոկոսն է ստախոս, եթե հարցմանը բոլորը մասնակցել են:

Լուծում. Համարում ենք, որ մետաղադրամի վրա զինանշան և գրի հայտնվելը հավասարահնարավոր է, ուստի քաղաքացիների 50% -ի մոտ զինանշան է բացվել և նրանք «այո» են ասել: Քաղաքացիների ևս 11% -ը «այո» են ասել (61-50=11%) , չնայած իրենց մոտ գիր է բացվել մետաղադրամի վրա: Նրանք ստախոս են: Եթե համարենք, որ ստախոսները հավասարապես են բաշխված մասնակիցների երկու խմբերի միջև (առաջին խումբը նրանք են, ում մոտ զինանշան է բացվել, իսկ երկրորդ խումբը՝ նրանք, ովքեր մետաղադրամի վրա գիր են տեսել), ապա առաջին խմբում ևս ստախոսները կազմում են բոլոր քաղաքացիների 11% -ը: Այս դեպքում ստախոսները կազմում են ամբողջ բնակչության 22% -ը:

Խնդիր... Դիցուք՝ ունենք 16 խաղաթղթեր. 4 «տղա», 4 «աղջիկ», 4 «թագավոր», 4 «տուզ»: Կապուկից պատահականորեն հանում են 1 խաղաթուղթ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ դուրս կգա կամ հաղթաթուղթ (козрная карта) կամ «աղջիկ» պատկերով խաղաթուղթ:

Լուծում. Դիցուք՝ A պատահույթը կայանում է նրանում, որ դուրս կգա հաղթաթուղթ. $P(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, իսկ B պատահույթը կայանում է նրանում, որ դուրս կգա «աղջիկ» պատկեր. $P(B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$: $A\cup B$ պատահույթը կայանում է նրանում, որ դուրս կգա կամ հաղթաթուղթ կամ «աղջիկ» պատկերով խաղաթուղթ: Այդ դեպքում $P(A\cup B)=P(A)+P(A)-P(AB)$: AB պատահույթը կայանում է նրանում, որ դուրս կգա հաղթաթուղթ « աղջիկը»՝ $P(AB)=\frac{1}{16}$: Այսպիսով, $P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$, այսինքն՝ որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{7}{16}$ -ի:

Կարելի է նաև այլ կերպ դատել. քանի որ հաղթաթղթերը 4 -ն են և «աղջիկ» խաղաթղթերն էլ են 4 –ը, ապա D պատահույթի համար (դուրս է եկել հաղթաթուղթ կամ «աղջիկ») նպաստավոր է 7 դեպք, հետևաբար՝ $P(D)=\frac{7}{16}$:

Խնդիր... Դիցուք՝ ունենք 52 խաղաթղթերից բաղկացած կապուկ: Կապուկից պատահականորեն հանում են մի խաղաթուղթ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ դուրս կգա կամ հաղթաթուղթ, կամ «աղջիկ» պատկերով խաղաթուղթ:

Լուծում. Դիցուք՝ A պատահույթը կայանում է նրանում, որ դուրս կգա հաղթաթուղթ. $P(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, իսկ B պատահույթը կայանում է նրանում, որ դուրս կգա «աղջիկ» պատկերը. $P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$: $A\cup B$ պատահույթը կայանում է նրանում, որ դուրս կգա կամ հաղթաթուղթ կամ «աղջիկ» պատկերով խաղաթուղթը: Այդ դեպքում $P(A\cup B)=P(A)+P(A)-P(AB)$: AB պատահույթը կայանում է նրանում, որ դուրս կգա հաղթաթուղթ « աղջիկը»՝ $P(AB)=\frac{1}{52}$:

Այսպիսով, $P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{13}-\frac{1}{52}=\frac{4}{13}$, այսինքն՝ որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{4}{13}$ -ի:

Կարելի է նաև այլ կերպ դատել. քանի որ հաղթաթղթերը 13 -ն են և «աղջիկ» խաղաթղթերն էլ 4 -ը, ապա D պատահույթի համար (դուրս է եկել հաղթաթուղթ կամ «աղջիկ») նպաստավոր է 16 դեպք, հետևաբար՝ $P(D)=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$:

4. Հաճախականություն: Պայմանական հավանականություն: Պատահույթի հարաբերական հաճախականություն

Այստեղ ներմուծված են պատահույթի հարաբերական հաճախականություն, հարաբերական հաճախականությունների վիճակագրական կայունության հասկացությունները, բերված են Բյուֆոնի և Պիրսոնի տվյալները զինանշան բացվելու մասին, որոնք ստացվել են մետաղադրամը շատ անգամ նետելու փորձի արդյունքում: Այստեղ դիտողություն է արված հավանականությունների տեսության աքսիոմային կառուցվածքի մասին, ինչպես նաև նշված է հավանականությունների տարրական և ընդհանուր տեսությունների տարբերությունների մասին:

Լուծումներ և մեկնաբանություններ

Խնդիր... 5 աշակերտներ մետաղադրամը 50 անգամ նետելու արդյունքում ստացել են հետևյալ տվյալները.

Աշակերտներ	Նետումների քանակը	Զինանշանի հայտնվելու քանակը	Զինանշանի հայտնվելու հարաբերական հաճախականությունը
1	50	27	0,54
2	50	28	0,56
3	50	23	0,46
4	50	26	0,52
5	50	24	0,48

Հաշվե՛ք զինանշանի հայտնվելու հարաբերական հաճախականությունը բոլոր 250 փորձերում:

Լուծում. Զինանշանի հայտնվելու հարաբերական հաճախականությունը հաշվելու համար Զինանշանի երևալու քանակը բաժանենք փորձերի քանակին.

$(27+28+23+26+24):250=0,512$:

5. Պայմանական հավանականություն: Անկախ պատահույթներ

Այս կետում բերված է պայմանական հավավականության հասկացությունը. B պատահույթի պայմանական հավավականությունը, եթե տեղի է ունեցել A պատահույթը: Դա AB պատահույթի պայմանական համար նպաստավոր ելքերի քանակի հարաբերությունն է A պատահույթի համար նպաստավոր ելքերի քանակին: Այս հավանականություն նշանակում են $P_A(B)$ նշանով: Այնուհետև ցույց է տրված $P(AB)=P(A)P_A(B)$, $P(AB)=P(B)P_B(A)$, $P_B(A)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ (եթե $P(B)>0$) և $P_A(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$,

(եթե $P(A)>0$)

բանաձևերի ճշմարտացիությունը

Ներմուծված է A և B անկախ պատահույթների հասկացությունը: Դրանք այն պատահույթներն են, որոնց դեպքում $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$:

Լուծումներ և մեկնաբանություններ

Խնդիր ... Նետել են խաղոսկրըը: ... A պատահույթը կայանում է նրանում, որ կբացվի 4 –ից ոչ ավել միավոր, իսկ B պատահույթը՝ կբացվի կենտ միավոր: Հաշվե՛ք հավանականությունը. ա) $P(A)$, բ) $P(B)$, գ) $P_B(A)$, դ) $P_A(B)$:

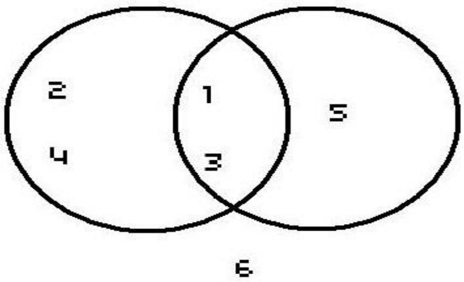
Լուծում. Ընդամենը հավասարահնարավոր և միակ հնարավոր 6 դեպք ունենք. (1, 2, 3, 4, 5, 6 միավորների հայտնվելը), որոնցից A պատահույթի համար նպաստավոր են 4 դեպքեր (1, 2, 3, 4 միավորների երևալը), B պատահույթի համար՝ 3 դեպքեր (1, 3, 5 միավորների երևալը), իսկ AB պատահույթի համար՝ 2 դեպքեր (1, 3 միավորների երևալը): $P(AB)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$:

ա) $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, գ) $P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

բ) $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, դ) $P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$:

Դիտողություն. Ստացված արդյունքները կարելի է մեկնաբանել (և նույնիսկ ստանալ առանց օգտագործված բանաձևերի) Էյլերի շրջանների միջոցով (նկար...)):

A պատահույթի տեղի ունենալու հավանականությունը, այն պայմանով, որ տեղի ունի B պատահույթը, հավասար է՝ $P_B(A)=\frac{2}{3}$, քանի որ A պատահույթը տեղի ունի B պատահույթը տեղի ունենալու երկու դեպքերում:



Նկար

B պատահույթի տեղի ունենալու հավանականությունը, այն պայմանով, որ տեղի ունի A պատահույթը, հավասար է՝ $P_A(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, քանի որ A պատահույթը տեղի ունի B պատահույթի տեղի ունենալու երկու դեպքերում:

Խնդիր .... Տուփի մեջ դրված են 15 գնդակներ՝ 7 սպիտակ և 8 սև: Դրանցից 3 սպիտակ և 2 սև գնդակները աստղիկներով նշագրված են: Փորձը կայանում է նրանում, որ տուփից պատահականորեն հանում են մեկ գնդակ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ դուրս է եկել աստղիկով սպիտակ գնդակ: A պատահույթը կայանում է նրանում, որ հանում են սպիտակ գնդակ, B պատահույթը՝ հանում են սև գնդակ, իսկ C պատահույթը՝ հանում են աստղիկով նշագրված գնդակ: Հաշվե՛ք հավանականությունը.

ա) $P(A)$, բ) $P(B)$, գ) $P(C)$, դ) $P_C(A)$,

ե) $P_C(B)$, զ) $P_A(C)$, է) $P_B(C)$, ը) $P_B(A)$:

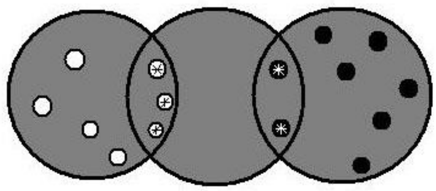
Լուծում. Ընդամենը հավասարահնարավոր և միակ հնարավոր 7+8=15 դեպք ունենք (հանվել է կամ սև, կամ սպիտակ, կամ աստղիկով գնդակ), որոնցից A պատահույթի համար նպաստավոր են 7 դեպքեր, B պատահույթի համար՝ 8, C պատահույթի համար՝ 5 դեպքեր, իսկ AB պատահույթի համար՝ 0 դեպք, AC պատահույթի համար՝ 3, BC պատահույթի համար՝ 2 դեպքեր: $P(AC)=\frac{3}{15}$, $P(BC)=\frac{2}{15}$:

ա) $P(A)=\frac{7}{15}$, բ) $P(B)=\frac{8}{15}$,

գ) $P(C)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, դ) $P_C(A)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{3}{15}:\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$,

ե) $P_C(B)=\frac{P(CB)}{P(C)}=\frac{2}{15}:\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$,

զ) $P_A(C)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{3}{15}:\frac{7}{15}=\frac{3}{7}$,



է) $P_B(C)=\frac{P(CB)}{P(B)}=\frac{2}{15}:\frac{8}{15}=\frac{1}{4}$,

ը) $P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0}{15}:\frac{8}{15}=0$:

Նկար

Այս արդյունքները կարելի է մեկնաբանել նաև Էյլերի շրջանների միջոցով (նկար ...):

Խնդիր... Երկու հրաձիգներ կրակում են թիրախին: Հավանականությունը, որ առաջին հրաձիգի նշանակետին կդիպչի 0,7 է, իսկ երկրորդ հրաձիգի համար՝ 0,8:

Համարելով, որ թիրախին հարվածելը յուրաքանչյուր հրաձիգի կողմից անկախ պատահույթ է, հաշվե՛ք հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

ա) երկու հրաձիգն էլ կդիպչեն թիրախին,

բ) առաջին հրաձիգը կդիպչի թիրախին, իսկ երկրորդը՝ ոչ,

գ) երկրորդ հրաձիգը կդիպչի թիրախին, իսկ առաջինը՝ ոչ,

դ) ոչ ոք չի կարողանա դիպչել թիրախին,

ե) գոնե մի կրակող կդիպչի թիրախին:

Լուծում. Համառոտ լինելու համար առաջին հրաձիգին նշանակենք A, իսկ երկրորդին՝ B: Դիցուք A պատահույթն է՝ A հրաձիգը դիպել է նշանակետին, իսկ B պատահույթը՝ երկրորդ հրաձիգն է դիպել նշանակետին, AB պատահույթը՝ երկու հրաձիգն էլ դիպել նշանակետին, այդ դեպքում $\overline{A}$ պատահույթը կլինի՝ A հրաձիգը չի դիպել նշանակետին, իսկ $\overline{B}$ պատահույթը՝ B հրաձիգը չի դիպել նշանակետին, $A\overline{B}$ պատահույթը՝ դիպել է A –ն, բայց չի դիպել B –ն, $\overline{A}B$ պատահույթը՝դիպել է B –ն, բայց չի դիպել A –ն, $\overline{AB}$ պատահույթը՝ ոչ ոք չի դիպել նշանակետին: $A\cup B$ պատահույթը՝ դիպել է նշանակետին գոնե մեկը: A և B, A և $\overline{B}$, $\overline{A}$ և B, $\overline{A}$ և $\overline{B}$ պատահույթներն անկախ են, հետևաբար՝

ա) $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0,7\cdot 0,8=0,56$,

բ) $P(A\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0,7\cdot(1-0,8)=0,14$,

գ) $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=(1-0,7)\cdot 0,8=0,24$,

դ) $P(\overline{AB})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=(1-0,7)(1-0,8)=0,06$,

ե) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-0,56=0,94$:

Եզրակացություն

Այսպիսով հավանականության դիտարկումը զարգացնում է սովորողների տարածական պատկերացումները և նպաստում է որոնելի հավանականային իրավիճակը կարողությունների ձևավորմանը:

Մեթոդական տեսակետից նշված հասկացության ներմուծումը հնարավորություն է տալիս նյութի ուսուցումն աշակերտների համար դարձնել միջառարկայական կապերով ապահոված և հետաքրքիր, ինչն էլ խթան է հանդիսանում ուսումնական գործընթացի արդյունավետ իրագործման համար:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1. Միքայելյան Հ.Ս., Հանրահաշիվ, հանրակրթ. դպրոցի 8-րդ դաս. դասագիրք, Եր., Էդիտ Պրինտ, 2007թ.:

2. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա. Ս. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, ավագ դպրոցի 12-րդ դաս. դասագիրք, Եր., 2011թ..:

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. : Высшее образование, 2006.

4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М. : ФАЗИС, 1998.