«ԻՆՏԵՐԱԿՏԻՎ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄ»
ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2022

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ Պարամետրական հավասարումների և անհավասարումների հետազոտման պրոցեսում աշակերտների դժվարությունների ու կարիքների բացահայտում

ԱՌԱՐԿԱ Մաթեմատիկա

ՀԵՂԻՆԱԿ Հարությունյան Հռիփսիմե

ՄԱՐԶ Շիրակ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ «Մարատակի միջնակարգ դպրոց » ՊՈԱԿ

Պարամետրական հավասարումների և անհավասարումների հետազոտման պրոցեսում աշակերտների դժվարությունների ու կարիքների բացահայտում

Բովանդակություն

1.Ներածություն 2

2. Պարզագույն պարամետրական հավասարումների ու անհավասարումների լուծումը

2.1. Պարզագույն պարամետրական հավասարումների լուծումը.......... 3

2.2. Պարզագույն պարամետրական անհավասարումների լուծումը 7

2.3. Պայմաններով խնդիրներ 9

3. Պարամետր պարունակող եռանկյունաչափական հավասարումներ 14

4. Եզրակացություն 16

5. Օգտագործված գրականության ցանկ 17

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Թեման, որն ընտրվել է իմ կողմից, բավականին բարդ թեմա է: Սովորողը հանդիպում է պրոբլեմի, դժվարության, խուսափում է թեմայից: Պարամետր պարունակող հավասարումները, ինչպես նաև պարամետր պարունակող անհավասարումների լուծումները համեմատաբար ավելի դժվար են քան հավասարումները կամ անհավասարումները: Պարամետրական կարողությունները սովորողների մոտ զարգացնելու համար պետք է սկսել ավելի պարզ առաջադրանքներից և խորացնել: Փորձը ցույց է տալիս, որ երբեմն պարամետրական հավասարումների և անհավասարումների լուծման ճշգրտությունը կախված է հավասարումների տիպը ճիշտ որոշելուց և այդ տիպի ֆունկցիայի գրաֆիկն ճիշտ հասկանալուց ու պատկերելուց: Ուստի, կարևորում եմ դպրոցական դասընթացում « Թվային ֆունկցիա» թեմայի խորացված ուսուցումը: Խիստ ուշադիր պետք է լինել, որ սովորողները լավ ճանաչեն տարրական ֆունկցիաների գրաֆիկական տեսքը, իմանան ֆունկցիաների ձևափոխման բոլոր տեսակները: Պետք է կարողանան տարբեր եղանակներով գտնել տրված ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը, ինչպես նաև կարողանան հետազոտել տրված ֆունկցիան:

Թեմայի նպատակը`

Բացահայտել աշակերտների դժվարությունները և կարիքները պարամետրական հավասարումների և անհավասարումների լուծման եղանակների ընկալման պրոցեսում:

Խնդիրները`

1. Ուսումնասիել վերոհիշյալ հարցի վերաբերյալ աշակերտների կարիքները տարբեր դասարաններում:

2. Սովորեցնել այդ դժվարությունների հաղթահարման ուղղությունները:

3. Փորձարկել աշակերտների ձեռքբերումները ստացած գիտելիքների հիման վրա տարբեր իրավիճակներում:

4. Ստուգման արդյունքներով բացահայտել չհասկացված, չյուրացված բաժինը և անդրադառնալ համապատասխան թեմային

5. Կատարել գիտելիքների յուրացման աստիճանի ստուգում:

6. Զարգացնել ճանաչողական հաղորդակցական, ինքնուրույն գործելու, ստեղծագործելու հմտություններ և կարողություններ:

7. Ձևակերպել եզրակացություններ և առաջարկություններ:

Թեմայի արդիականությունը՝

Թեմայի յուրացումը երեխայի մոտ կձևավորի այնպիսի հմտություններ ու կարողություններ, ինչպիսիք են ինքնուրույն ճանաչելու, վերլուծելու, դատողություններ անելու, եզրահանգումներ անելու, համագործակցելու, ստեղծագործական մոտեցումներ ցուցաբերելու ունակություններ, որոնք էլ հենց ժամանակի պահանջներն են:

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՄԱՍ

ԳԼՈՒԽ 1.

ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ և ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

1. Պարզագույն պարամետրական հավասարումների լուծումը

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հաճախ հանդիպում են այնպիսի խնդիրներ, որոնց լուծումները, կախված հաստատունի արժեքից, կարող են տարբեր լինել: Օրինակ, $ax^2+bx+c=0$ ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարումը լուծելիս, a, b, c տառերի արժեքներից կախված, հավասարման լուծումները տարբեր են, ուստի, այս հավասարումը կարելի է դիտարկել որպես պարամետրական հավասարում, որտեղ a-ն, b-ն, c-ն որոշակի թվեր են, իսկ x-ը՝ փոփոխական:

Լուծել պարամետր պարունակող հավասարումները կամ անհավասարումները, նշանակում է գտնել նրա լուծումների բազությունը պարամետրերի բոլոր թույլատրելի արժեքների համար:

Պարամետրական հավասարումները ավելի ճշգրիտ լուծելու և ավելի ճիշտ պատկերացնելու համար նպատակահարմար է սովորողներին հիշեցնել համապատասխան ֆունկցիայի գրաֆիկը, հավասարման լուծման գրաֆիկական եղանակը: Եթե ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում սովորողը կարող է գծել հավասարման աջ և ձախ մասերում գտնվող ֆունկցիաների գրաֆիկները, ապա պարամետրի բոլոր թույլատրելի արժեքների դեպքում ավելի դյուրին կլինի գտնել լուծումը: Պարամետրական հավասարումների ու անհավասարումների լուծման հիմնական սկզբունքը կարելի է ձևակերպել այսպես. Անհրաժեշտ է պարամետրի փոփոխման տիրույթը բաժանել այնպիսի տեղամասերի, որ դրանցից յուրաքանչյուրում ստացված հավասարումը հնարավոր լինի լուծել միևնույն մեթոդով: Յուրաքանչյուր տեղամասի համար գտնվում են պարամետրի արժեքներով արտահայտված հավասարման արմատները: Լուծման եղանակները ճիշտ այնպիսինն են, ինչպես թվային գործակիցներով հավասարումների լուծման ժամանակ: Քանի որ մեթոդներից յուրաքանչյուրը որոշակի հաջորդական գործողությունների հաջորդականություն է, որոնք կախված պարամետրի արժեքներից, կարող են իրականացվել տարբեր ձևերով, ապա պարամետրի փոփոխման ընտրված սկզբնական տեղամասերը լուծման ընթացքում կարող են տրոհվել, որպեսզի հնարավոր լինի դրանցից յուրաքանչյուրում կատարել միատեսակ դատողություններ: Սովորողները պետք է գիտենան նաև, որ խնդրի պատասխանը կլինի լիարժեք, եթե պատասխանում նշված է պարամետրի փոփոխման տեղամասերի ցանկը և դրանցից յուրաքանչյուրի համար հավասարման բոլոր արմատները:

Սովորողները հիմնականում դժվարանում են նրանում, որ որպես կանոն, պարամետրի փոփոխման հետ մեկտեղ փոփոխվում են ոչ միայն գործակիցները, այլև պարամետրի հետ կապված մի շարք ուրիշ բնութագիչներ: Այդ պատճառով, սովորաբար, պարամետրի տարբեր արժեքների համար հարկ է լինում կիրառել լուծման տարբեր մեթոդներ:

Քննարկենք մի քանի պարամետրական հավասարումների և անհավասարումների տիպեր:

Օրինակ 1. Լուծել $ax=3$ հավասարումը: [3, էջ 107]

Լուծում: I դեպքի համար պետք է դիտարկել երբ $a=0$,

Այդ դեպքում կստանանք՝ $0x=3$, այս դեպքում հավասարումը լուծում չունի:

I I դեպքի համար $a\neq 0$, $ax=3$, $x=3/a$

Այստեղ պետք է մեծ ուշադրություն դարձնել պատասխանների ձևակերպմանը:

Պատ՝. եթե $a=0$, հավասարումը լուծում չունի:

եթե $a\neq 0$, $ax=3$, $x=3/a$

Օրինակ 2. Լուծել $ax=b$ հավասարումը: [4, էջ 86]

Այս հավասարումը լուծելիս սովորողների մեծ մասը անմիջապես պատասխանում են $x=b/a$: Տալով 1. $0x=5$, 2. $3x=6$, 3. $0x=0$ մասնավոր օրինակները երեխաները սկսում են հետազոտել: Սովորողների մեծ մասը կարողանում է ճիշտ պատասխանել բոլոր բերված հավասարումների պատասխանները: Անելով եզրակացություններ, սովորողների զգալի մասը կարողանում է լուծել $ax=b$ հավասարումը:

Պատ.՝ եթե $a=0$, $b\neq 0$, ապա լուծում չունի եթե $a \neq 0$, ապա, $x=b/a$

եթե $a= 0, b=0$, ապա $x \in R$

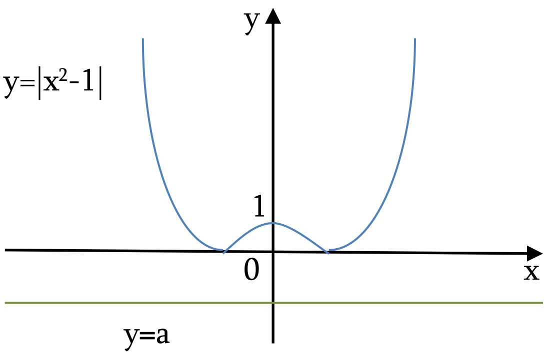
Օրինակ 3. Գտնել $|x^2-1| = a$ հավասարման լուծումների քանակը: [2, էջ 175]

Լուծում: Տրված հավասարումը կարելի է նաև լուծել գրաֆիկորեն, որն ավելի պարզ տեսք է ստանում.

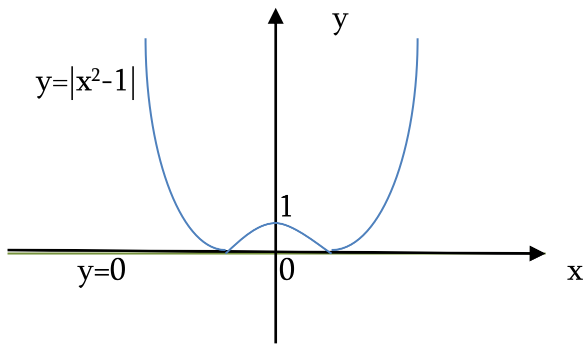
Նախ կառուցում ենք $y= |x^2-1|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ապա քննարկում $y=a$ ֆունկցիայի տարբեր դիրքերը: Այնուհետև, տալով a-ին տարբեր արժեքներ, աշակերտները կկարողանան անել եզրակացություն և ձևակերպել պատասխանը:

1. Եթե $a < 0$, $y=a$ ուղիղը չի հատում գրաֆիկին (նկար 1):

2. Եթե $a= 0$, ապա $y=a$ ուղիղը, այսինքն $y=0$ ուղիղը տրված գրաֆիկին հատում է երկու կետում (նկար 2):



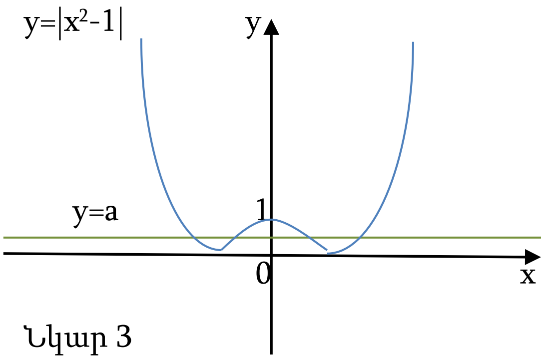
Նկար 1



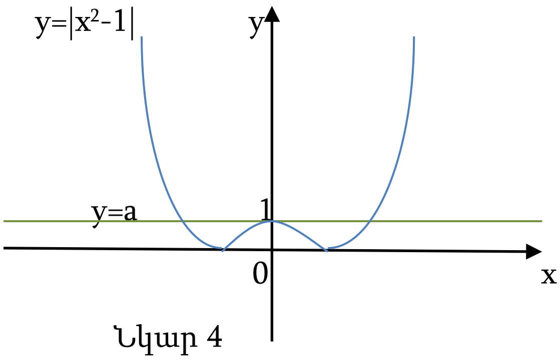
Նկար 2

3. եթե $a \in (0;1)$, կստանանք 1 լուծում (նկար 3):

4. Եթե $a=1$ համապատասխան գրաֆիկները կհատվեն երեք կետում (նկար 4):

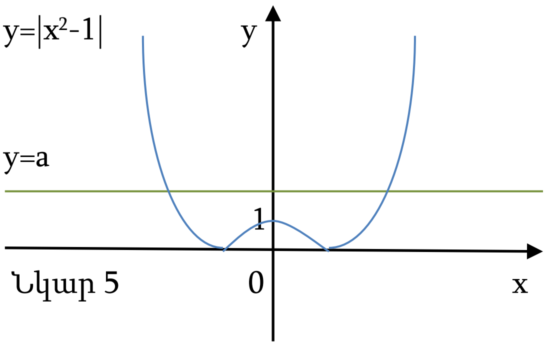


Նկար 3



Նկար 4

5. Եթե $a > 1$ համապատասխանաբար կստանանք ունեցան երկու լուծում (նկար 5):



Նկար 5

Գրաֆիկորեն պարզ երևում է $y=|x^2-1|$ և $y=a$ ֆունկցիաների փոխդասավորությունն ու հատման կետերի քանակը: Ուստի, սովորողները հետությամբ կկարողանան պարզել լուծումների քանակն ու պարամետրական հավասարման լուծումն a- ի փոփոխման տիրույթի բոլոր արժեքների համար:

Պատ.՝ 1. եթե $a<0$, $x\epsilon\theta$

2. եթե $a \in \{0\} \cup (1;\infty)$ապա ունի երկու արմատ

3. եթե $a \in (0;1)$ ապա ունի մեկ արմատ

4. եթե $a=1$, ապա ունի երեք արմատ

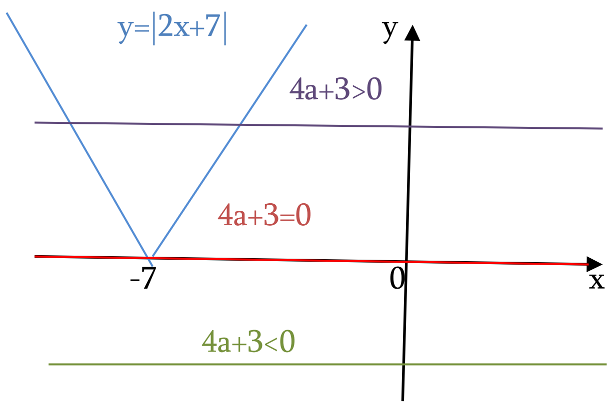
Օրինակ 4. Լուծել $|2x+7| = 4a+3$ հավասարումը: [1, էջ 204]

Այստեղ պետք է դիտարկել երեք դեպք՝

1. $4a+3 < 0$
2. $4a+3 = 0$
3. $4a+3 > 0$

Դրանով մենք դիտարկված կլինենք հավասարման բոլոր լուծումները a-ի բոլոր արժեքների համար:

Լուծում. Սովորողների ուշադրությունը պետք է հրավիրել այն հանգամանքին, որ մոդուլը բնութագրում է մոդուլի տակ գտնվող մեծության հեռավորությունը կոորդինատների սկզբակետից, իսկ հեռավորությունը միշտ արտահայտվում է ոչ բացասական թվով, ուստի՝



1. եթե $4a+3 < 0$, ապա հավասարումը լուծում չունի

2. եթե $4a+3=0$, $a=-3/4$ դեպքում հավասարումը կբերի՝

$$|2x+7| = 0 \iff 2x+7=0 \iff x=-3{,}5$$

3. եթե $4a+3 > 0$, ապա $\left[\begin{array}{l}2x+7=4a+3\\2x+7=-4a-3\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=2a-2\\x=-2a-5\end{array}\right.$

Պատ.՝ եթե $a < -3/4$, ապա լուծում չունի

եթե $a = -3/4$, $x=-3,5$

եթե $a > -3/4$, ապա $x_1 = 2a-2$, $x_2=-2a-5$

Օրինակ 5. Գտնել $(a+1)\,x = a^2-1$ հավասարման լուծումների քանակը: [3, էջ 108]

Լուծում: Սովորողների ուշադրությունը պետք է հրավիրել a^2-1 արտահայտության վրա: Ըստ կրճատ բազմապատկման բանաձևի՝ $a^2-1 =(a+1)(a-1)$, ուստի, ուշագրավ են $a=-1$ և $a\neq-1$ արժեքները:

Դիցուք, $a=-1$, այս դեպքում մեր հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $0x=0$, որը տեղի ունի x փոփոխականի ցանկացած արժեքի համար:

Դիցուք, $a\neq-1$, այս դեպքում մեր հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $(a+1)x=(a+1)(a-1)$: Քանի որ $a+1\neq 0$, հետևաբար, հավասարման երկու կողմերը կրճատելով a+1 արտադրիչով, կստանանք՝ $x=a-1$:

Պատ՝ երբ $a=-1$, ապա հավասարումը լուծում չունի

երբ $a\neq-1$, հավասարման լուծումը կլինի՝ $x=a-1$

2. Պարզագույն պարամետրական անհավասարումների լուծումը.

Պարամետրական անհավասարումները լուծվում են պարամետրով հավասարումների լուծման ընթացքում օգտագործվող նույն դատողությունների միջոցով:

Լուծել պարամետրով անհավասարում, նշանակում է պարամետրի յուրաքանչյուր արժեքի դեպքում գտնել տրված անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը (այդ բազմությունը կարող է լինել նաև դատարկ):

Օրինակ 1. Լուծել անհավասարումը. $\sqrt{2x+16} \geq a-4$ [5, էջ 25]

Սովորողների ուշադրությունը պետք է հրավիրել այն հանգամանքին, որ ինչպես թվի մոդուլը, այնպես էլ զույգ աստիճանի արմատը արտահայտվում է ոչ բացասական թվով, ուստի՝

Լուծում. եթե $a-4 < 0$, $a < 4$, ապա անհավասարման աջ մասում կստանանք բացասական թիվ, հետևաբար, անհավասարությունը ճիշտ է ԹԱԲ-ին պատկանող բոլոր x-ի համար՝ $2x+16 \geq 0$, $x \geq -8$

եթե $a-4 \geq 0$, ապա $2x+16 \geq (a-4)^2$

$$2x+16 \geq a^2 -8a +16, \quad x \geq \frac{a^2 -8a +16}{2}$$

Պատ.՝ եթե a ≥4 , ապա x ≥ $(a^2-8a+16)/2$

եթե a < 4 , ապա x ≥ -8

Պարամետրական անհավասարումները լուծելիս, հաճախ սովորողները հաշվի չեն առնում ԹԱԲ-ը, որը հանգեցնում է սխալ պատասխանի: Անհրաժեշտ է հատկապես, աշակերտների ուշադրությունը հրավիրել այս հանգամանքի վրա:

Օրինակ 2. Լուծել անհավասարումը. $\log_a(7-x) > 2\log_a(x-1)$ [3, էջ 109]

Այս անհավասարումը լուծելիս առաջի հերթին անհրաժեշտ է անդրադառնալ լոգարիթմի սահմանմանը, ըստ որի, a=1 և a≤ 0 արժեքների դեպքերում լոգարիթմն իմաստ չունի, ուստի, իմաստ չունի նաև լոգարիթմական անհավասարությունը, ուստի, a-ի ցանկացած այդպիսի արժեքների համար անհավասարումը լուծում չունի: Մնում է քննարկել 0<a<1 և a>1դեպքերը: Հաշվի առնենք նաև, որ ըստ լոգարիթմի սահմանման, լոգարիթմատակ արտահայտությունը կարող է ընդունել միայն դրական արժեքներ, ուստի,

$$\begin{cases} 7-x>0 \\ x-1>0 \end{cases} <=> \begin{cases} x<7 \\ x>1 \end{cases}$$

այսինքն՝ անհավասարումն իմաստ ունի միայն (1;7) միջակայքում: Այդ միջակայքում անհավասարումը համարժեք է $\log_a(7-x) > \log_a(x-1)^2$ անհավասարմանը:

1. Քննարկենք 0<a<1 դեպքը: Այս դեպքում y=$\log_a t$ ֆունկցիան նվազող է իր որոշման տիրույթում, և (1;7) միջակայքում անհավասարումը համարժեք է $7-x>(x-1)^2$ անհավասարմանը: Լուծելով վերջին անհավասարումը, կստանանք լուծումների բազմությունը՝ $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$: Այդ լուծումներից (1;7) միջակայքին են պատկանում միայն (3;7) միջակայքի թվերը:

Այսպիսով,0<a<1 դեպքում անհավասարման լուծումների բազմությունը (3;7) միջակայքն է:

2. Եթե a>1, ապա y=$\log_a t$ ֆունկցիան աճող է իր որոշման տիրույթում, և (1;7) միջակայքում անհավասարումը համարժեք է$7-x<(x-1)^2$ անհավասարմանը, այսինքն՝ $x^2-x-6<0$ անհավասարմանը: Լուծելով վերջին անհավասարումը, կստանանք, որ անհավասարման լուծումների բազմությունը (-2;3) միջակայքն է: Այդ լուծումներից (1;7) միջակայքին են պատկանում միայն (1;3) միջակայքի թվերը:

Այսպիսով, a>1 դեպքում անհավասարման լուծումների բազմությունը (1;3) միջակայքն է:

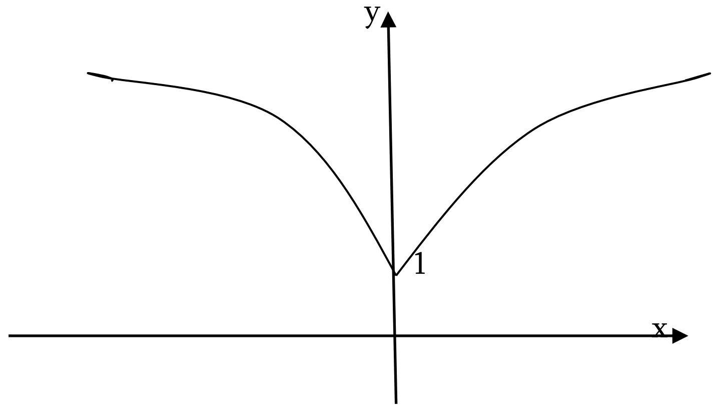
Պատ.՝ եթե a=1 կամ a≤ 0, անհավասարումը լուծում չունի

եթե 0<a < 1 , ապա x ϵ (3;7)

եթե a>1 , ապա x ϵ (1;3)

Օրինակ 3. Տրված է $\sqrt{1+x^2} \geq a$, պահանջվում է լուծել այն: [1, էջ 216]

Դիտարկենք y=$\sqrt{1+x^2}$ ֆունկցիան, որի գրաֆիկն ունի հետևյալ տեսքը.



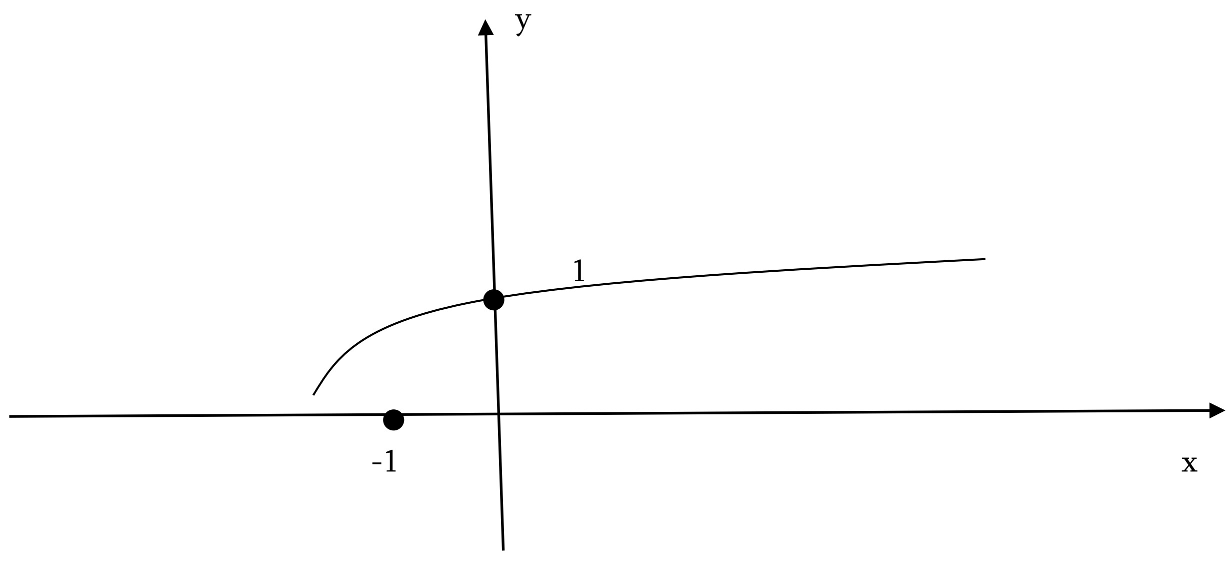
Ֆունկցիան զույգ է, գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ:

Այսպիսով՝ եթե a≤1, ապա x ∈ R;

եթե a>1, ապա x∈ $(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$, որտեղ x_1, x_2-ը գտնում ենք լուծելով անհավասարումը. $x^2+1 \geq a^2$⇔ x ∈ $(-\infty, -\sqrt{a^2-1}] \cup [\sqrt{a^2-1}, +\infty)$:

Օրինակ 4. Տրված է $3^{\sqrt{x+1}} \leq$ b անհավասարումը: Պահանջվում է լուծել այն: [2, էջ 86]

Դիտարկենք f(x)=$3^{\sqrt{x+1}}$ և g(x)=b ֆունկցիաները: Կառուցենք f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկը, իսկ g(x) ֆունկցիայի մասին արդեն խոսել ենք մյուս օրինակներում:



ԹԱԲ՝ $x \in [-1, \infty)$: Երբ x=-1, y=1,որն էլ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքն է:

Այսպիսով ՝ եթե b=1 , ապա x=-1 ունի 1 լուծում;

եթե b>1, ապա x ∈ $[-1, x_0]$, $\sqrt{x+1} \leq (\log_3 b)^2$⇔$\begin{cases} x \leq (\log_3 b)^2 \\ x \geq -1 \end{cases}$ ⇔ x∈ $[-1, (\log_3 b)^2]$;

եթե b<1, ապա x ∈ ∅ :

3. Պայմաններով խնդիրներ

Այս կետում դիտարկվող խնդիրներում պահանջվում է գտնել պարամետրի այն բոլոր արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում տեղի ունի որոշակի պայման:

Օրինակ 1. Գտնել պարամետրի այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում

$$\begin{cases} x^2+2xy+7y^2 \geq \frac{1-a}{1+a} \\ 3x^2+10x-5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

անհավասարումների համակարգն ունի գոնե մեկ լուծում: [3, էջ 119]

Ընդունենք, որ a_0-ն պարամետրի այն արժեքն է, որի դեպքում համակարգն ունի միակ լուծում և դիցուք, այդ լուծումը $(x_0;y_0)$-ն է: Հետևաբար, ճիշտ են

$$\begin{cases} -x_0{}^2+2x_0\,y_0+7y_0{}^2 \geq 1-\frac{2}{1+a_0} \\ \quad 3x_0{}^2+10x_0\,y_0-5y_0{}^2 \leq -2 \end{cases}$$

Անհավասարությունները:

Բազմապատկենք առաջին անհավասարությունը 2-ով և գումարենք երկրորդին: Կստանանք, որ ճիշտ է $x_0{}^2+6y_0+9y_0{}^2 \geq \frac{-4}{1+a_0}$ անհավասարությունը, այսինքն՝

$(x_0+3y_0)^2 \geq \frac{-4}{1+a_0}$ անհավասարությունը: Այստեղից էլ հետևում է, որ $\frac{-4}{1+a_0} \geq 0$, այսինքն՝ $a_0<-1$:

Այսպիսով, պարամետրի որոնելի արժեքներն ընկած են $a<-1$ տիրույթում:

Այժմ ապացուցենք, որ $a<-1$ պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր a պարամետրի համար համակարգն ունի լուծում: Եթե $a<-1$, ապա $-1>-1+\frac{2}{1+a}$: Հետևաբար, բավական է ապացուցել, որ

$$\begin{cases} x^2+2xy+7y^2 \geq -1 \\ 3x^2+10x-5y^2 = -2 \end{cases}$$

հավասարումների ամակարգն ունի լուծում, որովհետև վերջին համակարգի ցանկացած լուծում կլինի նաև սկզբնական համակարգի լուծում:

Լուծելով վերջին համակարգը, կստանանք $(-\frac{3}{2};\frac{1}{2})(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$ թվազույգերը, որոնք էլ կլինեն սկզբնական անհավասարումների համակարգի լուծումները $a<-1$ դեպքում:

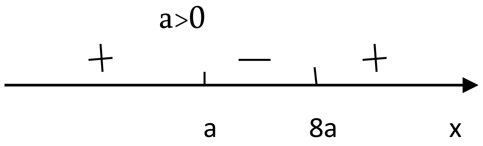
Օրինակ 2. Գտնել a պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում

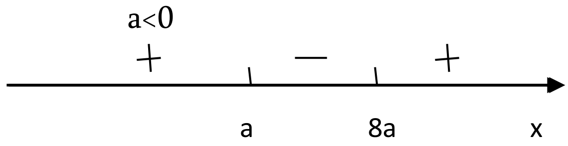
$\frac{x-a}{x-8a}<1$ [3, էջ 116]

Անհավասարմանը բավարարում են [2;4] հատվածին պատկանող բոլոր x-երը:

Խնդրի իմաստը հետևյալն է՝ պետք է գտնել a –ի այն արժեքները, որոնց դեպքում տրված անհավասարման լուծումների բազմությունը պարունակում է [2;4] հատվածը:

Տրված անհավասարումը լուծենք միջակայքերի եղանակով: Դրա համար Ox առանցքի վրա նշենք x=a և x=8a կետերը: Կախված a-ից, այդ կետերի դասավորվածությունը Ox առանցքի վրա տարբեր է և հետևաբար, անհավասարման լուծումները նույնպես կգրվեն տարբեր ձևերով՝





a = 0 դեպքում անհավասարումը կգրվի $\frac{x}{x}<0$ տեսքով, որը լուծում չունի:

a > 0 դեպքում անհավասարման լուծումների բազմությունը a < x < 8a միջակայքն է:

a < 0 դեպքում անհավասարման լուծումների բազմությունը 8a < x < a միջակայքն է:

a < 0 դեպքում անհավասարմանը բավարարում միայն բացասական թվեր: Հետևաբար, a-ի ոչ մի բացասական արժեք չի բավարարում խնդրի պայմանին:

a > 0 դեպքում անհավասարման լուծումների բազմությունը $2\leq x\leq 4$ հատվածը պարունակում է միայն այն դեպքում, երբ միաժամանակ՝ a<2 և 8a>4, այսինքն՝ երբ 0.5<a<2:

Պատ՝ aϵ (0.5;2):

Հաճախ ֆունկցիաների արժեքների բազմությունը գտնելիս կարելի է կազմել պարամետրական հավասարումներ և գտնել պարամետրի թվային արժեքները:

Օրինակ 3. Գտնել f (x)= $\frac{3x-4}{x}$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը: [4, էջ 119]

Լուծում; ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը նշանակելով a-ով կստանանք՝ $\frac{3x-4}{x}$ = a

$$\frac{3x-4}{x}=a \Leftrightarrow \frac{3x^2-ax+4}{x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-ax+4=0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$3x^2-ax+4=0$, $D=a^2-4\cdot 3\cdot 4=a^2-48$, հետևաբար $3x^2-ax+4=0$ հավասարումը լուծում ունի երբ $a^2-48\geq 0$

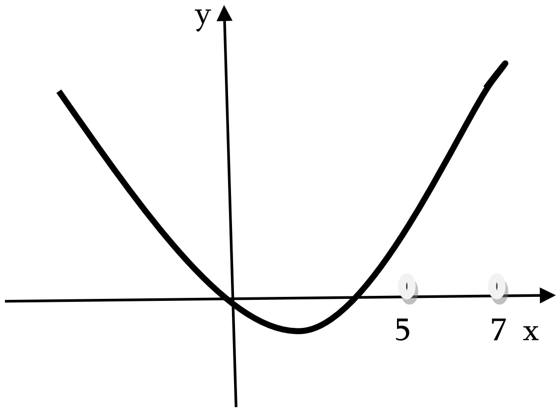
$a_1=-4\sqrt{3}$, $a_2=4\sqrt{3}$

Պատ.՝ երբ $a^2-48\geq 0$, E(f)= $(-\infty;-4\sqrt{3}]\cup[4\sqrt{3};+\infty)$

երբ $a^2-48<0$, E(f)= θ

Օրինակ 4. $x+\frac{25}{x}=a$ Գտնել a-ի ամենափոքր բնական արժեքը , որի դեպքում հավասարման արմատներից մեկը փոքր է 5-ից, իսկ մյուսը՝ մեծ 7-ից: [5, էջ 32]

x≠0, ուստի տրված հավասարումը համարժեք է $x^2-ax+25=0$ հավասարմանը: Ըստ պահանջի, հավասարումն ունի 2 արմատ: Ուրեմն $f(x)= x^2-ax+25$ ֆունկցիայի գրաֆիկը մի պարաբոլ է, որը աբսցիսների առանցքը հատում է 2 կետում և որի ուրվագիծը ունի հետևյալ տեսքը.



Նայելով գրաֆիկին, տեսնում ենք, որ անհրաժեշտ է լուծել հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} f(5) < 0 \\ f(7) < 0 \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25-5a+25<0 \\ 49-7a+25<0 \\ a^2-100>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 10 \\ a > \frac{74}{7} \\ a \in (-\infty,-10) \cup (10,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{74}{7},+\infty\right)$$

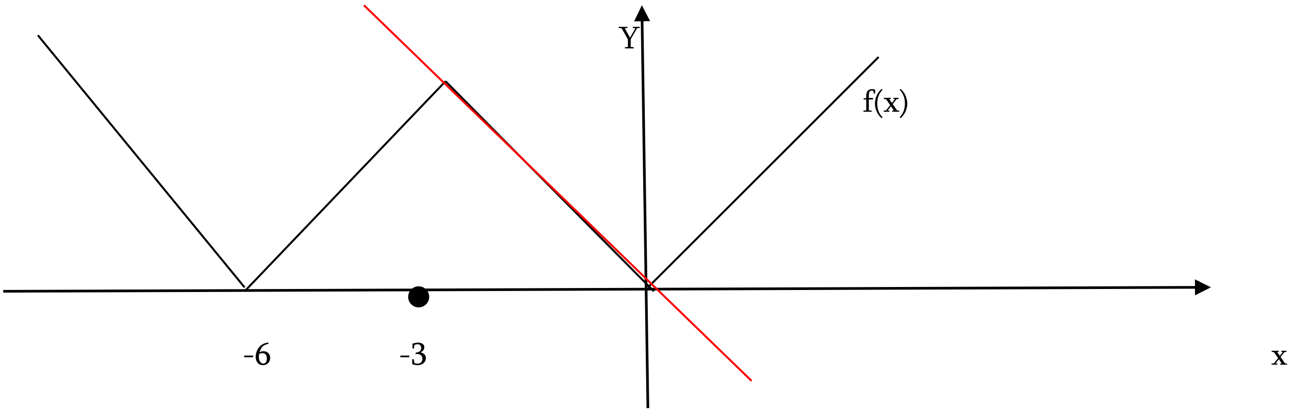
Ստացված միջակայքում ամենափոքր բնական թիվը 11-ն է: Պատասխան՝11:

Երեխան ճանաչում է քառակուսային ֆունկցիան և նրա գրաֆիկը, կարողանում է լուծել պարամետրական հավասարումը գրաֆիկի միջոցով, ավելի արդյունավետ ու մատչելի եղանակով, չի խուսափում քառակուսային կամ քառակուսայինի բերվող պարամետրական հավասարումներ ու անհավասարումներ պարունակող վարժություններից:

Օրինակ 5. $||x+3|-a^2|=-x$ Քանի՞ լուծում ունի այս հավասարումը $a=\sqrt{3}$ և a=1 դեպքերում: [1, էջ 198]

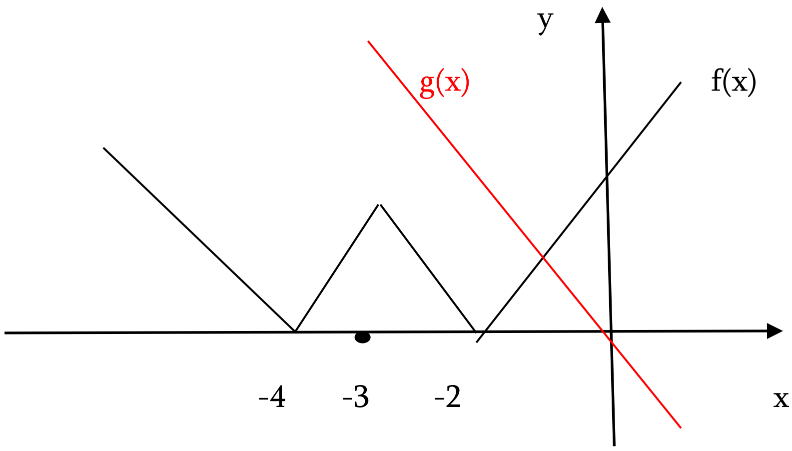
Դիտարկենք f(x)=$||x+3|-a^2|$ և g(x)=-x Ֆունկցիաները: f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերացնելու համար սովորողը պետք է իմանա y=$|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ինչպես նաև f(x)+a, f(x+a), $|f(x)|$ձևափոխությունները:

$a=\sqrt{3}$ դեպքում f(x) ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.



Այսպիսով, այս հավասարման լուծումը կլինի $x \in [-3,0]$ միջակայքի ցանկացած թիվ:

a=1. Լուծենք $|x+3|=1$ հավասարումը: Կստանանք՝ x=-4;-2 արժեքները: f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա հետևյալ տեսքը.

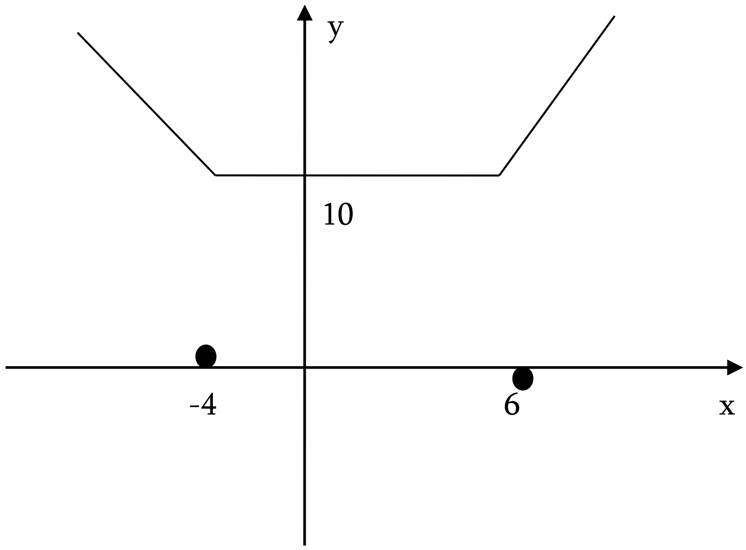


2 ֆունկցիաները հատվեցին 1 կետում: Ուստի, հավասարումն ունի 1 լուծում:

Օրինակ 6. $|x+4|+|x-6|=b$ b-ի ո՞ր արժեքների դեպքում հավասարումն ունի ՝ ա) 1լուծում, բ) անթիվ լուծումներ, գ) 2 լուծում, դ)ոչ մի լուծում: [2, էջ 174]

Դիտարկենք f(x)=$|x+4|+|x-6|$ և g(x)=b ֆունկցիաները:

Կառուցենք f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկը, իսկ g(x) ֆունկցիայի գրաֆիկը ուղիղ գիծ է,որը զուգահեռ է աբսցիսների առանցքին կամ համընկնում է նրա հետ:



Այսպիսով՝ եթե b<10, ապա հավասարումն արմատ չունի,

եթե b=10, ապա հավասարումն ունի անթիվ լուծումներ՝ $[-4{,}6]$ միջակայքի ցանկացած թիվ;

եթե b>10, ապա հավասարումն ունի 2 լուծում:

Սովորողը ճանաչում է Y=IxI ֆունկցիան, իմանում է նրա բոլոր ձևափոխությունների մասին, կարողանում է լուծել բարդ պարամետրական հավասարումներ: Ինչպես նաև գիտակցում է ֆունկցիայի կարևոր դերը հավասարումների և անհավասարումների լուծման մեջ:

Գլուխ 2.

Պարամետր պարունակող եռանկյունաչափական հավասարումներ

Մենք առնչվեցինք պարամետր պարունակող հանրահաշվական (ռացիոնալ) հավասարումների հետ: Այժմ դիտարկենք պարամետր պարունակող եռանկյունաչափական հավասարումների օրինակներ:

Օրինակ 1: a- ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a$$

հավասարումն ունի արմատ: Գտնել այդ արմատները: [1, էջ 209]

Լուծում. Այստեղ անհրաժեշտ է կիրառել կրճատ բազմապատկման բանաձևերը՝

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{5+3\cos 4x}{8}$

Հետևաբար, այդ հավասարումը համարժեք է հետևյալ հավասարմանը՝

$$\frac{5+3\cos 4x}{8} = a$$ որտեղից կունենանք՝

$$\cos 4x = \frac{8a-5}{3}:$$

Ակներև է, որ այս հավասարումը լուծում ունի այն, և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$-1 \leq \frac{8a-5}{3} \leq 1:$$

Լուծելով այս կրկնակի անհավասարումը, կստանանք՝

$$\frac{1}{4} \leq a \leq 1:$$

Այդպիսի a-երի համար վերջին հավասարման (հետևաբար նաև տրվածի) արմատներն են՝

$$x = \pm\frac{1}{4}arccos\frac{8a-5}{3} + \frac{\pi k}{2}(\ k \in Z):$$

Պատասխան՝ a$\in \left[\frac{1}{4}; 1\right] x = \pm\frac{1}{4} arccos\frac{8a-5}{3} + \frac{\pi k}{2}$($k \in Z$):

Հավասարումների և անհավասարումների լուծման այս եղանակը թույլ է տալիս սովորողին կատարել ժամանակի խնայողություն: Ակնհայտ երևում է լուծման գեղեցկությունը, հանրահաշվորեն սովորողը կարող է ստուգել պատասխանը (կամ հակառակը): Սովորողի աչքերում տեսնում ես փայլ, ուրեմն հասար նպատակիդ:

Որպեսզի ավելի պատկերավոր լինի վերը նշվածը, բերենք ևս մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 2. Գտնել a պարամետրի այն բոլոր արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում

$sin^2x=\frac{1}{2}$ (1)

և

28sin^2x= 2a +9 +(2a-5) cos 4x (2)

Հավասարումները համարժեք են: [3, էջ 117]

Օգտագործելով կրկնակի անկյան կոսինուսի բանաձևը՝ կստանանք.

cos 4x = 2 $cos^2$2x -1 2(1- 2$sin^2 2x)^2$ -1= 8 sin^4x-8 sin^2x +1

Հաշվի առնելով այս հավասարությունը, (2) հավասաումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

2(2a-5) sin^4x – (4a-3) sin^2x +a+1 = 0 (3)

Դիտարկենք երկու դեպք. a =$\frac{5}{2}$ և a $\neq$ $\frac{5}{2}$:

1) Եթե a =$\frac{5}{2}$, ապա (3) հավասարումը ընդունում է -7sin^2x+ $\frac{7}{2}$ = 0 տեսքը, այսինքն՝ (1) և (2) հավասարումները համընկնում են:

1) Եթե a $\neq$ $\frac{5}{2}$, ապա դիտարկենք 2(2a-5) y^2– (4a-3) y +a+1 = 0

քառակուսային հավասարումը, որն ունի երկու արմատ՝ $y_1 =\frac{1}{2}$ և $y_2 =\frac{a+1}{2a-5}$

Հետևաբար, (3) հավասարումը համարժեք է՝ $sin^2x =\frac{1}{2}$ և $sin^2x =\frac{a+1}{2a-5}$ հավասարումների համախմբին:

Հեշտ է տեսնել, որ գոյություն չունի a պարամետրի այնպիսի արժեք, որի դեպքում ՝

$\frac{1}{2} =\frac{a+1}{2a-5}$: Հետևաբար, որպեսզի (1) և (2) հավասարումները լինեն համարժեք, sin^2x $=\frac{a+1}{2a-5}$ հավասարումը լուծում չպետք է ունենա: Դա հնարավոր է երկու դեպքում.

$\frac{a+1}{2a-5} < 0$ (4) կամ $\frac{a+1}{2a-5} >1$ (5)

(4) անհավասարմանը բավարարում են (-1; $\frac{5}{2}$) միջակայքին պատկանող a-երը, իսկ (5) անհավասարմանը՝ ($\frac{5}{2}$; 6) միջակայքին պատկանող a-երը:

Հետևաբար, երբ $a\epsilon(-1; \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}; 6)$, ապա (1) և (2) հավասարումները համարժեք են:

Միավորելով 1 և 2 դեպքերը, ստանում ենք խնդրի լուծումը. $(-1; 6)$:

Պատասխան՝ a ϵ (-1;6)

Եզրակացություն

Մարդկանց պրակտիկ գործունեության ցանկացած բնագավառում կիրառվում են մաթեմատիկայի ընդհանուր օրենքները: Կալինինը, դիմելով իր սաներին, ասել է. «Մաթեմատիկան կարգավորում է միտքը, զարգացնում նրա տրամաբանական մտածողությունը: Ասում են, որ մաթեմատիկան- դա մտքի մարզանք է»:

Իրոք, մաթեմատիկայի տեսական նյութի ուսումնասիրությանը զուգընթաց և նրա անմիջական կապի միջոցով աշակերտը պետք է տիրապետի բազմազան ունակությունների և հմտությունների մի ամբողջ կոմպլեքսի, որը կնպաստի նրա տրամաբանական մտածողության զարգացմանը, որին, ինչպես համոզվեցինք, էապես նպաստում է պարամետրական հավասարումների և անհավասարումների լուծմանը նպաստող դատողությունների ճիշտ ընտրությունն ու կազմակերպումը: Զարգացնելով իր մեջ մտածելու, տրամաբանելու և ճիշտ կողմնորոշվելու կարողություն, անմիջական տեսնելով մաթեմատիկական մեթոդների կիրառման ուժն ու նշանակությունը, աշակերտը կարող է գնահատել այդ գիտության դերն ամբողջովին վերցրած:

Մեծ է ֆունկցիայի դերը պարամետրական հավասարումներ կամ անհավասարումներ լուծելու մեջ: Այստեղ բախվում են 2 հզոր թեմաներ, որոնք յուրացնելու համար անհրաժեշտ են կայուն գիտելիքներ: Երեխան տեսնելով այդ համադրությունը՝ ինքն է տալիս այս գնահատականը, գիտակցելով էլ սովորում է հաղթահարել այն: Երեխաների հետ անհատական աշխատելու դեպքում էլ նպատակահարմար եմ գտնում «պարամետրական հավասարումներ և անհավասարումներ» թեման անցնել «ֆունկցիան» լիարժեք ուսումնասիրելուց հետո:

Պարամետրական հավասարումների և անհավասարումների լուծման մեթոդների կիրառումը պահանջում է աշակերտից ստեղծագործական աշխատանք, որտեղ նա պետք է հանդես բերի մեծ նախաձեռնություն, հնարագիտություն, կենդանի և ցայտուն օրինակներ բերելու կարողություն, հավասարումների լուծմանը նպաստող կանոնների և մեթոդների ճիշտ ընտրություն և այլն: Այս բոլորի հետ մեկտեղ, այն զարգացնում է աշակերտի մոտ ինքնուրույն մտածելու, կողմնորոշվելու, վարժությունը պարզեցնելու վերաբերյալ եզրակացություններ անելու, սիստեմատիկ, կանոնավոր և ճշգրիտ աշխատելու կարողություն, հանդես բերելով ստեղծագործական նախաձեռնություն և ինքնուրույնություն, որը իր մեջ կներառի աշակերտի հմտությունն ու հնարավորությունները, հիմք կհանդիսանա աշակերտի մտքի ու տրամաբանական մտածողության զարգացմանը:

Ներկայացված նյութի միջոցով փորձեցի ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում կիրառվող պարամետրական հավասարումների և անհավասարումների լուծումները ներկայացնել մի քանի մեթոդներով, որոնք կզարգացնեն աշակերտների մտածելու, տրամաբանելու և եզրակացություններ անելու կարողությունները: Այն միտված է ինչպես ամրապնդելու և խորացնելու դպրոցում ստացած գիտելիքները, այնպես էլ աշակերտներին հնարավորություն է ընձեռնում ծանոթանալու հավասարումների լուծման նոր մեթոդներին և հնարներին, որը էապես կնպաստի բարձր գիտելիքներ և հմտություններ ձեռք բերելուն:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1. Н. Я. Виленкин «Алгебра и теория чисел», Москва, 1974
2. М. И. Абрамович, М. Т. Стародубцев «Алгебра и елементарные функции», Луйс, Ереван 1978
3. Ս. Նիկոլսկի, Մ. Պոտապով «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» - 12, Անտարես, Երևան 2011
4. «Հանրահաշիվ» վարժությունների ժողովածու- Ա.Հ. Կարապետյան
5. Н. А. Киселева «Математика и действительность», Москва, 1967