10-րդ դասարան, Լուծումներ

Խնդիր 1: Գտնել այն բոլոր a, b և c բնական թվերի եռյակները, որոնց համար $ab+1$, $bc+1$, $ac+1$ թվերից յուրաքանչյուրը հնարավոր է ներկայացնել որևէ բնական թվի ֆակտորիալի տեսքով (n բնական թվի ֆակտորիալը՝ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$):

Լուծում: Դիցուք $a \geq b \geq c$ և $ab+1 = n!$, $bc+1 = m!$, $ac+1 = k!$: Ենթադրենք $m \geq 3$: Այդ դեպքում $ab+1, bc+1, ac+1$ թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 3-ի [+1 **միավոր**], հետևաբար ab, bc, ac թվերից յուրաքանչյուրը 3-ի բաժանելիս մնացորդում տալիս է 2, որտեղից $a^2b^2c^2$ թիվը 3-ի բաժանելիս մնացորդում տալիս է 2 [+**2 միավոր**], որը հնարավոր չէ քանի, որ բնական թվի քառակուսին 3-ի վրա բաժանելիս մնացորդում տալիս է 0 կամ 1 [+**2 միավոր**]:

Հետևաբար $m = 2$, որտեղից $b = c = 1$, հետևաբար $a = n! - 1$: Ստացվեց, որ խնդրի պայմաններին բավարարում են $(n!-1, 1, 1), (1, n!-1, 1), (1, 1, n!-1)$ եռյակները, որտեղ $n \in N, n \geq 2$: [+**2 միավոր**]

Խնդիր 2: Ապացուցել $a+b+c+a^2+b^2+c^2 \leq 4$ անհավասարությունը, որտեղ $a, b, c > -1$ և $a^3+b^3+c^3 = 1$:

Լուծում: $a+b+c+a^2+b^2+c^2 \leq 4 \Leftrightarrow a+b+c+a^2+b^2+c^2 \leq 3+a^3+b^3+c^3$ [+**1 միավոր**]: Ապացուցենք,որ $a^3+1 \geq a^2+a \Leftrightarrow (a+1)(a-1)^2 \geq 0$ [+**3 միավոր**]: Նմանապես՝ $b^3+1 \geq b^2+b, c^3+1 \geq c^2+c$: Գումարելով նշված անհավասարությունները կստանանք, որ $a+b+c+a^2+b^2+c^2 \leq 3+a^3+b^3+c^3$ [+**3 միավոր**]:

Խնդիր 3: ω շրջանագծին տարված են BA և BC շոշափողները (A-ն և C-ն շոշափման կետերն են և $\angle ABC < 90°$): Դիցուք M-ը BC հատվածի միջնակետն է, իսկ AM հատվածը ω-ն հատում է P կետում: Ապացուցել, որ B, P, H, C կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղ H-ը ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է:

Լուծում: Ըստ շոշափողի և հատողի հատկության՝ $MC^2 = MP \cdot MA \Leftrightarrow BM^2 = MP \cdot MA \Leftrightarrow \dfrac{BM}{MP} = \dfrac{MA}{BA}$ [+**2 միավոր**] և $\angle BMA$ ընդհանուր է, հետևաբար $\triangle BPM \sim \triangle ABM$, որտեղից $\angle PBM = \angle BAP = \alpha$ [+**2 միավոր**]: Մյուս կողմից $\angle BCP = \angle PAC = \beta$ [+**1 միավոր**], հետևաբար $\angle BPC = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - \angle A$ և $\angle BHC = 180^\circ - \angle A$, հետևաբար B, P, H, C կետերով անցնում է շրջանագիծ [+**2 միավոր**]:

Խնդիր 4: $n \times n$ ($n > 1$) չափի վանդակավոր քառակուսու յուրաքանչյուր վանդակ ներկել են երեք գույներից որևէ մեկով: Գտնել n-ի հնարավոր բոլոր արժեքները, որոնց դեպքում քառակուսին կամայական ձևով ներկելու դեպքում գոյություն ունենա երկու տող, որոնցում որևէ գույնով ներկված վանդակների քանակները լինեն իրար հավասար:

Լուծում: Պարզ է, որ $n = 2$-ը և $n = 3$-ը չեն բավարարում [+**1 միավոր**]: Դիցուք $n > 3$: Ենթադրենք, որ կամայական ձևով ներկելու դեպքում քառակուսում գոյություն չունի երկու տող, որոնցում որևէ գույնով ներկված վանդակների քանակը հավասար են: Այդ դեպքում առաջին գույնով ներկված վանդակների քանակը փոքր չէ $0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ գումարից [+**3 միավոր**]: Նմանապես երկրորդ և երրորդ գույների համար, հետևաբար քառակուսու վանդակների քանակը փոքր չէ $\frac{3n(n-1)}{2}$ –ից [+**1 միավոր**]: Մյուս կողմից, երբ $n \geq 4$ ապա $\frac{3n(n-1)}{2} > n^2$ [+**1 միավոր**], որը հակասություն է, հետևաբար $n \geq 4$ կամայական բնական թիվ բավարարում է խնդրի պայմաններին: [+**1 միավոր**]