9-րդ դասարան, Լուծումներ

Խնդիր 1: Դիցուք a, b և c թվերը բնական են: Հնարավո՞ր է, արդյոք $a^{2023}b+1, b^{2023}c+1$, $c^{2023}a+1$ թվերից յուրաքանչյուրը ներկայացնել երկուսից ավելի հաջորդական բնական թվերի արտադրյալի տեսքով:

Առաջին Լուծում: Քանի,որ երկուսից ավելի հաջորդական թվերից մեկը բաժանվում է 3-ի, հետևաբար $a^{2023}b+1, b^{2023}c+1, c^{2023}a+1$ թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 3-ի [**+1 միավոր**], այսինքն $a^{2023}b, b^{2023}c, c^{2023}a$ թվերից յուրաքանչյուրը 3-ի բաժանելիս մնացորդում տալիս է 2 [**+1 միավոր**]: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ a=3n+1, b=3k+2 [**+1 միավոր**], որտեղից c=3l+2($c^{2023}a+1$ բաժանվում է 3-ի) [**+2 միավոր**], հետևաբար

$b^{2023}c+1$=3m+2, որը չի բաժանվում 3-ի, ինչը հակասություն է [**+2 միավոր**]:

Երկրորդ Լուծում: Քանի,որ երկուսից ավելի հաջորդական թվերից մեկը բաժանվում է 3-ի, հետևաբար $a^{2023}b+1, b^{2023}c+1, c^{2023}a+1$ թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 3-ի [**+1 միավոր**], այսինքն $a^{2023}b, b^{2023}c, c^{2023}a$ թվերից յուրաքանչյուրը 3-ի բաժանելիս մնացորդում տալիս է 2 [**+1 միավոր**], հետևաբար $a^{2023}b\cdot b^{2023}c\cdot c^{2023}a=a^{2024}b^{2024}c^{2024}$ թիվը 3-ի բաժանելիս մնացորդում տալիս է 2 [**+3 միավոր**], որը հակասություն է քանի, որ բնական թվի քառակուսին 3-ի վրա բաժանելիս մնացորդում տալիս է 0 կամ 1 [**+2 միավոր**]:

Խնդիր 2: Գտեք $xy+yz-xz$ արտահայտության մեծագույն և փոքրագույն արժեքը, որտեղ $x^2+y^2+z^2=1$:

Լուծում: Քանի, որ $(x-z)^2+(x+y)^2+(z+y)^2\geq 0 \Leftrightarrow xy+zy-xz\geq -(x^2+y^2+z^2)=-1$ [**+2 միավոր**], հետևաբար $xy+yz-xz$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը հավասար է -1, իսկ հավասարությունը տեղի ունի, երբ $x=z, y=-x$, հետևաբար $x=z=\frac{1}{\sqrt{3}}, y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ [**+2 միավոր**]:

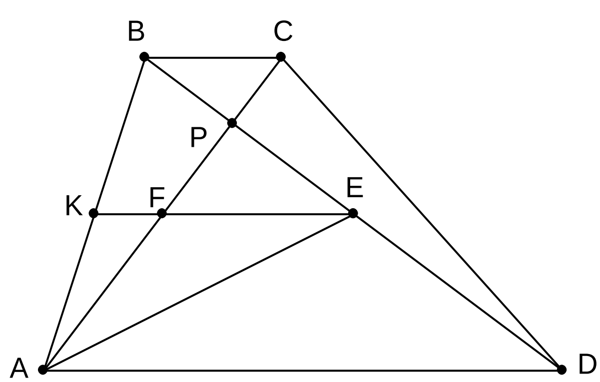
Քանի, որ $(x+z-y)^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq 2xy+2xz-2xz \Leftrightarrow xy+xz-xz\leq \frac{x^2+y^2+z^2}{2}=\frac{1}{2}$ [**+2 միավոր**], հետևաբար $xy+yz-xz$ արտահայտության մեծագույն արժեքը հավասար է $\frac{1}{2}$, իսկ հավասարությունը տեղի ունի $x=0, z=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$: [**+1 միավոր**]

Խնդիր 3: 100×100 չափի վանդակավոր քառակուսու յուրաքանչյուր վանդակ ներկել են երեք գույներից որևէ մեկով: Ապացուցել, որ քառակուսին կամայական ձևով ներկելու դեպքում գոյություն կունենա երկու տող, որոնցում որևէ գույնով ներկված վանդակների քանակները կլինեն հավասար:

Լուծում: Ենթադրենք, որ կամայական ձևով ներկելու դեպքում քառակուսու մեջ գոյություն չունի երկու տող, որոնցում որևէ գույնով ներկված վանդակների քանակները հավասար են: Այդ դեպքում առաջին գույնով ներկված վանդակների քանակը փոքր չէ $0 + 1 + 2 + \cdots + 99 = \frac{100 \cdot 99}{2}$ գումարից [+**2 միավոր**]: Նմանապես երկրորդ և երրորդ գույների համար [+**1 միավոր**], հետևաբար քառակուսու վանդակների քանակը փոքր չէ $\frac{3 \cdot 100 \cdot 99}{2}$ –ից [+**2 միավոր**]: Մյուս կողմից, $\frac{3 \cdot 100 \cdot 99}{2} > 100^2$, որը հակասություն է [+**2 միավոր**]:

Խնդիր 4: Տրված է $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ սեղանը, ընդ որում՝ $BD = 2AB$ և $AD = 3BC$: Ապացուցել, որ CAD անկյան կիսորդը BD անկյունագիծը հատում է նրա միջնակետում:

Լուծում: Տանենք ABD եռանկյան KE միջին գիծը, որն ըստ Թալեսի թեորեմի AC հատվածը հատում է նրա F միջնակետում [+**1 միավոր**]: Այդ դեպքում $BE = ED$, $AF = FC$, $AK = KB$, $KE \parallel AD \parallel BC$ [+**1 միավոր**]: AC և BD անկյունագծերի հատման կետը նշանակենք P-ով: Ունենք՝ $AK = KB = a$, $BE = ED = 2a$:



Ունենք նաև, որ $KF = b$, $BC = 2b$, $AD = 6b$, $EF = 2b$ [+**1 միավոր**]**:** Հետևաբար F-ը ABE հավասարասրուն եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է [+**2 միավոր**]**:**, ուստի AP-ն նույնպես միջնագիծ է, հետևաբար՝ $AP = EK$, $AF = FE$, $\angle FAE = \angle FEA = \angle EAD$: **[+2 միավոր]:**

Դիտողություն: $BP = PE$ պնդումը կարելի է ապացուցել BCP և APD եռանկյունների նմանությունից: